



คณิตศาสตร์

๕

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑





คู่มือครู

รายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๕

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีหน้าที่ในการพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกทักษะ กิจกรรม และสื่อการเรียนรู้เพื่อใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ นี้ จัดทำตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีเนื้อหาสาระข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน การวิเคราะห์ความสอดคล้องของแบบฝึกหัดท้ายบทกับจุดมุ่งหมายประจำบทความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู ซึ่งเป็นความรู้ที่ครูควรทราบนอกเหนือจากเนื้อหาในหนังสือเรียน ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทพร้อมเฉลย รวมทั้งเฉลยแบบฝึกหัด ซึ่งสอดคล้องกับหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ ที่ต้องใช้ควบคู่กัน

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ บุคลากรทางการศึกษา และหน่วยงานต่าง ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้



(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิ้มปิจำนงค์)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ด้วยการลงมือปฏิบัติทำกิจกรรมและแก้ปัญหาที่หลากหลายเพื่อให้ผู้เรียนเกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งมีทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ สสวท. จึงได้จัดทำคู่มือครูประกอบการใช้หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ ที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตร เพื่อเป็นแนวทางให้โรงเรียนนำไปจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ นี้ ประกอบด้วย เนื้อหาสาระ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน การวัดผล ประเมินผลระหว่างเรียน การวิเคราะห์ความสอดคล้องของแบบฝึกหัดท้ายบทกับจุดมุ่งหมายประจำบท ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครูซึ่งเป็นความรู้ที่ครูควรทราบนอกเหนือจากเนื้อหาในหนังสือเรียน ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทพร้อมเฉลย รวมทั้งเฉลยแบบฝึกหัด ซึ่งครูผู้สอนสามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ให้บรรลุจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ โดยสามารถนำไปจัดกิจกรรมการเรียนรู้ได้ตามความเหมาะสมและความพร้อมของโรงเรียน ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ ได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดีจากผู้ทรงคุณวุฒิ คณาจารย์ นักวิชาการอิสระ รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบัน และสถานศึกษา ทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณมา ณ ที่นี้

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์แก่ผู้สอนและผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่าย ที่จะช่วยให้จัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้คู่มือครูเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

แนะนำการใช้คู่มือครู

ในหนังสือเล่มนี้แบ่งเป็น 3 บท ตามหนังสือเรียนหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้



ตัวชี้วัด

ตัวชี้วัดระบุสิ่งที่นักเรียนพึงรู้และปฏิบัติได้ รวมทั้งคุณลักษณะของผู้เรียนในแต่ละ
ระดับชั้น ซึ่งสะท้อนถึงมาตรฐานการเรียนรู้ มีความเฉพาะเจาะจงและมีความเป็น
รูปธรรม นำไปใช้ในการกำหนดเนื้อหา จัดทำหน่วยการเรียนรู้ จัดการเรียนรู้การสอน
และเป็นเกณฑ์สำคัญสำหรับการวัดประเมินผลเพื่อตรวจสอบคุณภาพผู้เรียน



จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้



ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ประเด็นเกี่ยวกับเนื้อหาที่ครูควรเน้นย้ำกับนักเรียน ประเด็นเกี่ยวกับเนื้อหาที่ครูควรระมัดระวัง จุดประสงค์ของตัวอย่างที่นำเสนอในหนังสือเรียน เนื้อหาที่ควรทบทวนก่อนสอนเนื้อหาใหม่ และประเด็นที่ครูควรตระหนักในการสอน



ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

ประเด็นที่นักเรียนมักเข้าใจผิดเกี่ยวกับเนื้อหา



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

ประเด็นที่ครูควรทราบเกี่ยวกับแบบฝึกหัด เช่น จุดมุ่งหมายของแบบฝึกหัด เนื้อหาที่ควรทบทวนก่อนทำแบบฝึกหัด และเรื่องที่ครูควรให้ความสำคัญในการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน



กิจกรรมในคู่มือครู

กิจกรรมที่คู่มือครูเล่มนี้เสนอแนะไว้ให้ครูนำไปใช้ในชั้นเรียน ประกอบด้วยกิจกรรมนำเข้าสู่บทเรียน ที่ใช้เพื่อตรวจสอบความรู้ก่อนหน้าที่นักเรียนควรทราบก่อนเรียนเนื้อหาใหม่ และกิจกรรมที่ใช้สำหรับสร้างความคิดรวบยอดในเนื้อหา โดยหลังจากทำกิจกรรมแล้ว ครูควรเชื่อมโยงผลที่ได้จากการทำกิจกรรมกับความคิดรวบยอดที่ต้องการเน้น ทั้งนี้ ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมเหล่านี้ด้วยตนเอง



กิจกรรมในหนังสือเรียน

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creative and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)



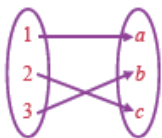
เฉลยกิจกรรมในหนังสือเรียน

เฉลยคำตอบหรือตัวอย่างคำตอบของกิจกรรมในหนังสือเรียน



แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน

ตัวอย่างการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน ที่มีขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ซึ่งเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้และพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

สารบัญ		บทที่ 1 – 2
บทที่	เนื้อหา	หน้า
1  เลขยกกำลัง	บทที่ 1 เลขยกกำลัง	1
	1.1 เนื้อหาสาระ	3
	1.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	7
	1.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน	16
	1.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน	21
	1.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท	22
	1.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู	24
	1.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	31
	และเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	
2  ฟังก์ชัน	บทที่ 2 ฟังก์ชัน	35
	2.1 เนื้อหาสาระ	37
	2.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	39
	2.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน	50
	2.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน	62
	2.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท	63
	2.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู	66
	2.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	75
	และเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	

สารบัญ	บทที่ 3	
บทที่	เนื้อหา	หน้า
3 	บทที่ 3 ลำดับและอนุกรม	82
	3.1 เนื้อหาสาระ	84
	3.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน	88
	3.3 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน	95
	3.4 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท	96
	3.5 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู	99
	3.6 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	102
ลำดับและอนุกรม	และเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท	
เฉลยแบบฝึกหัดและวิธีทำโดยละเอียด		116
บทที่ 1 เลขยกกำลัง		116
บทที่ 2 พังก์ชัน		149
บทที่ 3 ลำดับและอนุกรม		214
แหล่งเรียนรู้เพิ่มเติม		295
บรรณานุกรม		296
คณะผู้จัดทำ		297

บทที่ 1

เลขยกกำลัง

เลขยกกำลัง เป็นเรื่องที่นักเรียนได้ศึกษามาบ้างแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งอยู่ในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รวมถึงรากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง โดยในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 บทที่ 1 เลขยกกำลัง จะเริ่มด้วยการทบทวนความรู้ดังกล่าว และเพิ่มเติมเนื้อหาเกี่ยวกับรากที่ n ของจำนวนจริง ค่าหลักของรากที่ n เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี (ปีละครั้ง)

ในบทเรียนนี้มุ่งเน้นให้นักเรียนบรรลุตัวชี้วัดตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้



ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

ตัวชี้วัด

- เข้าใจความหมายและใช้สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณ การเท่ากัน และการไม่เท่ากันของจำนวนจริงในรูปปรกณฑ์ และจำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ
- เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับดอกเบี้ยและมูลค่าของเงินในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้แกนกลาง

- รากที่ n ของจำนวนจริง เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
- เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ
- ดอกเบี้ย



จุดมุ่งหมาย

- หารากที่ n ของจำนวนจริง เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
- ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปปรกณฑ์ในการแก้ปัญหา
- ใช้ความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะในการแก้ปัญหา



ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังและกรณีที่สองในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น



ipst.me/8446

1.1 เนื้อหาสาระ

1. บทนิยาม 1

ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก “ a ยกกำลัง n ” หรือ “ a กำลัง n ” เขียนแทนด้วย a^n มีความหมายดังนี้

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

$$a^0 = 1 \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq 0$$

เรียก a^n ว่าเลขยกกำลัง

เรียก a ว่าฐานของเลขยกกำลัง และ

เรียก n ว่าเลขชี้กำลัง

2. ทฤษฎีบท 1

ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$1) \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$2) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3) \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$4) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$5) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. บทนิยาม 2

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง

y เป็นรากที่สองของ x ก็ต่อเมื่อ $y^2 = x$

4. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว x จะมีรากที่สองที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เรียกรากนี้ว่า รากที่สองที่ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ของ x และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{x}$ โดยเครื่องหมาย $\sqrt{}$ เรียกว่า เครื่องหมายกรณฑ์

5. เมื่อ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ $(-y)^2 = y^2$ ดังนั้น ถ้ามีจำนวนจริง y ยกกำลังสอง แล้ว ได้ x กำลังสองของ $-y$ ก็จะเป็น x ด้วย

- ถ้า $x > 0$ แล้วจะมีรากที่สองของ x สองราก คือ $\sqrt{x}$ และ $-\sqrt{x}$ โดยที่ $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $-\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงลบ
 - ถ้า $x = 0$ แล้วจะมีจำนวนจริงจำนวนเดียว คือ 0 เป็นรากที่สองของ x นั่นคือ $\sqrt{0} = 0$
 - ถ้า $x < 0$ แล้วจะไม่มีรากที่สองของ x ที่เป็นจำนวนจริง
- ดังนั้น $\sqrt{x} = y$ เมื่อ $x \geq 0$ หมายความว่า $y^2 = x$ และ $y \geq 0$

6. ทฤษฎีบท 2

ให้ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ จะได้ $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

7. ทฤษฎีบท 3

ให้ $x \geq 0$ และ $y > 0$ จะได้ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

8. บทนิยาม 3

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1
 y เป็นรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$

หมายเหตุ

ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว รากที่ n ของ x ที่เป็นจำนวนจริง จะมีรากเดียว

และถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว เมื่อ $x > 0$ รากที่ n ของ x ที่เป็นจำนวนจริง จะมีสองราก

9. บทนิยาม 4

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ

- 1) y เป็นรากที่ n ของ x และ
- 2) $xy \geq 0$

แทนค่าหลักของรากที่ n ของ x ด้วย $\sqrt[n]{x}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ n ของ x หรือ ค่าหลักของรากที่ n ของ x

หมายเหตุ

- 1) การระบุกรณฑ์ที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ทำได้โดยการเขียน n ทางด้านซ้ายของเครื่องหมายกรณฑ์ ดังนี้ $\sqrt[n]{}$ และจะเรียก n ว่าเป็น **อันดับที่** หรือ **ดัชนี** ของกรณฑ์ แต่ถ้า $n=2$ นิยมเขียน $\sqrt{}$ แทน $\sqrt[2]{}$

- 2) จากบทนิยาม 4 จะได้ว่า ถ้า y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x แล้ว x และ y เป็นจำนวนจริงบวกทั้งคู่ หรือเป็นจำนวนจริงลบทั้งคู่ หรือเป็นศูนย์ทั้งคู่

10. ทฤษฎีบท 4

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n จะได้ $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

11. ทฤษฎีบท 5

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n และ $y \neq 0$ จะได้ $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

หมายเหตุ

- 1) ถ้า $x < 0$ หรือ $y < 0$ แล้วจะใช้ทฤษฎีบท 4 และ 5 ได้ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวกเท่านั้น
- 2) ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนคี่บวกแล้ว $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$
- 3) ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้ว
 - $\sqrt[n]{x^n} = x$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่
 - $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

12. บทนิยาม 5

ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ถ้า a มีรากที่ n แล้ว $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

13. จากบทนิยาม 5 ถ้า $a \geq 0$ แล้วหา $a^{\frac{1}{n}}$ ได้เสมอ

แต่ถ้า $a < 0$ แล้วจะหา $a^{\frac{1}{n}}$ ได้เฉพาะกรณีที่ n เป็นจำนวนคี่

14. บทนิยาม 6

ให้ a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ และ r เป็นจำนวนตรรกยะที่ $r = \frac{p}{q}$ โดย p และ

q เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $q > 0$ และ ห.ร.ม. ของ p และ q เป็น 1

ถ้า $a^{\frac{1}{q}}$ เป็นจำนวนจริง แล้ว $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$

หมายเหตุ

- 1) เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะจะนิยามเมื่อเลขชี้กำลังเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำเท่านั้นและ $a^{\frac{1}{q}}$ ต้องเป็นจำนวนจริง
- 2) ในกรณีที่ $a=0$ และ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก สามารถนิยาม $0^r=0$ แต่จะไม่นิยาม 0^r เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะลบหรือศูนย์

15. ทฤษฎีบท 6

ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ a^m, a^n และ b^n เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$1) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3) \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$4) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$5) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

16. การคิดดอกเบี้ยทบต้นเป็นกลไกที่นำดอกเบี้ยที่ได้รับทบเข้าไปกับเงินต้น ทำให้เงินต้นใหม่มียอดสูงขึ้น ดังนั้น เมื่อคิดดอกเบี้ยรอบใหม่ ดอกเบี้ยก็จะสูงขึ้น และเมื่อทบเข้าไปกับเงินต้นใหม่จะทำให้มีมูลค่าเงินสูงขึ้นเรื่อย ๆ

17. ทฤษฎีบท 7

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี (ปีละครั้ง) แล้วเมื่อสิ้นปีที่ n จะได้ เงินรวม $P(1+r)^n$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

1.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ในการนำเข้าสู่บทเรียนนี้ ครูอาจกระตุ้นความสนใจของนักเรียนโดยการยกตัวอย่างการนำเลขยกกำลังไปใช้ในชีวิตจริง เช่น การระบาดของโรคไวรัสอีโบล่าในแอฟริกาตะวันตกเมื่อ พ.ศ. 2557 ซึ่งเป็นการเกริ่นนำที่นำเสนอไว้ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยความรู้ดังกล่าวอาจนำเลขยกกำลังมาช่วยในการอธิบายการเพิ่มจำนวนของผู้ติดเชื้อ กล่าวคือ จำนวนผู้ติดเชื้อเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า ทุก ๆ 24.3 วัน ถ้ากลางเดือนกรกฎาคม พ.ศ. 2557 มีผู้ติดเชื้อประมาณ 1,000 คน เมื่อเวลาผ่านไปทุก 24.3 วัน จะมีจำนวนผู้ติดเชื้อประมาณ

1000, 2(1000), 4(1000), 8(1000), 16(1000), 32(1000), 64(1000), ...

หรืออาจกล่าวได้ว่าจำนวนผู้ติดเชื้อหาได้จาก $2^n (1,000)$ เมื่อ n แทนระยะเวลาที่ผ่านไป โดยเป็นพหุคูณของ 24.3 วัน ในกรณีที่นักเรียนยังไม่เข้าใจการเพิ่มขึ้นของจำนวนผู้ติดเชื้อ ครูอาจแสดงจำนวนผู้ติดเชื้อดังตารางต่อไปนี้

รอบที่	จำนวนผู้ติดเชื้อโดยประมาณ (คน)
0	$2^0 (1,000) = 1,000$
1	$2^1 (1,000) = 2(1,000)$
2	$2^2 (1,000) = 4(1,000)$
3	$2^3 (1,000) = 8(1,000)$
4	$2^4 (1,000) = 16(1,000)$
5	$2^5 (1,000) = 32(1,000)$
6	$2^6 (1,000) = 64(1,000)$
$\vdots$	$\vdots$
n	$2^n (1,000)$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มมาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เนื้อหาส่วนนี้ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีไว้เพื่อทบทวนเรื่องดังกล่าว และเพื่อเชื่อมโยงไปสู่เรื่องเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ซึ่งเป็นเนื้อหาสำคัญในบทนี้



กิจกรรม : จับคู่เลขยกกำลัง

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อทบทวนหรือตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3–4 คน แบบคณะกรรมการ จากนั้นครูเขียนเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มต่อไปนี้บนกระดาน

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$	$\left(\frac{6}{3}\right)^3$	$\frac{2 \times (2^5 \times 2^2)}{2^3}$
$2^6 \times 2^{-3}$	4^2	$\frac{1}{2^{-5}}$
$\frac{2^{12}}{2^8}$	$16 \times \left(\frac{32}{2^4}\right)$	$\frac{2^6}{8}$
$\frac{2^{15}}{2^{10}}$	$\frac{128}{8}$	$\frac{2^{99}}{2^{96}}$
$2^4 \left(\frac{128}{2^6}\right)$	$\frac{8^2}{2 \times 4}$	$\frac{1024}{4^3}$
$\frac{2 \times 4 \times 8}{2^3}$	$\frac{2^5}{4 \times 8 \times 2^{-4}}$	$\frac{2^{10}}{32}$
$128 \times 256 \times 2^{-12}$	$\frac{(2^2)^5}{2^5}$	$\frac{4^5}{(2^3)^2}$

2. ครูให้นักเรียนในกลุ่มจับคู่เลขยกกำลังที่เป็นจำนวนเดียวกัน
3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการจับคู่เลขยกกำลังที่ได้ในข้อ 2 ทั้งนี้ ในการอภิปรายครูควรใช้คำถามถึงวิธีการที่นักเรียนใช้ในการจับคู่เลขยกกำลัง ซึ่งนักเรียนอาจทำเลขยกกำลังที่กำหนดให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

หมายเหตุ

- ครูอาจเปลี่ยนเลขยกกำลังที่เขียนบนกระดานเป็นเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มอื่น ๆ และสามารถเพิ่มหรือลดจำนวนเลขยกกำลังที่เขียนบนกระดาน
- ครูอาจปรับกิจกรรมนี้โดยใช้เทคโนโลยี เช่น Kahoot เป็นเครื่องมือช่วยในการทำกิจกรรม ซึ่งจะช่วยให้สามารถตรวจสอบความเข้าใจเกี่ยวกับเลขยกกำลังของนักเรียนได้เป็นรายบุคคล



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การเขียนเลขยกกำลังให้อยู่ในรูปอย่างง่ายในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นการเขียนให้เลขยกกำลังทุกจำนวนมี ห.ร.ม. ของฐานเป็น 1 โดยไม่ต้องคำนวณผลลัพธ์ เช่น
 - o ตัวอย่างที่ 2 เขียน $\left(\frac{6}{5}\right)^3 \times 10^5$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกได้เป็น $3^3 \times 2^8 \times 5^2$
 - o ตัวอย่างที่ 3 เขียน $\frac{6^3 \times 3^2}{2^4 \times 3^{-2}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกได้เป็น $\frac{3^7}{2}$

- การเขียนเลขยกกำลังให้อยู่ในรูปอย่างง่ายสามารถทำได้หลายวิธี ครูไม่ควรกำหนดให้นักเรียนใช้วิธีใดวิธีหนึ่งเท่านั้น แต่ควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลงมือหาคำตอบโดยใช้บทนิยาม 1 และทฤษฎีบท 1 ดังเช่นในตัวอย่างที่ 4 ข้อ 2) นักเรียนอาจแสดงการเขียน $(x^{-3}y^{-2}z^0)^{-2}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(x^{-3}y^{-2}z^0)^{-2} &= \left(\frac{1}{x^3y^2}\right)^{-2} \\ &= \left((x^3y^2)^{-1}\right)^{-2} \\ &= (x^3y^2)^2 \\ &= (x^3)^2(y^2)^2 \\ &= x^6y^4\end{aligned}$$

ทั้งนี้ ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบการแสดงวิธีทำในแต่ละขั้น

รากที่ n ของจำนวนจริง

นักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับรากที่สองและกรณีที่สองของจำนวนจริงบวก และการดำเนินการของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณีที่สองมาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เนื้อหาเรื่องดังกล่าวในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีไว้เพื่อเป็นการทบทวน และเชื่อมโยงไปสู่เรื่อง รากที่ n ของจำนวนจริง



กิจกรรม : บิงโก

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อทบทวนหรือตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับรากที่สองของจำนวนจริงบวก กรณีที่สองของจำนวนจริงบวก และการดำเนินการของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณีที่สอง

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูทำบัตรข้อความจำนวน 20 ใบ แต่ละบัตรมีข้อความเกี่ยวกับรากที่สองและกรณีที่สองของจำนวนเต็มบวก บัตรละ 1 ข้อความที่ไม่ซ้ำกัน ดังนี้

รากที่สองที่เป็นจำนวนจริงลบของ 25

รากที่สองที่เป็นจำนวนจริงบวกของ 144

รากที่สองของ 81

รากที่สองของ 121

กรณีที่สองของ 100

รากที่สองของ 9

$$\sqrt{32} \times \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3} - \sqrt{48}}$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{169}$$

$$-\sqrt{49}$$

รากที่สองของ 16

รากที่สองที่เป็นจำนวนจริงลบของ 64

รากที่สองที่เป็นจำนวนจริงบวกของ 49

กรณีที่สองของ 1

รากที่สองที่เป็นจำนวนจริงลบของ 4

$$\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{3})$$

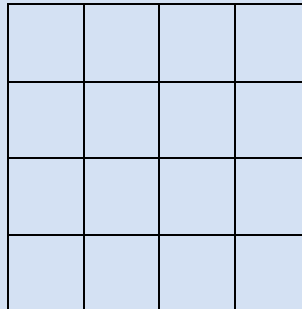
$$2\sqrt{6}(3\sqrt{6} - 2\sqrt{24})$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$$

$$-\sqrt{100}$$

$$\sqrt{(-11)^2}$$

2. ครูให้นักเรียนแต่ละคนสร้างตารางบิงโกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 4×4 ดังรูป



แล้วให้นักเรียนเลือกจำนวน 16 จำนวน จากจำนวนเต็มตั้งแต่ -12 ถึง 12 เพื่อเติมในตารางดังกล่าว โดยไม่ใช่จำนวนที่ซ้ำกัน

3. ครูสุ่มบัตรข้อความในข้อ 1 มา 1 ใบ แล้วแสดงบัตรข้อความให้นักเรียนดู จากนั้นให้นักเรียนหว่าจำนวนในบัตรข้อความคือจำนวนใด

4. ครูเลือกนักเรียนเพื่อบอกคำตอบและให้เหตุผลประกอบคำตอบ โดยให้นักเรียนทุกคนในชั้นเรียนร่วมกันตรวจสอบคำตอบ ในขั้นตอนนี้ครูสามารถทราบความรู้พื้นฐานที่นักเรียนมีเกี่ยวกับรากที่สองและเกณฑ์ที่สองของจำนวนเต็มบวก และการดำเนินการของจำนวนที่อยู่ในรูปเกณฑ์ที่สองได้
5. ถ้าตารางบิงโกของนักเรียนมีจำนวนที่เป็นคำตอบ ให้นักเรียนทำเครื่องหมายกากบาทจำนวนนั้น
6. ครูและนักเรียนทำซ้ำขั้นตอนที่ 3–5 จนกระทั่งมีนักเรียนบิงโก

หมายเหตุ

- ครูอาจแนะนำกติกาของบิงโกให้นักเรียนเข้าใจก่อนเริ่มทำกิจกรรมนี้ เช่น การบิงโก คือ นักเรียนมีเครื่องหมายกากบาทเรียงกันทุกช่องในแนวดิ่ง แนวนอน หรือแนวทแยง ของตารางบิงโก
- ครูอาจให้นักเรียนทำกิจกรรมนี้หลายรอบได้ตามความเหมาะสม
- ครูอาจเปลี่ยนบัตรข้อความหรือจำนวนที่ให้นักเรียนเติมลงในตารางบิงโก โดยจำนวนที่ให้นักเรียนเติมต้องสอดคล้องกับบัตรข้อความ



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- การเขียนจำนวนที่อยู่ในรูปเกณฑ์ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นการเขียนให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์ และไม่มีจำนวนเต็มที่หารจำนวนที่อยู่ในรูปเกณฑ์ได้ลงตัว หากเลขชี้กำลังเหมือนกันต้องดำเนินการตามทฤษฎีบท 4 และ 5 ให้เรียบร้อยก่อน โดยไม่ต้องคำนวณผลลัพธ์ เช่น ตัวอย่างที่ 7 ข้อ 1) มีขั้นตอนการเขียน $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย คือ

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3 \times 6} = \sqrt{3 \times 3 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

จะเห็นว่า ไม่มีจำนวนเต็มใดที่ไม่ใช่ 1 ที่หาร $\sqrt{2}$ ได้ลงตัว

ดังนั้น รูปอย่างง่ายของ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ คือ $3\sqrt{2}$

- ในการสอนบทนิยาม 3 ครูควรเน้นย้ำหมายเหตุท้ายบทนิยาม พร้อมให้เหตุผลและยกตัวอย่างประกอบว่า
 - กรณีที่ n เป็นจำนวนคี่ จะสามารถหารากที่ n ของ x ได้ สำหรับทุกจำนวนจริง x และรากที่ n ของ x ที่เป็นจำนวนจริงมีเพียงรากเดียว เช่น จากตัวอย่างที่ 8 ข้อ 3) จะเห็นว่า $-243 = (-3)^5$ เนื่องจาก 5 เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า รากที่ 5 ของ -243 ที่เป็นจำนวนจริงมีรากเดียว คือ -3
 - กรณีที่ n เป็นจำนวนคู่
 - เมื่อ $x > 0$ จะสามารถหารากที่ n ของ x ที่เป็นจำนวนจริงได้สองราก นั่นคือ ถ้า y เป็นรากที่ n ของ x แล้ว จะได้ $x = y^n = (-y)^n$ ดังนั้น รากที่ n ของ x ที่เป็นจำนวนจริง มีสองราก คือ y และ $-y$ เช่น จากตัวอย่างที่ 8 ข้อ 1) และ 2) จะเห็นว่า $16 = 2^4 = (-2)^4$ ดังนั้น รากที่ 4 ของ 16 ที่เป็นจำนวนจริงมีสองราก คือ 2 และ -2
 - เมื่อ $x = 0$ จะสามารถหารากที่ n ของ x ได้รากเดียว คือ 0
 - เมื่อ $x < 0$ จะไม่สามารถหารากที่ n ของ x ที่เป็นจำนวนจริงได้

ค่าหลักของรากที่ n



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรเน้นย้ำความแตกต่างระหว่างรากที่ n (ตามบทนิยาม 3) กับค่าหลักของรากที่ n (ตามบทนิยาม 4) ว่าค่าหลักของรากที่ n ของ x มีได้เพียงค่าเดียว โดยอาจยกตัวอย่างที่ 10 ข้อ 1) ประกอบ เพื่อให้นักเรียนเห็นว่ารากที่ 4 ของ 16 มีสองจำนวน คือ 2 และ -2 แต่ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 16 มีเพียงจำนวนเดียว คือ 2

- ในการสอนหมายเหตุข้อ 3 ท้ายทฤษฎีบท 5 ซึ่งกล่าวว่า
 3. ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1 แล้ว
 - 1) $\sqrt[n]{x^n} = x$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่
 - 2) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

ครูอาจอธิบายเพิ่มเติมว่า “ $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่” สามารถเขียนได้เป็น “ $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่”



ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

- นักเรียนมักเข้าใจผิดว่า รากที่ n ของ x มีความหมายเช่นเดียวกับ $\sqrt{x}$ แต่ในความเป็นจริงแล้ว รากที่ n ของ x คือ $\sqrt[n]{x}$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคี่ หรือ n เป็นจำนวนคู่ และ $x=0$ แต่สำหรับกรณีที่ n เป็นจำนวนคู่ และ $x>0$ จะได้ว่ารากที่ n ของ x มีสองจำนวน คือ $\sqrt[n]{x}$ และ $-\sqrt[n]{x}$ ซึ่ง $\sqrt[n]{x}$ เป็นเพียงรากหนึ่งของรากที่ n ของ x

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในการสอนบทนิยาม 5 ครูควรเน้นย้ำว่า ถ้า $a \geq 0$ แล้วหา $a^{\frac{1}{n}}$ ได้เสมอ แต่ถ้า $a < 0$ แล้วจะหา $a^{\frac{1}{n}}$ ที่เป็นจำนวนจริงได้เฉพาะกรณีที่ n เป็นจำนวนคี่ นอกจากนี้ครูควรระมัดระวังในการยกตัวอย่างเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะไม่ให้ขัดกับบทนิยามดังกล่าว

- เลขยกกำลังที่อยู่ในรูป $a^{\frac{p}{q}}$ ตามบทนิยาม 6 มีเงื่อนไขสำคัญคือ ห.ร.ม. ของ p และ q เป็น 1 และ $a^{\frac{1}{q}}$ ต้องเป็นจำนวนจริง ซึ่งครูต้องเน้นย้ำให้นักเรียนตรวจสอบเงื่อนไขดังกล่าวก่อนเสมอ เช่น เมื่อพิจารณา $(-8)^{\frac{14}{6}}$ จะเห็นว่า ห.ร.ม. ของ 14 และ 6 ไม่เป็น 1 จึงต้องทำ $\frac{14}{6}$ ให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำก่อน ได้เป็น $\frac{7}{3}$ ซึ่ง $(-8)^{\frac{1}{3}}$ เป็นจำนวนจริง ทำให้ได้ว่า

$$(-8)^{\frac{14}{6}} = (-8)^{\frac{7}{3}} = \left((-8)^{\frac{1}{3}} \right)^7 = (-2)^7 = -128$$

แต่เมื่อพิจารณา $(-9)^{\frac{6}{4}}$ จะเห็นว่า ห.ร.ม. ของ 6 และ 4 ไม่เป็น 1 จึงต้องทำ $\frac{6}{4}$ ให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำก่อน ได้เป็น $\frac{3}{2}$ ซึ่ง $(-9)^{\frac{1}{2}}$ ไม่เป็นจำนวนจริง ดังนั้น จึงไม่นิยาม $(-9)^{\frac{6}{4}}$

- ในการแก้โจทย์ปัญหาในหัวข้อนี้ ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้เทคโนโลยีเป็นเครื่องมือช่วยในการคำนวณ



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

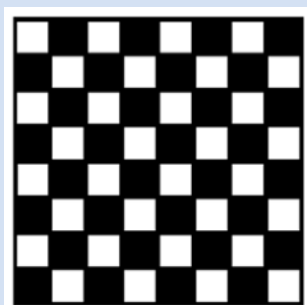
- ในการเขียนแสดงจำนวนให้อยู่ในรูปอย่างง่ายในแบบฝึกหัด 1.3 ข้อ 3 อาจเขียนในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริงบวกหรือในรูปกรณฑ์ก็ได้ เช่น ข้อ 12) อาจเขียนได้เป็น $2\left(3^{\frac{1}{3}}\right)$ หรือ $2\sqrt[3]{3}$

1.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน



กิจกรรม : ปัญหาพระราชา

ตามตำนานอินเดียโบราณ Sissa Ben Dahir เป็นขุนนางของพระราชา Shirham โดย Sissa ได้คิดค้นเกมที่ใช้เล่นบนกระดาน ซึ่งเรียกว่า “หมากรุก” ขึ้น



กระดานหมากรุก ขนาด 8×8

พระราชาดัดสินใจที่จะให้รางวัล Sissa สำหรับความทุ่มเทของเขา พระราชาก็ได้ตรัสถาม Sissa ว่าต้องการสิ่งใดเป็นรางวัล Sissa ได้คิดอย่างรอบคอบและขอสิ่งต่อไปนี้จากพระราชา

- ข้าว 1 เมล็ด สำหรับช่องที่ 1 ของกระดานหมากรุก
- ข้าว 2 เมล็ด สำหรับช่องที่ 2 ของกระดานหมากรุก
- ข้าว 4 เมล็ด สำหรับช่องที่ 3 ของกระดานหมากรุก
- ข้าว 8 เมล็ด สำหรับช่องที่ 4 ของกระดานหมากรุก
- ข้าว 16 เมล็ด สำหรับช่องที่ 5 ของกระดานหมากรุก

และเพิ่มเมล็ดข้าวในรูปแบบเดียวกันนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนครบทั้ง 64 ช่อง

พระราชาทรงตรัสว่า นี่คือคำขอที่เล็กน้อยมาก และตกลงจะมอบรางวัลให้ตามที่ Sissa ขอ

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. เติมจำนวนเมล็ดข้าวลงในตารางให้สมบูรณ์

กระดานหมากรุกช่องที่	จำนวนเมล็ดข้าว	จำนวนเมล็ดข้าวสะสม
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

2. ใช้ข้อมูลจากตารางในข้อ 1 เขียนแสดงจำนวนเมล็ดข้าวสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ n ในรูปเลขยกกำลัง
3. พระราชาต้องหาเมล็ดข้าวจำนวนเท่าใดสำหรับช่องกระดานช่องสุดท้ายของกระดานหมากรุก
4. ใช้ข้อมูลจากตารางในข้อ 1 เขียนแสดงจำนวนเมล็ดข้าวสะสมช่องที่ 1 จนถึงช่องที่ n ในรูปเลขยกกำลัง
5. จำนวนเมล็ดข้าวที่ Sissa จะได้รับทั้งหมดเป็นเท่าใด
6. ถ้าเมล็ดข้าว 1 เมล็ดหนัก 0.000008 กิโลกรัมโดยประมาณแล้ว จงหาน้ำหนักรวมของเมล็ดข้าวทั้งหมดที่ Sissa ขอลจากพระราชา
7. ถ้าในแต่ละปีมีผลผลิตข้าวในโลกรวมทั้งหมดประมาณ 580 ล้านตัน แล้วจะต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่ปี จึงจะมีจำนวนเมล็ดข้าวครบตามที่ Sissa ขอลจากพระราชา (1 ตัน เท่ากับ 1,000 กิโลกรัม)



เฉลยกิจกรรม : ปัญหาพระราช

1.

กระดานหมากรุกช่องที่	จำนวนเมล็ดข้าว	จำนวนเมล็ดข้าวสะสม
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31
6	32	63
7	64	127
8	128	255
9	256	511
10	512	1023

2. จากข้อมูลในตารางในข้อ 1 และการสังเกต จะได้ว่า

จำนวนเมล็ดข้าวสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ 1 คือ $1 = 2^0 = 2^{1-1}$ เมล็ดจำนวนเมล็ดข้าวสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ 2 คือ $2 = 2^1 = 2^{2-1}$ เมล็ดจำนวนเมล็ดข้าวสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ 3 คือ $4 = 2^2 = 2^{3-1}$ เมล็ด
$$\vdots \quad \vdots$$
จำนวนเมล็ดข้าวสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ n คือ 2^{n-1} เมล็ดดังนั้น จำนวนเมล็ดข้าวสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ n ในรูปเลขยกกำลัง คือ 2^{n-1}

หมายเหตุ คำตอบในข้อนี้ได้จากการสังเกต

3. เนื่องจาก ช่องกระดานช่องสุดท้ายของกระดานหมากรุก คือ ช่องที่ 64

จะได้ จำนวนเมล็ดข้าวสำหรับช่องกระดานช่องสุดท้ายของกระดานหมากรุก คือ

$$2^{64-1} = 2^{63} = 9,223,372,036,854,775,808 \text{ เมล็ด}$$

ดังนั้น พระราชาต้องหาเมล็ดข้าว 2^{63} หรือ 9,223,372,036,854,775,808 เมล็ด สำหรับช่องกระดานช่องสุดท้ายของกระดานหมากรุก

4. จากข้อมูลในตารางในข้อ 1 และการสังเกต จะได้ว่า

จำนวนเมล็ดข้าวสาลีสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ 1 คือ $1 = 2 - 1 = 2^1 - 1$ เมล็ด

จำนวนเมล็ดข้าวสาลีสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ 2 คือ $3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$ เมล็ด

จำนวนเมล็ดข้าวสาลีสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ 3 คือ $7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$ เมล็ด

⋮ ⋮

จำนวนเมล็ดข้าวสาลีสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ n คือ $2^n - 1$ เมล็ด

ดังนั้น จำนวนเมล็ดข้าวสาลีสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ n ในรูปเลขยกกำลัง คือ $2^n - 1$

หมายเหตุ คำตอบในข้อนี้ได้จากการสังเกต โดยไม่ต้องใช้ความรู้เรื่องอนุกรม

5. เนื่องจาก จำนวนเมล็ดข้าวที่ Sissa จะได้รับทั้งหมด คือ จำนวนเมล็ดข้าวสาลีสำหรับกระดานหมากรุกช่องสุดท้ายซึ่งคือช่องที่ 64

โดยจำนวนเมล็ดข้าวสาลีสำหรับช่องกระดานช่องสุดท้ายของกระดานหมากรุก คือ

$$2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615 \text{ เมล็ด}$$

ดังนั้น จำนวนเมล็ดข้าวที่ Sissa จะได้รับทั้งหมด คือ $2^{64} - 1$ หรือ

$$18,446,744,073,709,551,615 \text{ เมล็ด}$$

6. เนื่องจาก จำนวนเมล็ดข้าวที่ Sissa จะได้รับทั้งหมด คือ 18,446,744,073,709,551,615 เมล็ด และเมล็ดข้าว 1 เมล็ดหนัก 0.000008 กิโลกรัมโดยประมาณ

จะได้ว่า น้ำหนักรวมของเมล็ดข้าวทั้งหมดที่ Sissa ขอจากพระราชา คือ

$$18,446,744,073,709,551,615 \times 0.000008 \text{ กิโลกรัม}$$

7. เนื่องจาก น้ำหนักรวมของเมล็ดข้าวทั้งหมดที่ Sissa ขอจากพระราชา

$$\text{คือ } 18,446,744,073,709,551,615 \times 0.000008 \text{ กิโลกรัม}$$

$$\text{หรือ } \frac{18,446,744,073,709,551,615 \times 0.000008}{1,000} \text{ ตัน}$$

$$\text{หรือประมาณ } 147,573.952589676 \text{ ล้านตัน}$$

และในแต่ละปีมีผลผลิตข้าวในโลกรวมทั้งหมดประมาณ 580 ล้านตัน

$$\text{ดังนั้น จะต้องใช้เวลาอย่างน้อย } \frac{147,573.952589676}{580} \approx 255 \text{ ปี} \text{ จึงจะมีจำนวนเมล็ดข้าว}$$

ครบตามที่ Sissa ขอจากพระราชา



แนวทางการจัดกิจกรรม : ปัญหาพระราชฯ

เวลาในการจัดกิจกรรม 30 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนใช้ความรู้ เรื่อง เลขยกกำลัง เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม “ปัญหาพระราชฯ”
2. เครื่องคำนวณ

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบความสะดวกสามารถ
2. ครูแจกใบกิจกรรมปัญหาพระราชฯ ให้กับนักเรียนทุกคนแล้วให้นักเรียนศึกษาข้อมูลในใบกิจกรรมก่อนนำอภิปรายเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาเพื่อให้นักเรียนทุกคนเข้าใจตรงกัน
3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 1 – 7 ในใบกิจกรรม โดยให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณตามความเหมาะสม ในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรมครูควรเดินดูนักเรียนให้ทั่วถึงทุกกลุ่มและคอยชี้แนะ
4. ครูสุ่มเลือกกลุ่มนักเรียนเพื่อตอบคำถาม และให้นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบ รวมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบคำตอบ
5. ครูนำนักเรียนอภิปรายเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปของกิจกรรมนี้เกี่ยวกับการเพิ่มขึ้นอย่างทวีคูณของเลขยกกำลัง

1.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีเป้าหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 1 เลขยกกำลัง ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม	1.1	ข้อ 1 – 3
รากที่ n ของจำนวนจริง และค่าหลักของรากที่ n	1.2	ข้อ 1
จำนวนจริงในรูปกรณฑ์ สมบัติของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ และการหาผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์	1.2	ข้อ 2 – 5
เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และการบวก ลบ คูณ และหารเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	1.3	ข้อ 1 – 5
การประยุกต์ของเลขยกกำลัง	1.3	ข้อ 6 – 11

1.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีจุดมุ่งหมายว่า เมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 1 เลขยกกำลัง แล้วนักเรียนสามารถ

1. หารากที่ n ของจำนวนจริง เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ในการแก้ปัญหา
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย นอกจากนี้มีโจทย์ฝึกทักษะที่น่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 บทที่ 1 เลขยกกำลัง สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หารากที่ n ของจำนวนจริง เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1	3	1) – 4)
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์ในการแก้ปัญหา	5	1) – 13)
	6	1) – 2)
	7	1) – 4)
	8	1) – 2), 7)*
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะในการแก้ปัญหา	1	1) – 4)
	2	1) – 6)
	4	1) – 12)
	5	14)
	6	3) – 6)
	8	3) – 6), 7)*

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะในการแก้ปัญหา (ต่อ)	9	
	10	
	11	
	12	
	13	
	14	1) – 2)
	15	
	16	1) – 2)

หมายเหตุ

แบบฝึกหัดท้ายบทข้อ 8. 7) สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียนมากกว่า 1 จุดมุ่งหมาย

1.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

- ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเรื่องเลขยกกำลัง ที่ไม่ได้แสดงการพิสูจน์ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 บทที่ 1 เลขยกกำลัง แสดงการพิสูจน์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1

ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$1) \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$2) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3) \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$4) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$5) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

พิสูจน์

- 1) ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad a^m \times a^n &= \underbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}_{m \text{ ตัว}} \underbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ ตัว}} \\ &= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m+n \text{ ตัว}} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad a^m \times a^n = a^{m+n}$$

- 2) ให้ a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } (a^m)^n &= \underbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}_{m \text{ ตัว}}^n \\
 &= \underbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)(a \times a \times a \times \cdots \times a) \cdots (a \times a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ วงเล็บ}} \\
 &= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}_{mn \text{ ตัว}} \\
 &= a^{mn}
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (a^m)^n = a^{mn}$$

- 3) ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } (a \times b)^n &= \underbrace{(a \times b)(a \times b) \cdots (a \times b)}_{n \text{ วงเล็บ}} \\
 &= a \times a \times a \times \cdots \times a \times b \times b \times b \times \cdots \times b \\
 &= \underbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ ตัว}} \times \underbrace{(b \times b \times b \times \cdots \times b)}_{n \text{ ตัว}} \\
 &= a^n \times b^n
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

- 4) ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ วงเล็บ}} \\
 &= \left(a \times \frac{1}{b}\right)\left(a \times \frac{1}{b}\right)\cdots\left(a \times \frac{1}{b}\right) \\
 &= a \times a \times a \times \cdots \times a \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{b} \times \cdots \times \frac{1}{b} \\
 &= \underbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ ตัว}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{b} \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{b} \times \cdots \times \frac{1}{b}\right)}_{n \text{ ตัว}} \\
 &= \underbrace{(a \times a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ ตัว}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{b \times b \times b \times \cdots \times b}\right)}_{n \text{ ตัว}} \\
 &= a^n \times \frac{1}{b^n} \\
 &= \frac{a^n}{b^n}
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- 5) ให้ a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม
แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณี $m = n$

$$\text{จะได้} \quad a^m = a^n$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{a^m}{a^n} = 1$$

กรณี $m > n$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad \frac{a^m}{a^n} &= \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{m \text{ ตัว}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_n} \\
 &= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m-n \text{ ตัว}} \quad \text{โดยที่ } m-n \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \\
 &= a^{m-n}
 \end{aligned}$$

กรณี $m < n$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad \frac{a^m}{a^n} &= \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{m \text{ ตัว}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_n} \\
 &= \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n-m \text{ ตัว}}} \quad \text{โดยที่ } n-m \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \\
 &= \frac{1}{a^{n-m}}
 \end{aligned}$$

จากทั้งสามกรณีข้างต้นสรุปได้ว่า

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} 1 & ; m = n \\ a^{m-n} & ; m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & ; m < n \end{cases}$$

จากบทนิยาม 1

$$a^0 = 1 \quad \text{เมื่อ } a \neq 0$$

และ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ $a \neq 0$

จะได้ว่า $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^0 & ; m-n=0 \\ a^{m-n} & ; m-n>0 \\ \frac{1}{a^{-(m-n)}} & ; m-n<0 \end{cases}$

$= \begin{cases} a^{m-n} & ; m-n=0 \\ a^{m-n} & ; m-n>0 \\ a^{m-n} & ; m-n<0 \end{cases}$

ดังนั้น $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ทฤษฎีบท 2

ให้ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ จะได้

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

พิสูจน์

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$

จะได้ $\sqrt{x}$ และ $\sqrt{y}$ เป็นจำนวนจริง

ให้ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a = \sqrt{x}$ นั่นคือ $a^2 = x$

และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $b = \sqrt{y}$ นั่นคือ $b^2 = y$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad xy &= a^2 b^2 \\ &= (ab)^2 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad ab = \sqrt{xy}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

ทฤษฎีบท 3

ให้ $x \geq 0$ และ $y > 0$ จะได้

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

พิสูจน์

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x \geq 0$ และ $y > 0$

จะได้ $\sqrt{x}$ และ $\sqrt{y}$ เป็นจำนวนจริง

ให้ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a = \sqrt{x}$ นั่นคือ $a^2 = x$

และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $b = \sqrt{y}$ นั่นคือ $b^2 = y, y \neq 0$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad \frac{x}{y} &= \frac{a^2}{b^2} \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^2\end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

ทฤษฎีบท 4

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n จะได้

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

พิสูจน์

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง โดยที่ x และ y มีรากที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

ให้ a เป็นจำนวนจริง และเป็นรากที่ n ของ x

นั่นคือ $a = \sqrt[n]{x}$ ดังนั้น $a^n = x$

ให้ b เป็นจำนวนจริง และเป็นรากที่ n ของ y

นั่นคือ $b = \sqrt[n]{y}$ ดังนั้น $b^n = y$

จะได้ $xy = a^n b^n = (ab)^n$

ดังนั้น $ab = \sqrt[n]{xy}$

สรุปได้ว่า $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

ทฤษฎีบท 5

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n และ $y \neq 0$ จะได้

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

พิสูจน์

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง โดยที่ x และ y มีรากที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

ให้ a เป็นจำนวนจริง และเป็นรากที่ n ของ x

นั่นคือ $a = \sqrt[n]{x}$ ดังนั้น $a^n = x$

ให้ b เป็นจำนวนจริง และเป็นรากที่ n ของ y

นั่นคือ $b = \sqrt[n]{y}$ ดังนั้น $b^n = y, y \neq 0$

จะได้ $\frac{x}{y} = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

ดังนั้น $\frac{a}{b} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

สรุปได้ว่า $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

ทฤษฎีบท 6

ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ a^m, a^n และ b^n เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$1) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3) \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$4) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$5) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์เป็นไปในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1

1.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 1 เลขยกกำลัง สำหรับรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

- จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและเลขยกกำลังทุกจำนวนมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก
 - $5^2 \times 5^{-3}$
 - $\frac{3^2}{3^{-2}}$
- จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย
 - $(\sqrt[3]{25} \times \sqrt{2})^6$
 - $16^{-\frac{3}{2}}$
 - $\left(\frac{1}{128}\right)^{-\frac{5}{7}}$
 - $\sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$
- จงพิจารณาว่า $16^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{4^2}$, 2^4 และ $\sqrt{16}$ จำนวนใดเป็นจำนวนเดียวกัน
- จงหาค่าหลักของรากที่สองของ $5 + \sqrt{24}$
- กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย และด้านประกอบมุมฉากยาว $\sqrt{75}$ และ a หน่วย จงหา a
- ต้องการขุดบ่อน้ำให้เป็นทรงกระบอกที่สามารถจุน้ำได้ 2,200 ลูกบาศก์เมตร จงหาความยาวที่เป็นไปได้ของรัศมีของกันบ่อน้ำและความลึกของบ่อน้ำ เมื่อกำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$
- อ่างเก็บน้ำแห่งหนึ่งเป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความจุ 8.64×10^6 ลูกบาศก์เมตร และวัดพื้นที่บริเวณที่เป็นอ่างเก็บน้ำได้ 4.8×10^6 ตารางเมตร จงหาความลึกของอ่างเก็บน้ำนี้
- ธนาคารแห่งหนึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 1% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นเป็นรายปี ถ้ายุพาและยุพินฝากเงินในธนาคารดังกล่าว โดยมีเงื่อนไขดังนี้
 - ยุพาฝากเงิน 10,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน เป็นเวลา 10 ปี
 - ยุพินฝากเงิน 20,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน เป็นเวลา 5 ปี
 จงหาว่าเมื่อครบกำหนดการฝากเงินแล้ว ยุพาหรือยุพินจะได้รับดอกเบี้ยมากกว่ากัน

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

$$1. \quad 1) \quad 5^2 \times 5^{-3} = 5^{2+(-3)} = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$2) \quad \frac{3^2}{3^{-2}} = 3^{2-(-2)} = 3^{2+2} = 3^4 = 81$$

$$2. \quad 1) \quad \left(\sqrt[3]{25} \times \sqrt{2} \right)^6 = \left(25^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} \right)^6$$

$$= 25^{\frac{6}{3}} \times 2^{\frac{6}{2}}$$

$$= 25^2 \times 2^3$$

$$= 625 \times 8$$

$$= 5,000$$

$$2) \quad 16^{-\frac{3}{2}} = \left(16^{\frac{1}{2}} \right)^{-3}$$

$$= 4^{-3}$$

$$= \frac{1}{4^3}$$

$$= \frac{1}{64}$$

$$3) \quad \left(\frac{1}{128} \right)^{-\frac{5}{7}} = 128^{\frac{5}{7}}$$

$$= \left(128^{\frac{1}{7}} \right)^5$$

$$= 2^5$$

$$= 32$$

$$4) \quad \sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 5 \times 5} + \sqrt{2 \times 4 \times 4} - \sqrt{2 \times 3 \times 3}$$

$$= 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= (5 + 4 - 3)\sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{2}$$

3. เนื่องจาก $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$2^4 = 16$$

และ $\sqrt{16} = 4$

จะเห็นว่า $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$

ดังนั้น $16^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{4^2}$ และ $\sqrt{16}$ เป็นจำนวนเดียวกัน

4. จาก
$$\begin{aligned} 5 + \sqrt{24} &= 5 + 2\sqrt{6} \\ &= 3 + 2 + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

จะได้
$$5 + \sqrt{24} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

เนื่องจาก $5 + \sqrt{24} > 0$ และ $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 0$ ทำให้ได้ว่า $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(5 + \sqrt{24}) > 0$

ดังนั้น ค่าหลักของรากที่สองของ $5 + \sqrt{24}$ คือ $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

5. เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย และด้านประกอบมุมฉากยาว $\sqrt{75}$ และ a หน่วย

จะได้
$$10^2 = (\sqrt{75})^2 + a^2$$

$$100 = 75 + a^2$$

$$a^2 = 100 - 75$$

$$a^2 = 25$$

นั่นคือ
$$a = -5 \text{ หรือ } a = 5$$

เนื่องจาก a เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยม จะได้ว่า $a > 0$

ดังนั้น $a = 5$

6. ให้บ่อน้ำนี้มีความยาวของรัศมีของก้นบ่อน้ำเป็น r เมตร และมีความลึกเป็น h เมตร

เนื่องจาก ต้องการให้บ่อน้ำนี้จุน้ำได้ 2,200 ลูกบาศก์เมตร

และปริมาตรของทรงกระบอกที่มีรัศมียาว r เมตร และสูง h เมตร คือ $\pi r^2 h$ ลูกบาศก์เมตร

จะได้
$$\pi r^2 h = 2,200$$

$$\frac{22}{7} r^2 h \approx 2,200$$

$$r^2h \approx \frac{2,200 \times 7}{22}$$

$$r^2h \approx 700$$

จะได้ว่ามีจำนวนจริงหลายคู่ที่สอดคล้องกับ $r^2h \approx 700$ เช่น

ถ้ารัศมีของก้นบ่อน้ำยาวประมาณ 10 เมตร ความลึกของบ่อน้ำจะประมาณ 7 เมตร

ถ้ารัศมีของก้นบ่อน้ำยาวประมาณ $\sqrt{7}$ หรือ 2.6 เมตร ความลึกของบ่อจะประมาณ 100 เมตร

7. ให้อ่างเก็บน้ำลึก h เมตร

เนื่องจาก อ่างเก็บน้ำเป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความจุ 8.64×10^6 ลูกบาศก์เมตร

ซึ่งวัดพื้นที่บริเวณที่เป็นอ่างเก็บน้ำได้ 4.8×10^6 ตารางเมตร

จะได้ $8.64 \times 10^6 = (4.8 \times 10^6)h$

$$h = \frac{8.64 \times 10^6}{4.8 \times 10^6}$$

$$h = 1.8$$

ดังนั้น ความลึกของอ่างเก็บน้ำนี้ คือ 1.8 เมตร

8. พิจารณาการฝากเงินของยุพา ซึ่งฝากเงิน 10,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน เป็นเวลา 10 ปี และได้รับดอกเบี้ยจากธนาคาร 1% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นเป็นรายปี

นั่นคือ $P = 10000$, $n = 10$ และ $r = \frac{1}{100} = 0.01$

จะได้ จำนวนเงินฝากเมื่อสิ้นปีที่ 10 คือ $10,000(1 + 0.01)^{10} \approx 11,046.22$ บาท

นั่นคือ ดอกเบี้ยที่ยุพาได้รับจากธนาคาร คือ $11,046.22 - 10,000 = 1,046.22$ บาท

พิจารณาการฝากเงินของยุพิน ซึ่งฝากเงิน 20,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน เป็นเวลา 5 ปี และได้รับดอกเบี้ยจากธนาคาร 1% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นเป็นรายปี

นั่นคือ $P = 20000$, $n = 5$ และ $r = \frac{1}{100} = 0.01$

จะได้ จำนวนเงินฝากเมื่อสิ้นปีที่ 5 คือ $20,000(1 + 0.01)^5 \approx 21,020.20$ บาท

นั่นคือ ดอกเบี้ยที่ยุพาได้รับจากธนาคาร คือ $21,020.20 - 20,000 = 1,020.20$ บาท

ดังนั้น ยุพาได้รับดอกเบี้ยจากธนาคารมากกว่ายุพิน

บทที่ 2

ฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นเรื่องที่มีความเกี่ยวข้องในชีวิตจริง เนื่องจากในชีวิตจริงจะพบความสัมพันธ์ของข้อมูลสองกลุ่มค่อนข้างมาก เช่น เมื่อนำรถยนต์ไปเติมน้ำมันเมื่อเติมน้ำมันรถยนต์ จำนวนเงินที่ต้องชำระขึ้นอยู่กับปริมาณน้ำมันที่เติม ค่าโดยสารรถไฟขึ้นอยู่กับระยะทางที่เดินทาง ค่าส่งพัสดุไปรษณีย์ขึ้นอยู่กับน้ำหนักของพัสดุ กำไรที่ได้จากการขายสินค้าขึ้นอยู่กับจำนวนสินค้าที่ขายได้ ข้อมูลสองชุดที่มีความสัมพันธ์กันนี้ อาจเรียกข้อมูลชุดแรกว่า ข้อมูลเข้า และเรียกข้อมูลชุดที่สองว่า ข้อมูลออก จากตัวอย่างที่ยกมานี้จะเห็นว่าข้อมูลเข้าสัมพันธ์กับข้อมูลออกเพียงหนึ่งตัว ในทางคณิตศาสตร์จะเรียกความสัมพันธ์ระหว่างเซตของข้อมูลสองชุด โดยที่ข้อมูลเข้าหนึ่งตัวให้ข้อมูลออกเพียงหนึ่งตัวในลักษณะนี้ว่าฟังก์ชัน โดยในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 บทที่ 2 ฟังก์ชัน ได้นำเสนอบทนิยามเกี่ยวกับฟังก์ชัน ฟังก์ชันจากสับเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันชันบันได และฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ในบทเรียนนี้มุ่งให้นักเรียนบรรลุตัวชี้วัดตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้



ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

ตัวชี้วัด

- ใช้ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันอธิบายสถานการณ์ที่กำหนด

สาระการเรียนรู้แกนกลาง

- ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชัน (ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันชันบันได ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล)



จุดมุ่งหมาย

1. หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันในการแก้ปัญหา



ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับสมการและกราฟในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- เซต



ipst.me/8457

2.1 เนื้อหาสาระ

1. บทนิยาม 1

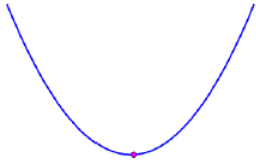
ฟังก์ชัน คือ เซตของคู่อันดับ ซึ่งคู่อันดับสองคู่อันดับใด ๆ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แล้วสมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน

เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมด เรียกว่า **โดเมน**ของฟังก์ชัน

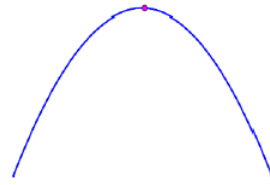
เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมด เรียกว่า **เรนจ์**ของฟังก์ชัน

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน โดเมนของ f เขียนแทนด้วย D_f และเรนจ์ของ f เขียนแทนด้วย R_f

- ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็นเซต A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของเซต B จะกล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันจาก A ไป B**
- ในกรณีที่โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง ในการกำหนดฟังก์ชัน มักใช้วิธีบอกเงื่อนไขในรูปสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น x กับตัวแปรตาม y แทนการกำหนดในรูปเซตของคู่อันดับ ในกรณีนี้ จะเขียน $y = f(x)$ แทน $(x, y) \in f$ และเรียก y ว่าเป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x ใช้สัญลักษณ์ $f(x)$
- ฟังก์ชันเชิงเส้น** คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นจะเป็นเส้นตรง
- ฟังก์ชัน $f(x) = ax + b$ เมื่อ $a = 0$ จะได้ ฟังก์ชัน $f(x) = b$ มีชื่อเรียกว่า **ฟังก์ชันคงตัว**
- สำหรับฟังก์ชันเชิงเส้น
 - 1) ในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของ x เป็นจำนวนจริงบวก เมื่อสัมประสิทธิ์ของ x มากขึ้น กราฟจะเบนเข้าหาแกน Y และเมื่อสัมประสิทธิ์ของ x น้อยลง กราฟจะเบนเข้าหาแกน X
 - 2) ในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของ x เป็นจำนวนจริงลบ เมื่อสัมประสิทธิ์ของ x มากขึ้น กราฟจะเบนเข้าหาแกน X และเมื่อสัมประสิทธิ์ของ x น้อยลง กราฟจะเบนเข้าหาแกน Y
- ฟังก์ชันกำลังสอง** คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันกำลังสองขึ้นอยู่กับ a, b และ c โดยเมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบ จะทำให้ได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายขึ้นหรือคว่ำลง ตามลำดับ ดังรูป



$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ เมื่อ } a > 0$$



$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ เมื่อ } a < 0$$

กราฟของฟังก์ชันกำลังสองมีชื่อเรียกว่า **พาราโบลา**

จุดยอดของพาราโบลา คือ จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของพาราโบลา

ในกรณีที่ฟังก์ชันกำลังสองเขียนอยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ การหาจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของกราฟทำได้โดยจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของ $f(x) = a(x-h)^2 + k$ โดยอาศัยการจัดบางส่วนของสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อให้หาจุดยอดของกราฟหรือจุด (h, k) ได้ง่ายขึ้น

8. ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และโดเมนถูกแบ่งออกเป็นช่วงย่อยมากกว่าหนึ่งช่วง โดยค่าของฟังก์ชันในแต่ละช่วงย่อยเป็นค่าคงตัว เรียกว่า **ฟังก์ชันขั้นบันได** กราฟของฟังก์ชันจะมีลักษณะคล้ายขั้นบันได
9. ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เรียกว่า **ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล**
10. สำหรับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $f(x) = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$
 - 1) กราฟของฟังก์ชันจะผ่านจุด $(0, 1)$ เสมอ ทั้งนี้เพราะ $a^0 = 1$
 - 2) ถ้า $a > 1$ แล้ว
 - ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและไม่มีที่สิ้นสุด เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวกและเพิ่มขึ้น
 - ค่าของ $f(x)$ จะค่อย ๆ ลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์แต่ไม่เท่ากับศูนย์ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงลบและลดลง
 - ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว
 - ค่าของ $f(x)$ จะค่อย ๆ ลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์แต่ไม่เท่ากับศูนย์ เมื่อ x เพิ่มขึ้น
 - ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและไม่มีที่สิ้นสุด เมื่อ x ลดลง
 - 3) โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง
เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริงบวก
11. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

2.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

ฟังก์ชัน



กิจกรรม : สัตว์เลี้ยงแสนรัก

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

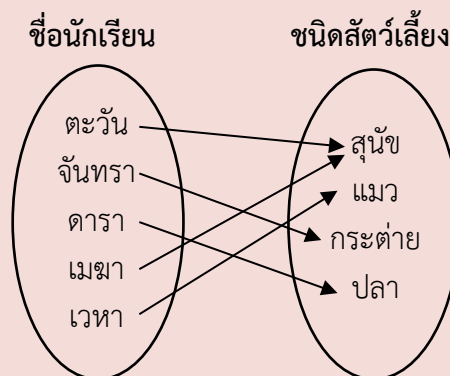
กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง ฟังก์ชัน

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูสุ่มเลือกนักเรียน 5 คน แล้วให้นักเรียนเลือกสัตว์ 1 ชนิด จากชนิดสัตว์เลี้ยงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

สุนัข แมว กระต่าย ปลา

2. ครูกำหนดเซตขึ้นมาสองเซต คือ เซตของชื่อนักเรียน และเซตของชนิดสัตว์เลี้ยง จากนั้นเขียนแผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างชื่อนักเรียนกับชนิดสัตว์เลี้ยงที่นักเรียนคนนั้นเลือก ตัวอย่างเช่น



3. ครูชี้แนะให้นักเรียนเห็นจากแผนภาพว่าเซตทั้งสองมีความเกี่ยวข้องกัน นั่นคือ เมื่อกำหนดชื่อนักเรียน จะทราบว่า นักเรียนคนนั้นเลือกสัตว์เลี้ยงชนิดใด โดยเรียกข้อมูลที่ป้อนชื่อนักเรียนว่า ข้อมูลเข้า และเรียกข้อมูลที่ป้อนชนิดสัตว์เลี้ยงว่า ข้อมูลออก

4. จากนั้นครูให้นักเรียนเขียนเซตของคู่อันดับแสดงการจับคู่ชื่อนักเรียนกับชนิดสัตว์เลี้ยงที่นักเรียนคนนั้นเลือก โดยให้สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นชื่อนักเรียน และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นชนิดสัตว์เลี้ยง

แนวคำตอบ

{(ตะวัน, สุนัข), (จันทรา, กระต่าย), (ดารา, ปลา), (เมฆา, สุนัข), (เวหา, แมว)}

5. ครูอธิบายเกี่ยวกับบทนิยามของฟังก์ชัน จะได้ว่า การจับคู่ในข้อ 4 เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากสมาชิกตัวหน้าแต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียว ซึ่งมี {ตะวัน, จันทรา, ดารา, เมฆา, เวหา} เป็นโดเมนของฟังก์ชัน และ {สุนัข, แมว, กระต่าย, ปลา} เป็นเรนจ์ของฟังก์ชัน

หมายเหตุ

- ในแนวทางการดำเนินกิจกรรมข้อ 1 ครูอาจเปลี่ยนสิ่งที่ให้นักเรียนเลือกเป็นสิ่งอื่น เช่น ความสูงของนักเรียน ขนาดของรองเท้าของนักเรียน
- หลังจากแนวทางการดำเนินกิจกรรมข้อ 5 แล้วครูอาจให้นักเรียนพิจารณาเพิ่มเติมว่า ถ้ากำหนดให้นักเรียน 1 คน เลือกชนิดสัตว์เลี้ยงได้มากกว่า 1 ชนิด เซตของคู่อันดับที่ได้จะเป็นฟังก์ชันหรือไม่



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างระยะเวลาในการคว่ำกัณฑ์กับอุณหภูมิของเมล็ดกาแฟ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน ที่นำเสนอไว้ในเกริ่นนำของบทที่ 2 ฟังก์ชัน ของหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีไว้เพื่อเชื่อมโยงความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันกับชีวิตจริง ครูอาจให้นักเรียนศึกษาข้อมูลเพิ่มเติมจากคลิปวิดีโอใน https://youtu.be/F2zA8YB2B_M เพื่อให้นักเรียนเห็นความสำคัญของฟังก์ชันในชีวิตจริง ซึ่งในคลิปวิดีโอกล่าวว่าถึงความสัมพันธ์ที่มีการให้ความร้อนในการคว่ำเมล็ดกาแฟเป็นตัวแปรต้น และระยะเวลาในการคว่ำเมล็ดกาแฟเป็นตัวแปรตาม ซึ่งเมื่อพิจารณากราฟของความสัมพันธ์ดังกล่าวแล้วจะเห็นว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นฟังก์ชัน

- หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นำเสนอฟังก์ชันโดยกล่าวถึงผลคูณคาร์ทีเซียนและความสัมพันธ์ แต่ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จะไม่ได้นำเสนอฟังก์ชันในแนวทางดังกล่าว แต่จะกล่าวถึงฟังก์ชันโดยไม่ได้นิยามความสัมพันธ์
- การตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันของ f ที่เขียนอยู่ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก ซึ่งมีสมาชิกเป็นคู่อันดับนั้น นักเรียนอาจทำได้โดยพิจารณาตามบทนิยามที่ 1 ดังแสดงในตัวอย่างที่ 1 หรือใช้แผนภาพ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 2
- ในการหาค่าของฟังก์ชัน ครูควรให้นักเรียนระมัดระวังกรณีที่ x ไม่เป็นสมาชิกของโดเมนของฟังก์ชัน เช่น จากตัวอย่างที่ 5 ข้อ 2 กำหนด $g(x) = \frac{2}{x+3}$ นั่นคือ $D_g = \mathbb{R} - \{-3\}$ จะได้ว่าไม่นิยาม $g(-3)$ เนื่องจาก $-3 \notin D_g$
- ในกรณีที่โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง การกำหนดฟังก์ชันมักใช้วิธีบอกเงื่อนไขในรูปสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น x กับตัวแปรตาม y แทนการกำหนดในรูปเซตของคู่อันดับ กรณีนี้ จะเขียน $y = f(x)$ แทน $(x, y) \in f$ และเรียก y ว่าเป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x ใช้สัญลักษณ์ $f(x)$ เช่น การกำหนดฟังก์ชัน $f = \{(x, y) | y = 3x + 2\}$ เพื่อความสะดวกจะเขียนเพียง $y = 3x + 2$ หรือ $f(x) = 3x + 2$
- การตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันของ f ที่เขียนอยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข นักเรียนอาจทำได้โดยการพิจารณาจากกราฟของสมการที่เป็นเงื่อนไข ซึ่งเมื่อลากเส้นขนานกับแกน Y ถ้าไม่มีเส้นขนานกับแกน Y เส้นใดตัดกราฟของสมการที่กำหนดให้มากกว่า 1 จุด แล้วเซตนั้นจะเป็นฟังก์ชัน (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 8) แต่ถ้ามีเส้นขนานกับแกน Y อย่างน้อย 1 เส้นตัดกราฟของสมการที่กำหนดให้มากกว่า 1 จุด แล้วเซตนั้นจะไม่ใช่ฟังก์ชัน (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 9) อย่างไรก็ตาม นอกจากวิธีดังกล่าวแล้ว ยังสามารถตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันโดยใช้บทนิยาม 1 ซึ่งจะอธิบายเพิ่มเติมในหัวข้อความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู ของคู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
- ในการสอนเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชัน ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลงมือเขียนกราฟด้วยตนเองพร้อมทั้งสรุปวิธีเขียนกราฟ และเมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันดีแล้ว ครูอาจให้นักเรียนใช้เทคโนโลยีเป็นเครื่องมือช่วยในการเขียนกราฟ



ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

- นักเรียนมักเข้าใจผิดว่า $f(x)$ เป็นสัญลักษณ์แทนฟังก์ชัน ทั้งนี้ ครูควรเน้นย้ำว่า $f(x)$ เป็นสัญลักษณ์ซึ่งใช้แทนค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เช่น $f(2)$ เป็นสัญลักษณ์ซึ่งใช้แทนค่าของฟังก์ชัน f เมื่อ $x=2$ นอกจากนี้ $f(x)$ ยังใช้แทนการเขียนฟังก์ชันแบบบอกเงื่อนไข เช่น $f(x) = 2x + 1$

ฟังก์ชันเชิงเส้น

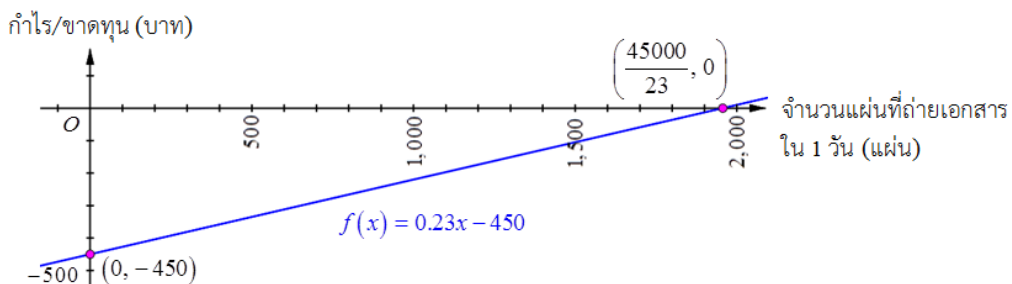


ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- เนื้อหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นในบทนี้ ไม่ได้มุ่งเน้นให้นักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นที่กำหนดให้เพียงอย่างเดียว แต่ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนใช้กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นในการแก้ปัญหา เช่น ตัวอย่างที่ 15 ครูควรใช้เทคโนโลยีเป็นเครื่องมือช่วยในการเขียนกราฟ ซึ่งได้เป็นดังนี้

เนื่องจากฟังก์ชันแสดงกำไร (ขาดทุน) ของร้านถ่ายเอกสาร เมื่อ x เป็นจำนวนแผ่นที่ถ่ายเอกสารใน 1 วัน คือ $f(x) = 0.23x - 450$

เขียนกราฟของฟังก์ชันแสดงกำไร (ขาดทุน) ของร้านถ่ายเอกสาร ได้ดังนี้



จากกราฟ เมื่อ $x \geq 1,956.52$ จะได้ว่า $f(x) \geq 0$

ดังนั้น ร้านถ่ายเอกสารจะต้องรับจ้างถ่ายเอกสารอย่างน้อย 1,957 แผ่น จึงจะไม่ขาดทุน



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ต้องคำนึงถึงโดเมนของฟังก์ชันด้วย เช่น ในแบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 3, 5, 6, 7 และ 8



กิจกรรม : สำรวจกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อเสริมความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบละความสามารถ จากนั้นเปิดเว็บไซต์ ipst.me/10303
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่คลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ a และ b เพื่อสำรวจกราฟของฟังก์ชัน $y = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ว่าการเปลี่ยนแปลงของ a และ b มีผลอย่างไรต่อการเปลี่ยนแปลงลักษณะของกราฟในกรณีต่าง ๆ ดังนี้
 - กรณี $a > 0$ และ a มากขึ้น เมื่อ b คงที่
แนวคำตอบ กราฟจะเบนเข้าหาแกน Y
 - กรณี $a > 0$ และ a น้อยลง เมื่อ b คงที่
แนวคำตอบ กราฟจะเบนเข้าหาแกน X
 - กรณี $a < 0$ และ a มากขึ้น เมื่อ b คงที่
แนวคำตอบ กราฟจะเบนเข้าหาแกน X
 - กรณี $a < 0$ และ a น้อยลง เมื่อ b คงที่
แนวคำตอบ กราฟจะเบนเข้าหาแกน Y
 - กรณี a คงที่ เมื่อ b มากขึ้น
แนวคำตอบ กราฟจะเลื่อนขึ้นตามแนวแกน Y
 - กรณี a คงที่ เมื่อ b น้อยลง
แนวคำตอบ กราฟจะเลื่อนลงตามแนวแกน Y
3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับผลที่ได้จากการสำรวจในข้อ 2

หมายเหตุ

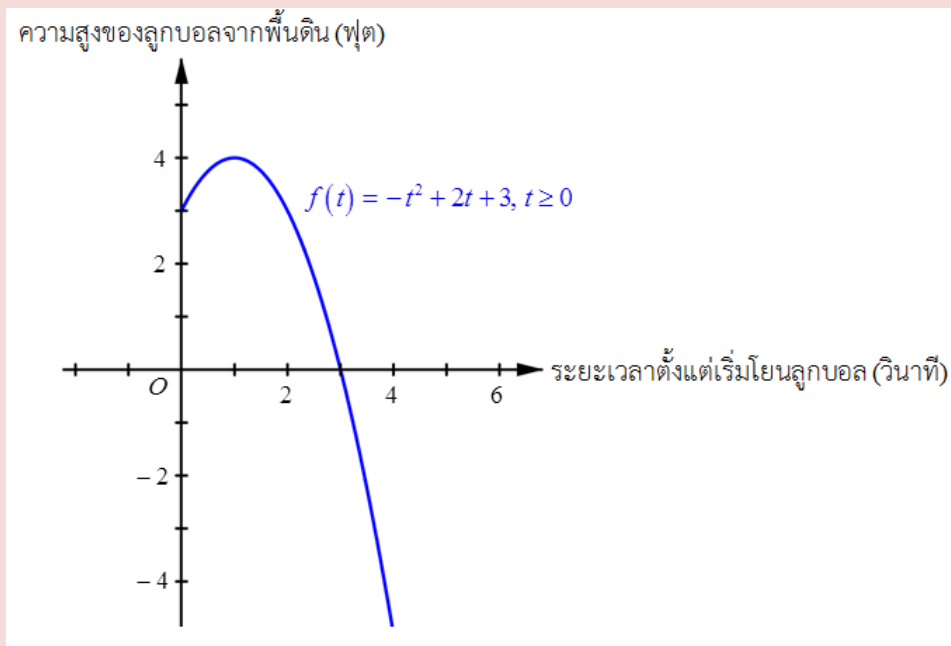
- เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมนี้แล้ว ครูควรเชื่อมโยงกับแบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 1 และนำไปใช้ในการพิจารณากราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นต่าง ๆ
- กิจกรรมนี้มีไว้เพื่อให้ให้นักเรียนเข้าใจกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นดีขึ้น ทั้งนี้ ครูไม่ควรวัดผลประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นให้นักเรียนจดจำแต่ละกรณี

ฟังก์ชันกำลังสอง



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรทบทวนการจัดรูปสมการกำลังสองที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ ให้อยู่ในรูป $y = a(x-h)^2 + k$ โดยอาศัยการจัดบางส่วนของสมการให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อให้หาจุดยอดของกราฟหรือจุด (h, k) ได้ง่ายขึ้น ซึ่งจะเป็ประโยชน์ในการเขียนกราฟ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 17 และ 18
- เนื้อหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันกำลังสองในบทนี้ ไม่ได้มุ่งเน้นให้นักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันกำลังสองที่กำหนดให้เพียงอย่างเดียว แต่ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนใช้กราฟของฟังก์ชันกำลังสองในการแก้ปัญหา เช่น ตัวอย่างที่ 18 ครูควรใช้เทคโนโลยีเป็นเครื่องมือช่วยในการเขียนกราฟของ $f(t) = -t^2 + 2t + 3, t \geq 0$ ซึ่งได้เป็นดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที ลูกบอลจะอยู่ที่ตำแหน่งที่สูงที่สุดจากพื้นดิน โดยลูกบอลจะอยู่สูงจากพื้นดิน 4 ฟุต และลูกบอลจะตกถึงพื้นดินเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที



กิจกรรม : สำนักรวกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อเสริมความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่ให้นักเรียนแบบละความสามารถ จากนั้นเปิดเว็บไซต์ ipst.me/10304
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่คลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ a, h และ k เพื่อสำนักรวกราฟของฟังก์ชัน $y = a(x - h)^2 + k$ เมื่อ a, h และ k เป็นจำนวนจริง ว่าการเปลี่ยนแปลงของ a, h และ k มีผลอย่างไรต่อการเปลี่ยนแปลงลักษณะของกราฟในกรณีต่าง ๆ ดังนี้

- กรณี $a > 0$ โดยที่ h และ k คงที่ แต่ a มากขึ้นหรือน้อยลง

แนวคำตอบ

เมื่อ a มากขึ้น จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายที่กว้างขึ้น แต่เมื่อ a น้อยลง จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายที่แคบลง

- กรณี $a < 0$ โดยที่ h และ k คงที่ แต่ a มากขึ้นหรือน้อยลง

แนวคำตอบ

เมื่อ a มากขึ้น จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งคว่ำที่กว้างขึ้น แต่เมื่อ a น้อยลง จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งคว่ำที่แคบลง

- กรณี $a > 0$ โดยที่ a และ h คงที่ แต่ k มากขึ้นหรือน้อยลง

แนวคำตอบ

เมื่อ k มากขึ้น จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายที่กว้างเท่าเดิมที่เลื่อนขึ้นตามแนวแกน Y แต่เมื่อ k น้อยลง จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายที่กว้างเท่าเดิมที่เลื่อนลงตามแนวแกน Y

- กรณี $a > 0$ โดยที่ a และ k คงที่ แต่ h มากขึ้นหรือน้อยลง

แนวคำตอบ

เมื่อ h มากขึ้น จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายที่กว้างเท่าเดิมที่เลื่อนไปทางขวาตามแนวแกน X แต่เมื่อ h น้อยลง จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งหงายที่กว้างเท่าเดิมที่เลื่อนไปทางซ้ายตามแนวแกน X

- กรณี $a < 0$ โดยที่ a และ h คงที่ แต่ k มากขึ้นหรือน้อยลง

แนวคำตอบ

เมื่อ k มากขึ้น จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งคว่ำที่กว้างเท่าเดิมที่เลื่อนขึ้นตามแนวแกน Y แต่เมื่อ k น้อยลง จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งคว่ำที่กว้างเท่าเดิมที่เลื่อนลงตามแนวแกน Y

- กรณี $a < 0$ โดยที่ a และ k คงที่ แต่ h มากขึ้นหรือน้อยลง

แนวคำตอบ

เมื่อ h มากขึ้น จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งคว่ำที่กว้างเท่าเดิมที่เลื่อนไปทางขวาตามแนวแกน X แต่เมื่อ h น้อยลง จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งคว่ำที่กว้างเท่าเดิมที่เลื่อนไปทางซ้ายตามแนวแกน X

3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับผลที่ได้จากการสำรวจในข้อ 2

หมายเหตุ

- ผลที่ได้ในข้อ 2 ที่เกี่ยวกับการกว้างขึ้นหรือแคบลงของกราฟนั้น เป็นการพิจารณาที่สเกลเดียวกัน
- เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมนี้แล้ว ครูควรเชื่อมโยงกับแบบฝึกหัด 2.3 ข้อ 1 และนำไปใช้ในการพิจารณากราฟของฟังก์ชันกำลังสองต่าง ๆ
- กิจกรรมนี้มีไว้เพื่อให้ให้นักเรียนเข้าใจกราฟของฟังก์ชันกำลังสองดีขึ้น ทั้งนี้ ครูไม่ควรวัดผลประเมินผลการเรียนรู้ที่เน้นให้นักเรียนจดจำแต่ละกรณี

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในกรณีที่นักเรียนถามว่าฟังก์ชัน เช่น $y = 5(2)^x$, $y = 3^{2x+4}$, $y = 5^x + 2$, $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x + 4$ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลหรือไม่ ครูควรอธิบายว่าเมื่อพิจารณาตามบทนิยามในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จะได้ว่า ฟังก์ชันเหล่านี้ไม่เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล แต่เมื่อศึกษาจากตำราอื่น ๆ ที่นิยามแตกต่างกันไป อาจเรียกฟังก์ชันเหล่านี้ว่าเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล นอกจากนี้การพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลหรือไม่ ไม่ใช่จุดเน้นของบทนี้
- เนื่องจากเรนจ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ $\mathbb{R}^+$ ดังนั้น กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล อยู่เหนือแกน X เสมอ



กิจกรรม : สำนักรรกรรฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อเสริมความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับกรรฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูจับคู่ให้นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นให้นักเรียนเปิดเว็บไซต์ ipst.me/9046
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำนักรรกรรฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2^x$ โดย

- 1) คลิกที่รูปสี่เหลี่ยมหน้า Show f เพื่อให้เครื่องหมาย ✓ ปรากฏ
- 2) คลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ x แล้วพิจารณาว่า

- เมื่อ x เปลี่ยนจากน้อยไปมาก ค่าของ $f(x)$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร

แนวคำตอบ

เมื่อ x เปลี่ยนจากน้อยไปมาก ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้น

- เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวกและเพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร

แนวคำตอบ

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวกและเพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและไม่มีที่สิ้นสุด

- เมื่อ x เป็นจำนวนจริงลบและลดลง ค่าของ $f(x)$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร

แนวคำตอบ

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงลบและลดลง ค่าของ $f(x)$ จะค่อย ๆ ลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์แต่ไม่เท่ากับศูนย์

3. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำนักรรกรรฟของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ เมื่อ a เป็นค่าอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ 2 โดยให้นักเรียนคลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ a แล้วใช้คำถามในข้อ 2 เพื่อสังเกตการเปลี่ยนแปลงค่าของ $f(x)$

แนวคำตอบ

- เมื่อ x เปลี่ยนจากน้อยไปมาก ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้น
 - เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวกและเพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและไม่มีที่สิ้นสุด
 - เมื่อ x เป็นจำนวนจริงลบและลดลง ค่าของ $f(x)$ จะค่อย ๆ ลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์แต่ไม่เท่ากับศูนย์
4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับข้อสังเกตที่ได้ในข้อ 2 และ 3
5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ปรับสไลเดอร์ a จากน้อยไปมาก เพื่อสำรวจกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ แล้วพิจารณาว่า
- เมื่อ a เพิ่มขึ้น ลักษณะของกราฟ $f(x) = a^x$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร
- แนวคำตอบ** เมื่อ a เพิ่มขึ้น และ $x > 0$ กราฟจะเบนเข้าหาแกน Y
- กราฟตัดแกน Y ที่จุดใด
- แนวคำตอบ** กราฟทั้งหมดตัดแกน Y ที่จุด $(0, 1)$
6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับข้อสังเกตที่ได้ในข้อ 5

2.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน



กิจกรรม : ซอมบี้บุก

สมมติว่าเกิดเหตุการณ์ซอมบี้บุกโรงเรียน เริ่มจากซอมบี้ 5 ตัว บุกเข้ามาในโรงเรียน และกำหนดให้ในแต่ละวัน ซอมบี้แต่ละตัวสามารถแพร่เชื้อให้กับผู้ที่ยังไม่ได้รับเชื้อจำนวน 2 คน โดยผู้ที่ได้รับเชื้อจะกลายเป็นซอมบี้ด้วย

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. จากสถานการณ์ข้างต้น นักเรียนคิดว่าจำนวนซอมบี้กับเวลามีความสัมพันธ์ลักษณะใด
2. จากสถานการณ์ข้างต้น ให้นักเรียนเติมตารางด้านล่างให้สมบูรณ์

วันที่	จำนวนซอมบี้ (ตัว)
0	5
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

3. นำข้อมูลในข้อ 2 ไปเขียนกราฟโดยให้แกน X แสดงเวลา (วัน) และแกน Y แทนจำนวนซอมบี้ (ตัว)
4. กราฟที่ได้ในข้อ 3 มีลักษณะเป็นอย่างไร เพราะเหตุใด
5. เขียนฟังก์ชันแสดงจำนวนซอมบี้ในแต่ละวัน
6. สมมติประเทศไทยมีจำนวนประชากร 69,000,000 คน คนทั้งประเทศจะกลายเป็นซอมบี้ภายในเวลาเท่าใด
7. สมมติจำนวนประชากรโลกมีทั้งหมด 7,570,000,000 คน คนทั้งโลกจะกลายเป็นซอมบี้ภายในเวลาเท่าใด

8. ถ้าตอนเริ่มต้นมีขอมบี้ 12 ตัว และขอมบี้เคลื่อนที่เร็ว ทำให้ขอมบี้แต่ละตัวสามารถแพร่เชื้อให้กับผู้ที่ยังไม่ได้รับเชื้อจำนวน 5 คนต่อวัน คนทั้งโลกจะกลายเป็นขอมบี้ภายในเวลาเท่าใด
9. ถ้าให้นักเรียนเลือกระหว่างสถานการณ์ที่มีจำนวนขอมบี้เริ่มต้นมาก ๆ โดยขอมบี้แต่ละตัวเคลื่อนที่ช้า ทำให้แต่ละวันแพร่เชื้อได้จำนวนไม่มาก กับสถานการณ์ที่มีจำนวนขอมบี้เริ่มต้นน้อย แต่ขอมบี้แต่ละตัวเคลื่อนที่เร็ว ทำให้แต่ละวันแพร่เชื้อได้จำนวนมาก นักเรียนจะเลือกสถานการณ์ใด เพราะเหตุใด

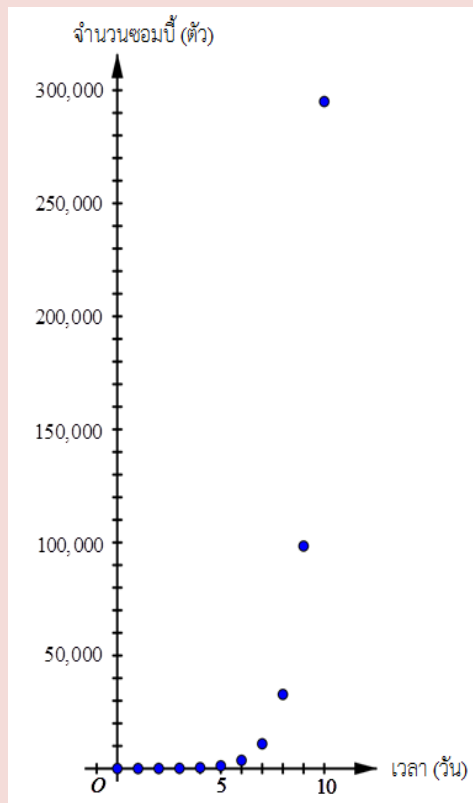


เฉลยกิจกรรม : ซอมบี้บุก

- จำนวนซอมบี้ (y ตัว) กับเวลา (x วัน) สัมพันธ์กันแบบฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
หมายเหตุ ในขั้นตอนนี้ นักเรียนอาจยังไม่ได้คำตอบที่ถูกต้อง
-

วันที่	จำนวนซอมบี้ (ตัว)
0	5
1	15
2	45
3	135
4	405
5	1,215
6	3,645
7	10,935
8	32,805
9	98,415
10	295,245

3.



4. กราฟที่ได้มีลักษณะใกล้เคียงกับกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ที่มีโดเมนของฟังก์ชันเป็น $\mathbb{N} \cup \{0\}$ เนื่องจากเมื่อ x เพิ่มขึ้น y จะเป็นสามเท่าของจำนวนก่อนหน้า
5. $y = 5(3^x)$ โดยที่ x แทนเวลา (วัน) และ y แทนจำนวนขอมบี้ (ตัว)
6. ใช้เทคโนโลยีช่วยในการคำนวณหาค่า x ที่ทำให้ $5(3^x) \geq 69,000,000$ จะได้ $x \geq 15$
ดังนั้น คนทั้งประเทศจะกลายเป็นขอมบี้ภายในเวลา 15 วัน
7. ใช้เทคโนโลยีช่วยในการคำนวณหาค่า x ที่ทำให้ $5(3^x) \geq 7,570,000,000$ จะได้ $x \geq 20$
ดังนั้น คนทั้งโลกจะกลายเป็นขอมบี้ภายในเวลา 20 วัน
8. ใช้เทคโนโลยีช่วยในการคำนวณหาค่า x ที่ทำให้ $12(6^x) \geq 7,570,000,000$ จะได้ $x \geq 12$
ดังนั้น คนทั้งโลกจะกลายเป็นขอมบี้ภายในเวลา 12 วัน

9. นักเรียนอาจจะเลือกสถานการณ์ใดก็ได้ แต่ไม่ว่านักเรียนจะเลือกสถานการณ์ใด นักเรียนควรให้เหตุผลประกอบคำตอบ เช่น ซอมบี้ในสถานการณ์แรกจะแพร่เชื้อได้ช้ากว่าในสถานการณ์ที่สอง โดยฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและจำนวนซอมบี้จะอยู่ในรูป $y = a(b+1)^x$ เมื่อ a เป็นจำนวนซอมบี้เริ่มต้น และ b เป็นจำนวนคนที่ซอมบี้แพร่เชื้อให้ต่อวัน ดังนั้น ยิ่ง b มาก ซอมบี้ก็จะยิ่งเพิ่มจำนวนได้เร็วมากขึ้น



แนวทางการจัดกิจกรรม : ซอมบี้บุก

เวลาในการจัดกิจกรรม 50 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชัน เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม “ซอมบี้บุก”
2. ยางวงขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 – 3 นิ้ว จำนวนเท่ากับจำนวนนักเรียนในห้อง

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแจกใบกิจกรรม “ซอมบี้บุก” จากนั้นให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ที่กำหนดในใบกิจกรรมให้เข้าใจ แล้วให้นักเรียนตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 1 โดยไม่คำนึงถึงความถูกต้องของคำตอบ
2. ครูขออาสาสมัครจำนวน 5 คน และกำหนดให้นักเรียนกลุ่มนี้เป็นซอมบี้ตามสถานการณ์เริ่มต้น โดยนักเรียนกลุ่มนี้จะมียางวงใส่ไว้ที่ข้อมือคนละ 1 เส้น ซึ่งสมมติให้ยางวงเป็นสัญลักษณ์แสดงการเป็นซอมบี้
3. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่าวันนี้เป็นวันแรกที่พบซอมบี้ติดเชื้อ ดังนั้นจึงกำหนดให้วันนี้เป็นวันที่ 0 ซึ่งมีซอมบี้จำนวน 5 ตัว
4. ครูให้สัญญาณว่าเป็นวันที่ 1 และจะเริ่มแพร่เชื้อซอมบี้ จากนั้นครูแจกยางวงอีก 2 เส้นให้นักเรียนแต่ละคนที่เป็นซอมบี้ แล้วให้นักเรียนที่เป็นซอมบี้นำยางวงที่ได้รับเพิ่มไปใส่ไว้ที่ข้อมือของเพื่อนตามเงื่อนไขในสถานการณ์ที่กำหนด
5. ครูถามนักเรียนว่าในขณะนี้จะมีซอมบี้ในห้องทั้งหมดกี่ตัว จากนั้นครูให้นักเรียนเติมจำนวนซอมบี้ของวันที่ 1 ลงในตารางที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 2
6. ครูให้นักเรียนทำซ้ำข้อ 4 และ 5 สำหรับวันที่ 2 และวันอื่น ๆ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนนักเรียนในห้อง
7. ครูให้นักเรียนเติมข้อมูลลงในตารางที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 2 ให้สมบูรณ์ จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบคำตอบ

8. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคละความสามารถ และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันปฏิบัติตามขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 3 – 9 ในใบกิจกรรม โดยให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถามและร่วมกันตรวจสอบคำตอบที่ละข้อ โดยครูต้องคำนึงถึงประเด็นสำคัญต่อไปนี้

- ในการตอบคำถามข้อ 5 ที่ปรากฏในใบกิจกรรม จำนวนชอมบี้ในแต่ละวันจะหมายถึงจำนวนชอมบี้ที่มีทั้งหมด ซึ่งหาได้จากผลรวมของจำนวนชอมบี้ของวันก่อนหน้ากับจำนวนคนที่กลายเป็นชอมบี้ในวันนั้น

เพื่อให้นักเรียนเห็นแบบรูปของการเพิ่มขึ้นของจำนวนชอมบี้ ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนเขียนข้อมูลในตารางที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 2 เป็นแบบรูป เช่น

วันที่	จำนวนชอมบี้ (ตัว)
0	5
1	$5 + 5(2) = 5(3)$
2	$15 + 15(2) = 5(3^2)$
3	$45 + 45(2) = 5(3^3)$

ซึ่งจะทำให้นักเรียนเข้าใจว่าคำตอบที่ได้คือ $y = 5(3^x)$ เชื่อมโยงกับสถานการณ์ที่กำหนดให้อย่างไร

- ในการหาฟังก์ชันที่ใช้เพื่อตอบคำถามข้อ 8 ที่ปรากฏในใบกิจกรรม ให้นักเรียนใช้แนวคิดเดียวกับการตอบคำถามข้อ 5 ที่ปรากฏในใบกิจกรรม
- ในการตอบคำถามข้อ 9 ที่ปรากฏในใบกิจกรรม ครูควรพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ เช่น นักเรียนที่ต้องการให้จำนวนชอมบี้เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ควรเลือกสถานการณ์ที่มีจำนวนชอมบี้เริ่มต้นน้อย แต่ชอมบี้แต่ละตัวเคลื่อนที่เร็ว ทำให้แต่ละวันแพร่เชื้อได้จำนวนมาก

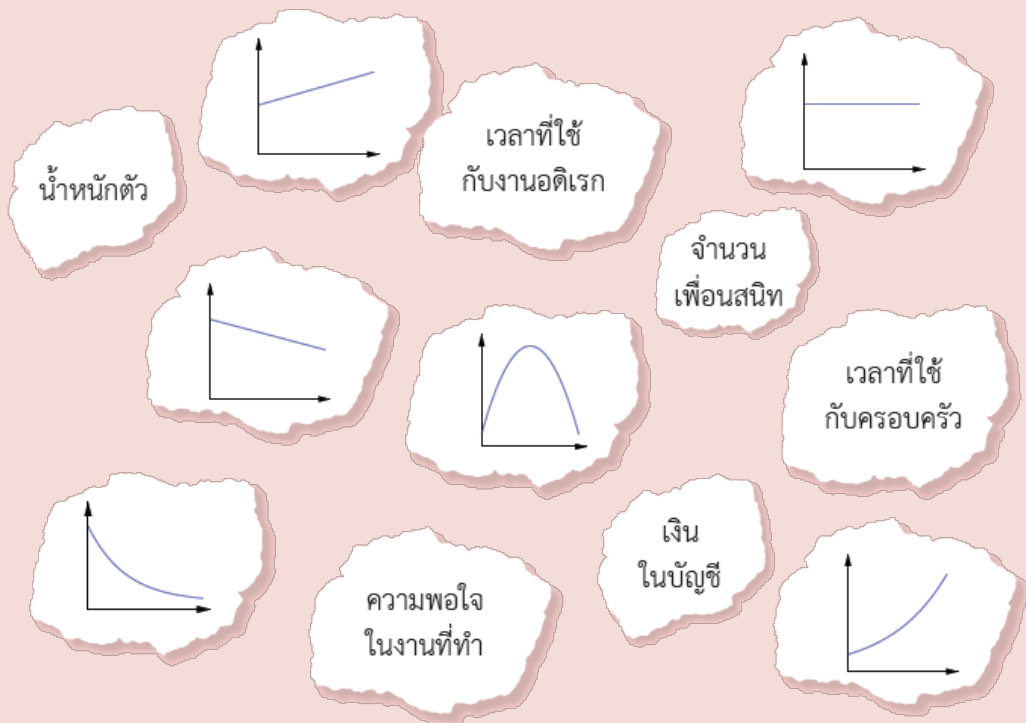
หมายเหตุ

ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้เทคโนโลยีเป็นเครื่องมือช่วยในการเขียนกราฟและการคำนวณ



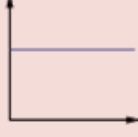
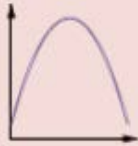
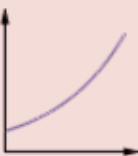
กิจกรรม : สืบจากกราฟ

ขจรชอบวิชาคณิตศาสตร์จึงเก็บข้อมูลต่าง ๆ ในชีวิตตนเองโดยใช้กราฟ วันหนึ่งขจรได้หายตัวไป เมื่อนักสืบไปค้นที่ห้องพักของขจร ได้พบกระดาษที่มีกราฟลักษณะต่าง ๆ จำนวน 6 แบบ และข้อความที่คาดว่าเป็นคำอธิบายประกอบแต่ละกราฟ จำนวน 6 ข้อความ ซึ่งเขียนแยกออกจากกราฟ จึงทำให้ไม่สามารถทราบได้ว่าคำอธิบายใดคู่กับกราฟได้ ดังรูป



ขั้นตอนการปฏิบัติ

- จับคู่คำอธิบายกับกราฟทั้งหก พร้อมทั้งกำหนดว่าแกน X และแกน Y แทนอะไร ให้สอดคล้องกับคำอธิบายกราฟ ในตารางด้านล่าง

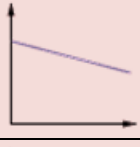
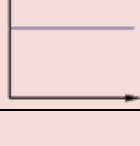
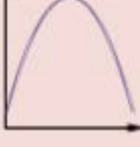
กราฟ	คำอธิบาย	แกน X และแกน Y
		
		
		
		
		
		

- เขียนสถานการณ์ที่อธิบายการหายไปของขจร ให้สอดคล้องกับกราฟและคำอธิบายในตาราง



เฉลยกิจกรรม : สืบจากกราฟ

1. ตัวอย่างคำตอบ

กราฟ	คำอธิบาย	แกน X และแกน Y
	ขจรถูกสูตรอาหารสุขภาพและทำอาหารขายเป็นงานอดิเรก โดยใช้เวลากับงานอดิเรกมากขึ้นเรื่อย ๆ	แกน X แทน เวลาที่ผ่านไป แกน Y แทน เวลาที่ใช้กับงานอดิเรก
	ขจรไม่ค่อยมีเวลาออกไปพบเพื่อน ทำให้เพื่อนสนิทน้อยลงเรื่อย ๆ	แกน X แทน เวลาที่ผ่านไป แกน Y แทน จำนวนเพื่อนสนิท
	ขจรใช้เวลากับครอบครัวอย่างสม่ำเสมอและได้แรงบันดาลใจจากครอบครัวอย่างสม่ำเสมอ	แกน X แทน เวลาที่ผ่านไป แกน Y แทน เวลาที่ใช้กับครอบครัว
	ขจรมีน้ำหนักตัวมากขึ้น เมื่อหมอแนะนำให้ลดน้ำหนัก เขาจึงเริ่มออกกำลังกายและคิดสูตรอาหารเพื่อสุขภาพ ทำให้น้ำหนักตัวลดลง	แกน X แทน เวลาที่ผ่านไป แกน Y แทน น้ำหนักตัว
	ขจรมีความพอใจในงานที่ทำลดลงเรื่อย ๆ และรู้สึกอึดอัดกับการเขียนโปรแกรม	แกน X แทน เวลาที่ผ่านไป แกน Y แทน ความพอใจในงานที่ทำ
	เกมที่ขจรเขียนโปรแกรมได้รับความนิยมสูง ทำให้รายได้ขจรเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว และเงินในบัญชีเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว	แกน X แทน เวลาที่ผ่านไป แกน Y แทน เงินในบัญชี

หมายเหตุ

กราฟที่กำหนดให้ในกิจกรรมนี้อาจเป็นกราฟเส้นแนวโน้มของฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง

2. ตัวอย่างคำตอบ

ขจรเป็นนักเขียนโปรแกรม ใช้เวลาส่วนใหญ่นั่งทำงานหน้าจคอมพิวเตอร์ ทำให้ขจรมีน้ำหนักตัวมากขึ้น หลายปีก่อนหมอแนะนำให้ขจรลดน้ำหนัก ขจรจึงเริ่มออกกำลังกาย และคิดสูตรอาหารเพื่อสุขภาพและทำอาหารขายเป็นงานอดิเรก โดยมีครอบครัวช่วยชิมอาหารที่ทำและให้ความเห็นเพื่อปรับปรุงสูตรอาหาร ขจรไม่ค่อยมีเวลาออกไปพบเพื่อน ทำให้เพื่อนสนิทน้อยลงเรื่อย ๆ ปีที่แล้วเกมที่ขจรเขียนโปรแกรมได้รับความนิยมสูง ทำให้รายได้ขจรเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ขจรรู้สึกอึดอัดกับการเขียนโปรแกรมจึงตัดสินใจขายลิขสิทธิ์เกมให้กับบริษัทใหญ่แห่งหนึ่ง และได้เงินมาก่อนหนึ่ง เมื่อเพื่อนได้ข่าวว่าขจรร่ำรวยมาก ก็เริ่มติดต่อมาเพื่อหวังจะขอเงิน ด้วยแรงสนับสนุนจากครอบครัวอย่างสม่ำเสมอมาโดยตลอด ทำให้ขจรมั่นใจในสูตรอาหารเพื่อสุขภาพของตนเอง ขจรจึงตัดสินใจชวนครอบครัวไปต่างประเทศอย่างเงียบ ๆ และนำเงินก้อนที่ได้ไปเปิดร้านอาหารเพื่อสุขภาพที่นั่น



แนวทางการจัดกิจกรรม : สืบจากกราฟ

เวลาในการจัดกิจกรรม 30 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชัน เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

ใบกิจกรรม “สืบจากกราฟ”

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคละความสามารถ
2. ครูแจกใบกิจกรรม “สืบจากกราฟ” จากนั้นให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ที่กำหนดในใบกิจกรรม ให้เข้าใจ ทั้งนี้ ครูควรชี้แจงเพิ่มเติมว่ากราฟที่กำหนดให้ในกิจกรรมนี้อาจเป็นกราฟเส้นแนวโน้ม ของฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง เช่น เมื่อแกน X เป็นเวลาที่ผ่านไป และแกน Y เป็นจำนวนเพื่อน สนิท ซึ่งจำนวนเพื่อนสนิทเป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่ากราฟที่ได้จะมีลักษณะเป็นจุด
3. ครูเลือกตัวแทนนักเรียนเพื่อการจับคู่คำอธิบายกับกราฟประมาณ 1 – 2 ตัวอย่าง
4. เมื่อนักเรียนเข้าใจการจับคู่คำอธิบายกับกราฟแล้ว ครูให้นักเรียนตอบคำถามที่ปรากฏใน ขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 1 โดยคำตอบมีได้หลากหลาย ซึ่งครูควรคำนึงถึงความถูกต้องตาม ลักษณะของกราฟในแต่ละฟังก์ชัน
5. จากคำตอบที่ได้ในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 1 ครูให้นักเรียนตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการ ปฏิบัติข้อ 2
6. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอคำตอบที่ได้จากขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 1 และ 2 โดยเน้นย้ำให้เชื่อมโยงกับกราฟที่เลือก แล้วให้นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับ ความสมเหตุสมผลของคำตอบที่นำเสนอ

2.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีเป้าหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 2 ฟังก์ชัน ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
ฟังก์ชัน ค่าของฟังก์ชัน โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน	2.1	ข้อ 1 – 7
ฟังก์ชันเชิงเส้นและกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น	2.2	ข้อ 1 – 2
การใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นและกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นในการแก้ปัญหา	2.2	ข้อ 3 – 8
ฟังก์ชันกำลังสองและกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง	2.3	ข้อ 1 – 2
การใช้ฟังก์ชันกำลังสองและกราฟของฟังก์ชันกำลังสองในการแก้ปัญหา	2.3	ข้อ 3 – 5
ฟังก์ชันขั้นบันไดและกราฟของฟังก์ชันขั้นบันได	2.4	ข้อ 1
การใช้ฟังก์ชันขั้นบันไดและกราฟของฟังก์ชันขั้นบันไดในการแก้ปัญหา	2.4	ข้อ 2 – 4
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	2.5	ข้อ 1
การใช้ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลในการแก้ปัญหา	2.5	ข้อ 2 – 3

2.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีจุดมุ่งหมายว่า เมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 2 ฟังก์ชัน แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย ซึ่งประกอบด้วยโจทย์ฝึกทักษะที่มีความน่าสนใจและโจทย์ท้าทายครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้ แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 บทที่ 2 ฟังก์ชัน สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน	4	1) – 4)
	5	1) – 6)
	6	1) – 6)
	11	1)*
	15	3)
	16	2), 4)
	17*	
	18*	
	22	2)
	23	1)
	24	1)
	25	1)

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน (ต่อ)	26	1)
	28	1)
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันในการแก้ปัญหา	7	
	8	1) – 3)
	9	
	10	1) – 3)
	11	1)* – 2)
	12	1) – 4)
	13	1) – 2)
	15	1) – 2), 4) – 5)
	16	1), 3), 5)
	17*	
	18*	
	19	
	20	
	21	
	22	1), 3) – 6)
	23	2) – 4)
	24	2) – 5)
	25	2) – 5)
	26	2) – 5)
	27	1) – 5)
	28	2) – 4)

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
โจทย์ฝึกทักษะ	1	1) – 4)
	2	1) – 3)
	3	
โจทย์ท้าทาย	14	

หมายเหตุ

แบบฝึกหัดท้ายบทข้อ 11. 1), 17 และ 18 สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียนมากกว่า 1 จุดมุ่งหมาย

2.6 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

- หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 นำเสนอการตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันโดยการพิจารณาจากกราฟ อย่างไรก็ตาม ยังสามารถตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันได้โดยใช้บทนิยามของฟังก์ชัน (บทนิยาม 1) โดยให้ x_1, x_2, y_1 และ y_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x_1, y_1) \in r$ และ $(x_2, y_2) \in r$ จะต้องแสดงว่า ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$ เช่น ในการตรวจสอบว่า $r_1 = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{x+1} \right\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ สามารถทำได้ดังนี้

ให้ x_1, x_2, y_1 และ y_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x_1, y_1) \in r_1, (x_2, y_2) \in r_1$ และ $x_1 = x_2$

$$\text{จาก} \quad y = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{จะได้} \quad y_1 = \frac{1}{x_1+1}$$

$$x_1 + 1 = \frac{1}{y_1}$$

$$x_1 = \frac{1}{y_1} - 1$$

$$\text{และ} \quad y_2 = \frac{1}{x_2+1}$$

$$x_2 + 1 = \frac{1}{y_2}$$

$$x_2 = \frac{1}{y_2} - 1$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad x_1 = x_2$$

$$\text{จะได้} \quad \frac{1}{y_1} - 1 = \frac{1}{y_2} - 1$$

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{y_2}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad y_1 = y_2$$

ดังนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน

และการตรวจสอบว่า $r_2 = \{(x, y) \mid x = y^2 - 2\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ สามารถทำได้ดังนี้

ให้ x_1, x_2, y_1 และ y_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x_1, y_1) \in r_2, (x_2, y_2) \in r_2$ และ $x_1 = x_2$

$$\text{จาก} \quad x = y^2 - 2$$

$$\text{จะได้} \quad x_1 = y_1^2 - 2$$

$$\text{และ} \quad x_2 = y_2^2 - 2$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad x_1 = x_2$$

$$\text{จะได้} \quad y_1^2 - 2 = y_2^2 - 2$$

$$y_1^2 = y_2^2$$

$$\text{นั่นคือ} \quad y_1 = y_2 \text{ หรือ } y_1 = -y_2$$

ดังนั้น r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

- การกำหนดรูปทั่วไปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลในรูป $f(x) = a^x$ สำหรับ x ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ จำเป็นต้องเพิ่มเงื่อนไขให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เพราะถ้า $a < 0$ จะทำให้ฟังก์ชันดังกล่าวไม่นิยามสำหรับบางค่าของ x เช่น เมื่อ $a = -1$ และ $x = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}} \text{ ซึ่งไม่นิยาม ส่วนกรณีที่ } a = 1 \text{ เป็นกรณีที่ไม่น่าสนใจ เพราะจะได้ฟังก์ชัน}$$

$$\text{คงตัว } f(x) = 1^x = 1$$

- สำหรับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งอยู่ในรูป $f(x) = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ นั้น เมื่อให้ $a = e$ เมื่อ e เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนอตรรกยะจำนวนหนึ่งซึ่งมีค่าประมาณ 2.71828182846 จะได้ $f(x) = e^x$ เรียกฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลนี้ว่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลธรรมชาติ (natural exponential function) ทั้งนี้ มีการใช้ประโยชน์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลธรรมชาติในการอธิบายพฤติกรรมของสิ่งต่าง ๆ เช่น

- o จำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง ซึ่งหาได้จาก

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

เมื่อ $n(t)$ แทน จำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง

n_0 แทน จำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาเริ่มต้น

r แทน อัตราการเพิ่มขึ้นของจำนวนแบคทีเรียต่อเวลา

- o มูลค่าของเงิน ณ เวลา t ใด ๆ ซึ่งหาได้จาก

$$V(t) = V_0 e^{-rt}$$

เมื่อ $V(t)$ แทน มูลค่าของเงิน ณ เวลา t

V_0 แทน มูลค่าของเงิน ณ เวลาเริ่มต้น

r แทน อัตราเงินเฟ้อต่อปี

- o ปริมาณสารที่เหลืออยู่ จากการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีที่มีครึ่งชีวิต h วัน ซึ่งหาได้จาก

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

เมื่อ $m(t)$ แทน ปริมาณสารกัมมันตรังสีที่เหลืออยู่ เมื่อเวลาผ่านไป t วัน

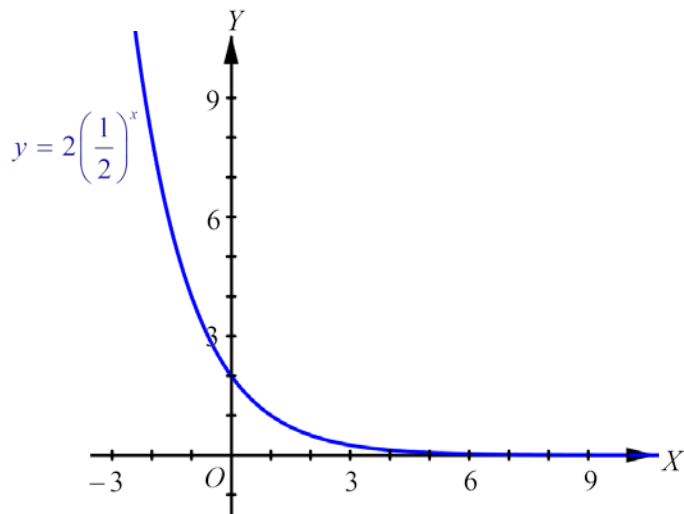
m_0 แทน ปริมาณสารกัมมันตรังสีที่เหลืออยู่ ณ จุดเริ่มต้น

และ $r = \frac{\ln 2}{h}$

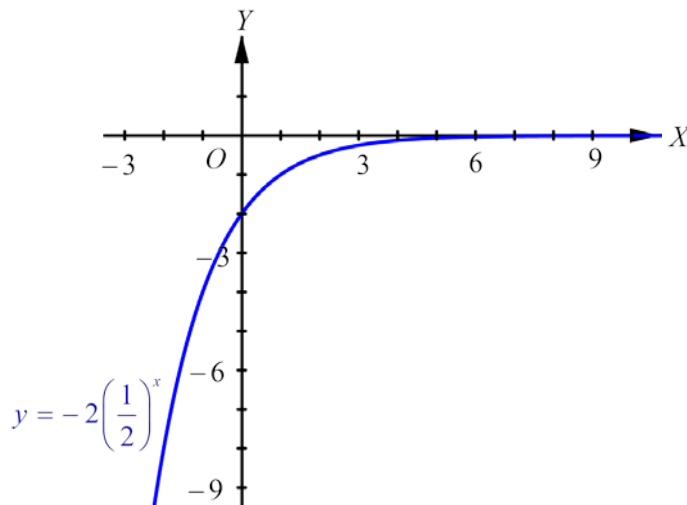
- นอกจากจะกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ เป็นรูปทั่วไปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ตามที่ระบุไว้ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แล้ว อาจพบหนังสือบางเล่มกำหนดรูปทั่วไปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลในรูป

$$f(x) = ab^x \text{ เมื่อ } a \neq 0, b > 0 \text{ และ } b \neq 1 \text{ เช่น } f(x) = 5(2)^x \text{ และ } g(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$$

ทั้งนี้ ค่าของ a ที่แตกต่างกันและค่าของ b ที่แตกต่างกัน จะทำให้กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $f(x) = ab^x$ แตกต่างกัน โดยเมื่อ $a > 0$ กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจะเว้าบน (concave upward) ดังรูปที่ 1 และเมื่อ $a < 0$ กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจะเว้าล่าง (concave downward) ดังรูปที่ 2

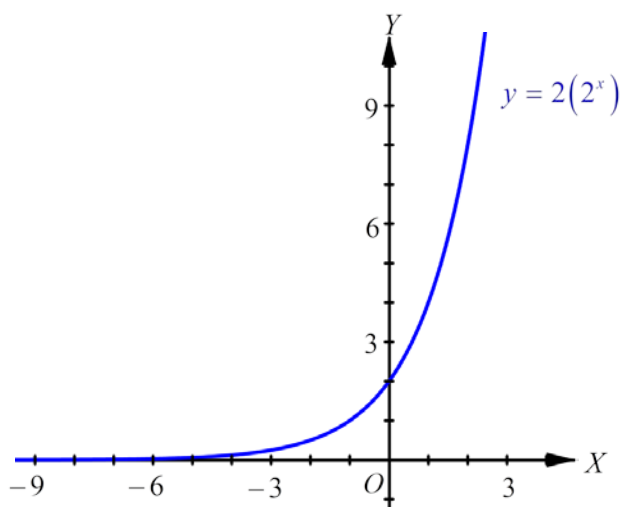


รูปที่ 1

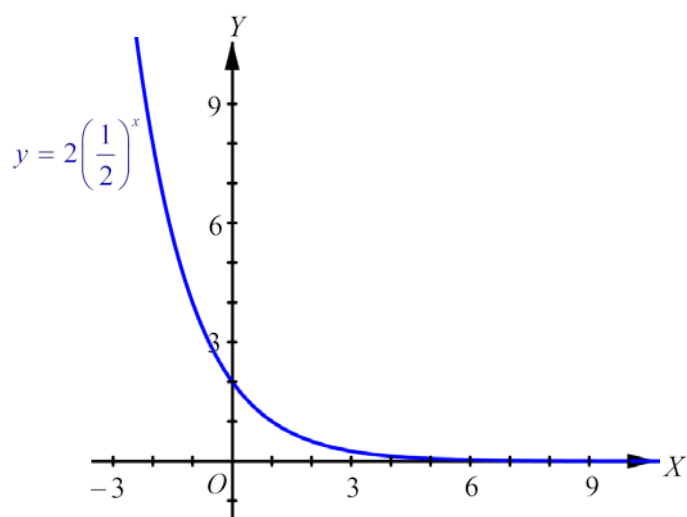


รูปที่ 2

และเมื่อ $b > 1$ กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจะเป็นกราฟแสดงการเพิ่มแบบชี้กำลัง (exponential growth) ดังรูปที่ 3 แต่เมื่อ $0 < b < 1$ กราฟจะแสดงการลดแบบชี้กำลัง (exponential decay) ดังรูปที่ 4



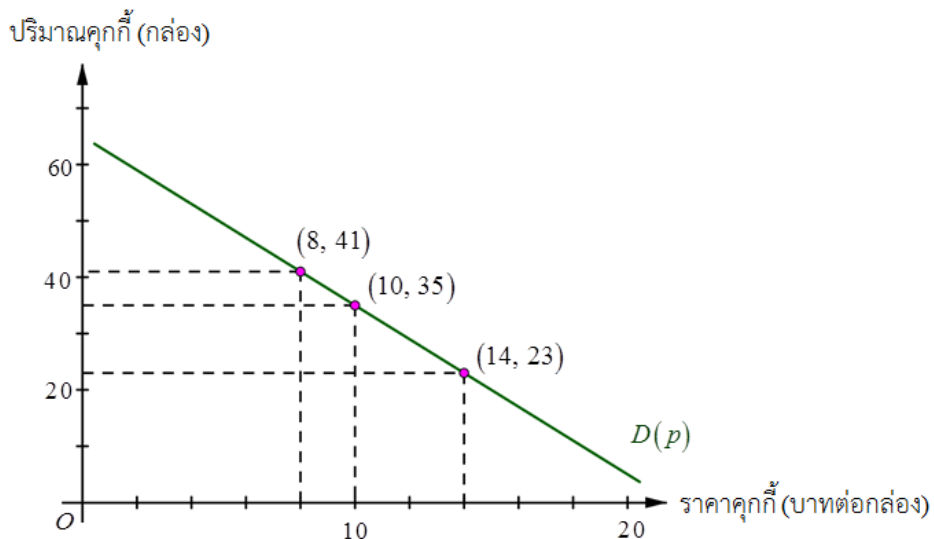
รูปที่ 3



รูปที่ 4

- ฟังก์ชันอุปสงค์ คือ ฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสินค้าที่ผู้บริโภคยินดีซื้อ และราคาต่อหน่วยของสินค้า ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กล่าวถึงฟังก์ชันอุปสงค์ $D(p)$ โดยที่ $D(p)$ คือปริมาณของสินค้าที่ผู้บริโภคยินดีซื้อเมื่อสินค้านั้นมีราคา p บาทต่อหน่วย กล่าวคือ ฟังก์ชันอุปสงค์มีราคาของสินค้าต่อหน่วยเป็นตัวแปรต้น และมีปริมาณของสินค้าที่ผู้บริโภคยินดีซื้อเป็นตัวแปรตาม หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ปริมาณของสินค้าที่ผู้บริโภคยินดีซื้อเป็นฟังก์ชันของราคาต่อหน่วยของสินค้า ถ้าให้ x แทนปริมาณของสินค้า จะได้สมการอุปสงค์ $x = D(p)$ เช่น ในตัวอย่างที่ 16 ของหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กำหนดสมการอุปสงค์ของคุกกี้คือ $x = 65 - 3p$

ซึ่งสามารถเขียนกราฟ โดยใช้แกนนอนเป็นแกนของราคา และใช้แกนตั้งเป็นแกนของปริมาณสินค้า จะได้กราฟของสมการอุปสงค์ของคุกกี้ ดังในรูปที่ 5



รูปที่ 5

จากรูปที่ 5 จะเห็นว่า เมื่อคุกกี้มีราคา 10 บาทต่อกล่อง จะมีผู้ยินดีซื้อคุกกี้

$$x = 65 - 3(10) = 35 \text{ กล่อง}$$

ถ้าเพิ่มราคาของคุกกี้เป็นกล่องละ 14 บาท จะมีผู้ยินดีซื้อคุกกี้ลดลงเหลือ

$$x = 65 - 3(14) = 23 \text{ กล่อง}$$

แต่ถ้าลดราคาของคุกกี้เป็นกล่องละ 8 บาท จะมีผู้ยินดีซื้อคุกกี้เพิ่มเป็น

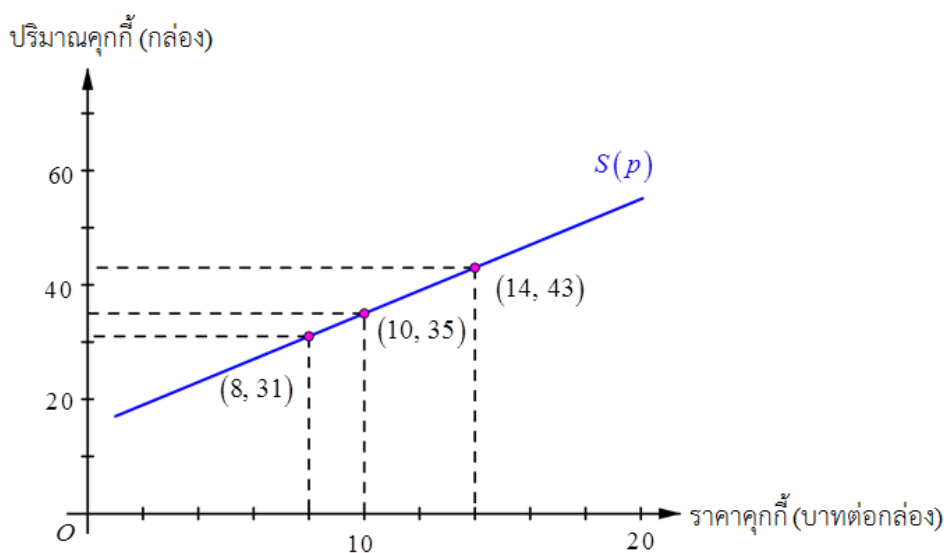
$$x = 65 - 3(8) = 41 \text{ กล่อง}$$

โดยทั่วไป สมการอุปสงค์ $x = D(p)$ เป็นแบบจำลองพฤติกรรมของผู้บริโภค คือเมื่อราคาสินค้าเพิ่มขึ้นผู้บริโภคจะซื้อน้อยลง และเมื่อราคาสินค้าลดลงผู้บริโภคจะซื้อมากขึ้น ภายใต้สมมติฐานว่าตัวแปรอื่น ๆ (เช่น รายได้หรือความชอบของผู้บริโภค) คงที่

ในทางตรงกันข้าม ฟังก์ชันอุปทานคือฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสินค้าที่ผู้ผลิตยินดีขายและราคาต่อหน่วยของสินค้า ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กล่าวถึงฟังก์ชันอุปทาน $S(p)$ โดยที่ $S(p)$ คือปริมาณของสินค้าที่ผู้ผลิตยินดีขายเมื่อสินค้านั้นมีราคา p บาทต่อหน่วย ถ้าให้ x แทนปริมาณของสินค้าที่ผู้ผลิตยินดีขาย จะได้สมการอุปทาน $x = S(p)$ เช่นในตัวอย่างที่ 16 ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กำหนดสมการอุปทานของคุกกี้คือ

$$x = 2p + 15$$

ซึ่งสามารถเขียนกราฟของสมการอุปทานได้ดังในรูปที่ 6



รูปที่ 6

จากรูปที่ 6 จะเห็นว่า เมื่อคุกกี้มีราคา 10 บาทต่อกล่อง ผู้ขายยินดีขายคุกกี้

$$x = 2(10) + 15 = 35 \text{ กล่อง}$$

ถ้าราคาคุกกี้เพิ่มเป็นกล่องละ 14 บาท ผู้ขายยินดีขายคุกกี้มากขึ้นเป็น

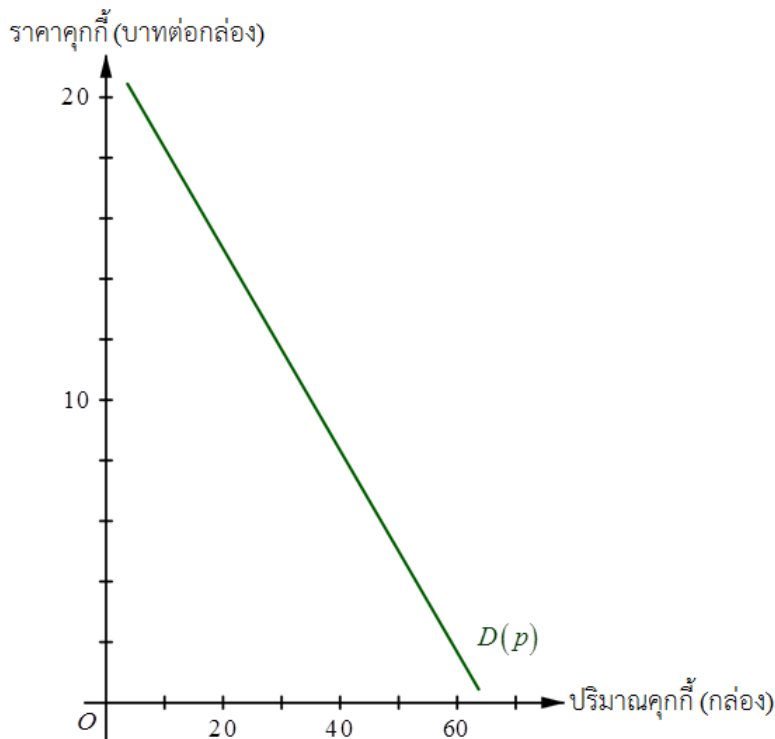
$$x = 2(14) + 15 = 43 \text{ กล่อง}$$

แต่ถ้าราคาคุกกี้ลดเหลือกล่องละ 8 บาท ผู้ขายยินดีขายคุกกี้ลดลงเป็น

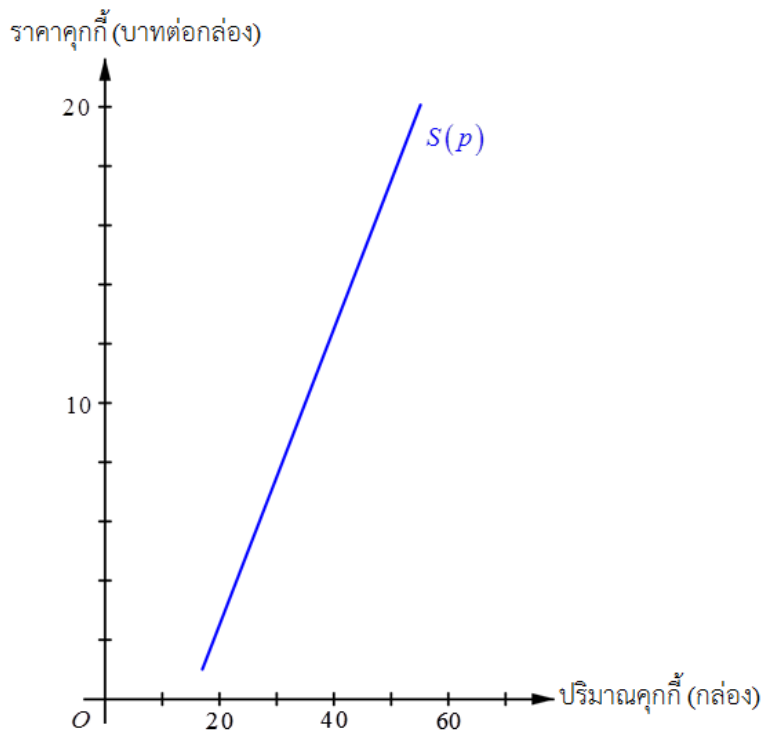
$$x = 2(8) + 15 = 31 \text{ กล่อง}$$

โดยทั่วไป สมการอุปทาน $x = S(p)$ เป็นแบบจำลองพฤติกรรมของผู้ผลิตหรือผู้ขาย คือเมื่อราคาสินค้าเพิ่มขึ้นผู้ขายจะต้องการขายมากขึ้น และเมื่อราคาสินค้าลดลงผู้ขายจะต้องการขายน้อยลง

อย่างไรก็ตาม นักเศรษฐศาสตร์มักเขียนกราฟของฟังก์ชันอุปสงค์และฟังก์ชันอุปทาน ที่แตกต่างจากที่นำเสนอในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กล่าวคือ นักเศรษฐศาสตร์จะให้แกนนอนแสดงปริมาณของสินค้า และใช้แกนตั้งแสดงราคาของสินค้า ดังนั้น จะได้กราฟของสมการอุปสงค์และสมการอุปทานของคุกกี้ในตัวอย่างที่ 16 ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นดังในรูปที่ 7 และ 8 ตามลำดับ



รูปที่ 7



รูปที่ 8

หมายเหตุ

กราฟของฟังก์ชันอุปสงค์และกราฟของฟังก์ชันอุปทานไม่จำเป็นต้องเป็นเส้นตรง อาจเป็นเส้นโค้งอื่น ๆ ก็ได้ ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันอุปสงค์และฟังก์ชันอุปทานนั้น ๆ

2.7 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 2 ฟังก์ชัน สำหรับรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

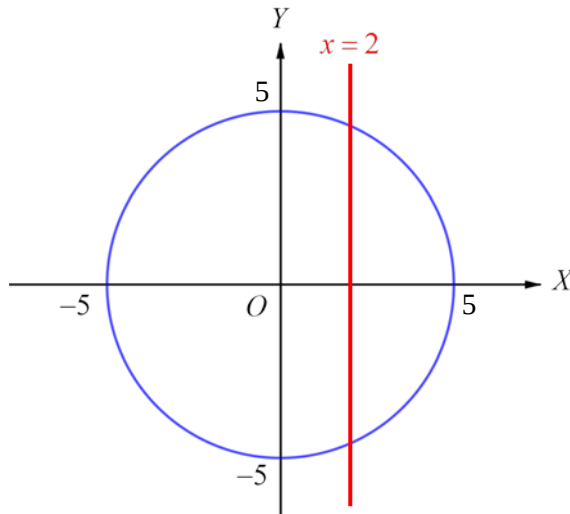
- จงตรวจสอบเซตของคู่อันดับที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่
 - $P = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (a, 4)\}$
 - $Q = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4)\}$
 - $R = \{(2, \sqrt{2}), (2, -\sqrt{2}), (3, \sqrt{3}), (3, -\sqrt{3})\}$
 - $S = \{(1, 1), (1, -1), (2, 2), (2, -2)\}$
- จงพิจารณาว่าข้อความ “ $y^2 = 25 - x^2$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $0 \leq x \leq 5$ ” เป็นจริงหรือเท็จ
- ให้ f เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง โดยที่ f จะเป็นฟังก์ชันคู่ (Even function) ก็ต่อเมื่อ $f(-x) = f(x)$ และ f จะเป็นฟังก์ชันคี่ (Odd function) ก็ต่อเมื่อ $f(-x) = -f(x)$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่
 - $f(x) = -3x^2 + 4$
 - $f(x) = 3x^3 + 4x$
 - $f(x) = -3|x| + 1$
 - $f(x) = 3|x| - 1$
- จงเขียนกราฟของ f เมื่อ $f(x) = 8 + 2x - x^2$ พร้อมทั้งหา
 - โดเมนและเรนจ์ของ f
 - จุดยอดของกราฟของ f
 - จุดที่กราฟตัดแกน X
 - ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ f
- มานีเปิดร้านขายอาหาร โดยได้กำไรจากการขายอาหารในแต่ละวันหลังหักค่าวัตถุดิบ ค่าจ้างพนักงาน และค่าสาธารณูปโภค หาได้จาก $f(x) = -3x^2 + 720x - 37,800$ เมื่อ x แทนจำนวนลูกค้าในแต่ละวัน มานีจะได้กำไรสูงสุดเมื่อมีลูกค้ากี่คน และได้กำไรสูงสุดเท่าใด

6. จงเขียนกราฟของ f เมื่อ $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ พร้อมทั้งหา
- 1) โดเมนและเรนจ์ของ f
 - 2) จุดที่กราฟตัดแกน X
 - 3) จุดที่กราฟตัดแกน Y
7. หนูนิดผลิตและจำหน่ายอาหารเสริม ซึ่งต้นทุนแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ ค่าบรรจุภัณฑ์กระป๋องละ 50 บาท ในการสั่งซื้อต้องสั่งซื้อเป็นรายเดือน เดือนละ 500 กระป๋อง และค่าวัตถุดิบโดยเฉลี่ย 100 กรัม ราคา 52.50 บาท โดยหนึ่งกระป๋องจะมีน้ำหนักสุทธิ 1 กิโลกรัม ถ้าหนูนิดตั้งราคาจำหน่ายอาหารเสริมนี้ไว้กระป๋องละ 800 บาท หนูนิดจะต้องจำหน่ายอาหารเสริมอย่างน้อยเดือนละกี่กระป๋องจึงจะไม่ขาดทุน
8. เชิดศักดิ์ลงทุนทำธุรกิจใหม่ โดยต้องใช้เงินลงทุนทั้งหมดใน 3 เดือนแรกของการทำธุรกิจ ซึ่งเดือนแรกเขาจะต้องใช้เงิน 20% ของเงินลงทุนทั้งหมด ในเดือนที่สองเขาจะต้องใช้เงิน 30% ของเงินลงทุนทั้งหมด และในเดือนที่สามเขาจะต้องใช้เงินอีก 20,000 บาท ทั้งนี้ ในเดือนที่สี่เขาจะได้เงินคืนมาซึ่งน้อยกว่า 25% ของเงินที่เขาลงทุนไปอยู่ 9,000 บาท
- 1) จงเขียนฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินที่เชิดศักดิ์ขาดทุนเมื่อเวลาผ่านไปสี่เดือน เมื่อกำหนดให้ f แทนฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินที่เชิดศักดิ์ขาดทุนเมื่อเวลาผ่านไปสี่เดือน และ x แทนจำนวนเงินที่เชิดศักดิ์ใช้ในการลงทุนทำธุรกิจนี้
 - 2) เชิดศักดิ์ลงทุนทำธุรกิจนี้เป็นจำนวนเงินทั้งหมดเท่าใด

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. 1) P ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน คือ $(a, 1)$ และ $(a, 4)$
- 2) Q เป็นฟังก์ชัน เพราะสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน Q ไม่มีตัวใดซ้ำกันเลย
- 3) R ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน เช่น $(2, \sqrt{2})$ และ $(2, -\sqrt{2})$
- 4) S ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน เช่น $(1, 1)$ และ $(1, -1)$

2. เขียนกราฟของ $y^2 = 25 - x^2$ ได้ดังนี้



พิจารณากราฟเมื่อ $0 \leq x \leq 5$ พบว่ามีเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ที่ตัดกราฟสองจุด เช่น
เส้นตรง $x = 2$ ตัดกราฟสองจุด คือ $(2, -\sqrt{21})$ และ $(2, \sqrt{21})$

นั่นคือ $y^2 = 25 - x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $0 \leq x \leq 5$

ดังนั้น ข้อความ “ $y^2 = 25 - x^2$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $0 \leq x \leq 5$ ” เป็นเท็จ

3. 1) จาก $f(x) = -3x^2 + 4$
จะได้ $f(-x) = -3(-x)^2 + 4$
 $= -3x^2 + 4$
 $= f(x)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคู่

- 2) จาก $f(x) = 3x^3 + 4x$
จะได้ $f(-x) = 3(-x)^3 + 4(-x)$
 $= -3x^3 - 4x$
 $= -(3x^3 + 4x)$
 $= -f(x)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคี่

$$\begin{aligned}
 3) \text{ จาก} \quad f(x) &= -3|x|+1 \\
 \text{จะได้} \quad f(-x) &= -3|-x|+1 \\
 &= -3|x|+1 \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคู่

$$\begin{aligned}
 4) \text{ จาก} \quad f(x) &= 3|x|-1 \\
 \text{จะได้} \quad f(-x) &= 3|-x|-1 \\
 &= 3|x|-1 \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคู่

$$\begin{aligned}
 4. \text{ เขียน } f(x) &= 8+2x-x^2 \text{ ให้อยู่ในรูป } f(x) = a(x-h)^2+k \text{ ได้ดังนี้} \\
 f(x) &= 8+2x-x^2 \\
 &= -(x^2-2x-8) \\
 &= -(x^2-2x+1)+9 \\
 &= -(x-1)^2+9
 \end{aligned}$$

จะได้ $a=-1$, $h=1$ และ $k=9$

เนื่องจาก $a < 0$ ดังนั้น กราฟของ f จะคว่ำลงและมีจุดยอดที่จุด $(1, 9)$

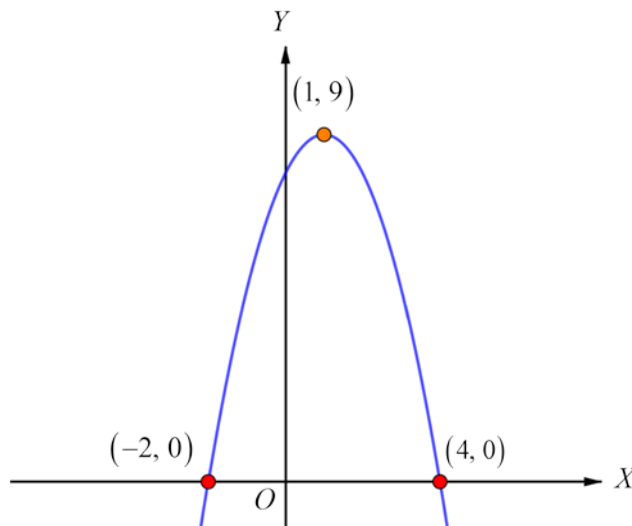
หาจุดตัดแกน X โดยกำหนดให้ $f(x)=0$

$$\begin{aligned}
 \text{นั่นคือ} \quad 8+2x-x^2 &= 0 \\
 x^2-2x-8 &= 0 \\
 (x-4)(x+2) &= 0
 \end{aligned}$$

$$x=4 \text{ หรือ } x=-2$$

ดังนั้น กราฟตัดแกน X ที่จุด $(4, 0)$ และ $(-2, 0)$

เขียนกราฟของ $f(x)=8+2x-x^2$ ได้ดังนี้



- 1) จากกราฟ พบว่า $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = (-\infty, 9]$
- 2) กราฟมีจุดยอดที่ $(1, 9)$
- 3) กราฟตัดแกน X ที่ $(-2, 0)$ และ $(4, 0)$
- 4) จุดยอดของกราฟเป็นจุดที่ f มีค่าสูงสุด และค่าสูงสุด คือ 9
5. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันของกำไรจากการขายอาหารในแต่ละวันของมานี้ โดยที่ $f(x) = -3x^2 + 720x - 37,800$ เมื่อ x แทนจำนวนลูกค้าในแต่ละวัน

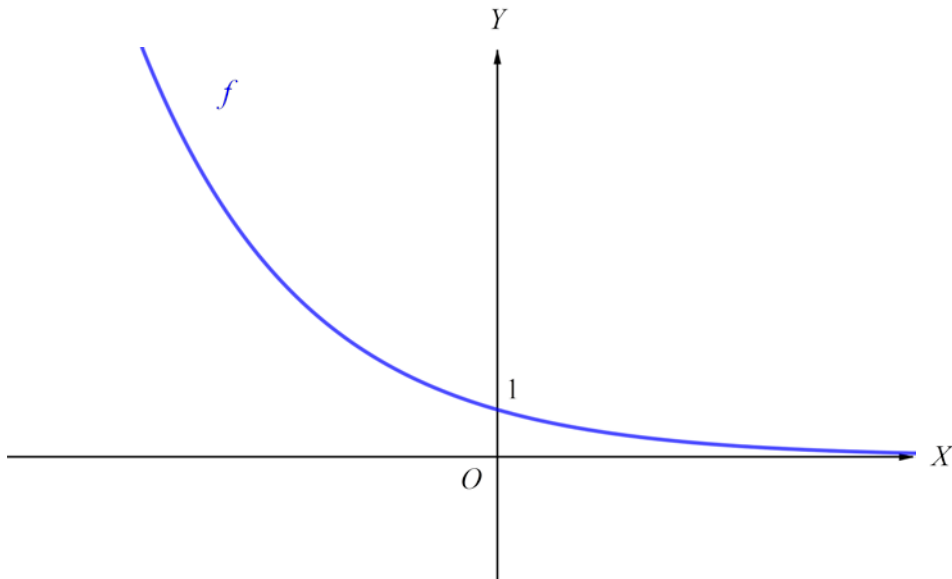
จาก
$$f(x) = -3x^2 + 720x - 37,800$$

จะได้
$$\begin{aligned} f(x) &= -3(x^2 - 240x + 14,400) + 5,400 \\ &= -3(x - 120)^2 + 5,400 \end{aligned}$$

นั่นคือ กราฟของ f เป็นพาราโบลาคว่ำที่มีจุดยอดที่ $(120, 5400)$

ดังนั้น มานี้จะได้กำไรสูงสุดเมื่อมีลูกค้า 120 คน และได้กำไรสูงสุด 5,400 บาท

6. เขียนกราฟของ $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ ได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้

- 1) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}^+$
 - 2) กราฟไม่ตัดแกน X
 - 3) จุดที่กราฟตัดแกน Y คือ $(0, 1)$
7. ให้ C แทนฟังก์ชันต้นทุนในการผลิตอาหารเสริม x กระป๋อง เนื่องจากต้นทุนในการผลิตอาหารเสริมแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ ค่าบรรจุภัณฑ์กระป๋องละ 50 บาท เดือนละ 500 กระป๋อง เป็นเงิน 25,000 บาท และค่าวัตถุดิบโดยเฉลี่ย 100 กรัม ราคา 52.50 บาท โดยหนึ่งกระป๋องจะมีน้ำหนักสุทธิ 1 กิโลกรัม เป็นเงินกระป๋องละ 525 บาท
- ดังนั้น $C(x) = 525x + 25,000$
- ให้ R แทนฟังก์ชันรายได้จากการจำหน่ายอาหารเสริม x กระป๋อง เนื่องจากหนูนิดตั้งราคาขายอาหารเสริมนี้ไว้กระป๋องละ 800 บาท
- ดังนั้น $R(x) = 800x$
- เนื่องจากจุดคุ้มทุน คือ จุดที่รายได้เท่ากับต้นทุน นั่นคือ $R(x) = C(x)$

จะได้

$$800x = 525x + 25,000$$

$$275x = 25,000$$

$$x \approx 90.91$$

ดังนั้น หน่วยจะต้องจำหน่ายอาหารเสริมอย่างน้อยเดือนละ 91 กระป๋อง จึงจะไม่ขาดทุน

8. 1) ให้ f แทนฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินที่เชตศักดิ์ขาดทุนเมื่อเวลาผ่านไปสี่เดือน
 x แทนจำนวนเงินที่เชตศักดิ์ใช้ในการลงทุนทำธุรกิจนี้

เนื่องจาก เมื่อเวลาผ่านไปสี่เดือน เชตศักดิ์จะได้เงินคืนซึ่งน้อยกว่า 25% ของจำนวนเงินที่เขาลงทุนไปอยู่ 9,000 บาท

นั่นคือ เชตศักดิ์ได้เงินคืน $\frac{25}{100}x - 9,000$ บาท หรือ $0.25x - 9,000$ บาท

จะได้ว่า เชตศักดิ์ขาดทุนไป $x - (0.25x - 9,000)$ บาท

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินที่เชตศักดิ์ขาดทุนเมื่อเวลาผ่านไปสี่เดือน คือ

$$f(x) = x - (0.25x - 9,000) \text{ หรือ } f(x) = 0.75x + 9,000$$

- 2) เนื่องจาก เชตศักดิ์ใช้เงินลงทุนใน 3 เดือนแรก ซึ่งเดือนแรกเขาใช้เงิน 20% ของเงินลงทุนทั้งหมด ในเดือนที่สองเขาใช้เงิน 30% ของเงินลงทุนทั้งหมด และในเดือนที่สามเขาต้องใช้เงิน 20,000 บาท

นั่นคือ ในเดือนที่สามเชตศักดิ์ใช้เงิน 50% ของเงินลงทุนทั้งหมด คิดเป็นเงิน 20,000 บาท

ดังนั้น จำนวนเงินทั้งหมดที่เชตศักดิ์ลงทุนไป คือ 40,000 บาท

บทที่ 3

ลำดับและอนุกรม

การศึกษาเกี่ยวกับลำดับและอนุกรมเป็นพื้นฐานสำคัญที่นำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ในชีวิตจริง เช่น การเพิ่มของประชากร การออมเงิน การผ่อนค่าสินค้า ซึ่งในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้นำเสนอเนื้อหาเรื่องลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต อนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิต และการประยุกต์ของลำดับและอนุกรม โดยเฉพาะอย่างยิ่งการประยุกต์ของลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับดอกเบี้ยยและมูลค่าของเงิน ซึ่งเป็นเรื่องสำคัญในชีวิตประจำวันและเป็นเนื้อหาสำคัญที่มีในหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ในบทเรียนนี้มุ่งเน้นให้นักเรียนบรรลุตัวชี้วัดตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้



ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง

ตัวชี้วัด

- เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้
- เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับดอกเบี้ยยและมูลค่าของเงินในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้แกนกลาง

- ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต
- อนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
- ดอกเบี้ย
- มูลค่าของเงิน
- ค่ารายงวด



จุดมุ่งหมาย

1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต
2. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา
4. ใช้ความรู้เกี่ยวกับดอกเบี้ยและมูลค่าของเงินในการแก้ปัญหา



ความรู้ก่อนหน้า

- เลขยกกำลัง
- ฟังก์ชัน



ipst.me/8455

3.1 เนื้อหาสาระ

1. บทนิยาม 1

ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

- สำหรับหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จะกล่าวถึงเฉพาะลำดับซึ่งแต่ละพจน์เป็นจำนวนจริงเท่านั้น และเรียกว่า ลำดับของจำนวนจริง

- ลำดับจำกัด** คือ ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

ลำดับอนันต์ คือ ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

กรณี a เป็นลำดับจำกัด เขียนแสดงลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

กรณี a เป็นลำดับอนันต์ เขียนแสดงลำดับด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

4. บทนิยาม 2

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n+1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า **ผลต่างร่วม**

ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ จะเป็นลำดับเลขคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว d ที่ $a_{n+1} - a_n = d$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

- พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$ เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรก และ d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต

6. บทนิยาม 3

ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n+1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วนนี้ว่า **อัตราส่วนร่วม**

ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ จะเป็นลำดับเรขาคณิต ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงตัว r ที่ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

- พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ เมื่อ a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิต

- ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์ จะเรียกการเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่า **อนุกรมจำกัด**

9. ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม นั่นคือ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

10. อนุกรมเลขคณิต คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต

11. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ หรือ $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

12. อนุกรมเรขาคณิต คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต

13. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$

14. ทฤษฎีบท 1

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น

ปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี จะได้ เงินรวม $P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

15. ถ้างลงทุน P บาท โดยได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง

เป็นเวลา n ปี กำหนดให้ $r = \frac{i}{100}$ แล้วเมื่อครบ n ปี เงินรวมที่ได้ คือ

$$S = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

เรียก S ว่ามูลค่าอนาคตของเงินต้น P

ในทางกลับกัน จะเรียก P ว่ามูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S โดย

$$P = S\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn}$$

16. การรับหรือจ่ายค่างวด มีลักษณะ 3 ประการ ดังนี้

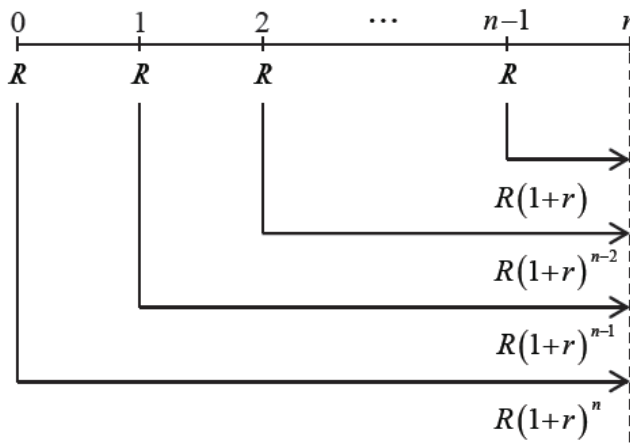
- 1) รับหรือจ่ายเท่ากันทุกงวด
- 2) รับหรือจ่ายติดต่อกันทุกงวด
- 3) รับหรือจ่ายตอนต้นงวดหรือสิ้นงวด

17. ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนต้นงวด รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

$$\text{ให้ } r = \frac{i}{100}$$

จะได้ แผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวด ดังนี้



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R(1+r) + R(1+r)^2 + \cdots + R(1+r)^n$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี n พจน์ พจน์แรก คือ $R(1+r)$ และอัตราส่วนร่วม คือ $1+r$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R(1+r)(1-(1+r)^n)}{1-(1+r)}$ ซึ่งเท่ากับ

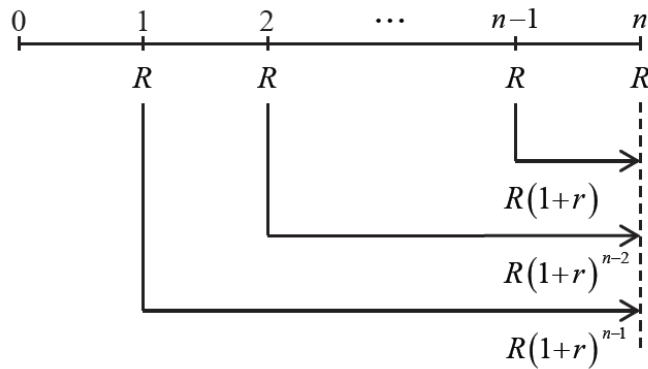
$$\frac{R(1+r)((1+r)^n - 1)}{r}$$

18. ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนสิ้นงวด รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

$$\text{ให้ } r = \frac{i}{100}$$

จะได้ แผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวด ดังนี้



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R + R(1+r) + R(1+r)^2 + \cdots + R(1+r)^{n-1}$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี n พจน์ พจน์แรก คือ R และอัตราส่วนร่วม คือ $1+r$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R(1-(1+r)^n)}{1-(1+r)}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{R((1+r)^n - 1)}{r}$

3.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

ลำดับ



กิจกรรม : โดเมนของลำดับ

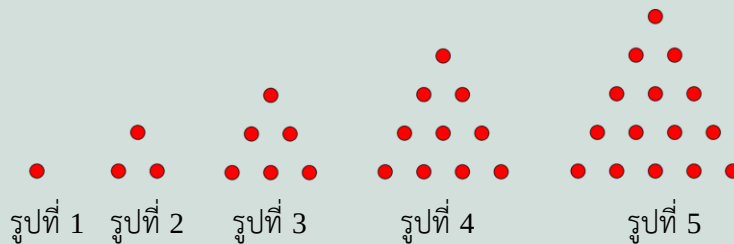
จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง ลำดับ โดยให้นักเรียนทำกิจกรรมนี้ก่อนการสอน เกี่ยวกับความหมายของลำดับและการเขียนแสดงลำดับ

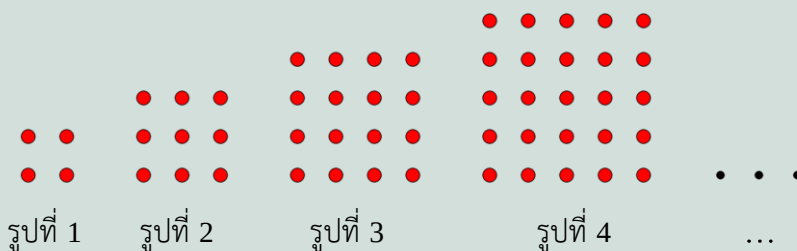
แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนพิจารณาแบบรูปต่อไปนี้ โดยสังเกตจำนวนจุดในแต่ละรูป

- แบบรูปชุดที่ 1



- แบบรูปชุดที่ 2



2. จากแบบรูปที่กำหนดให้ในข้อ 1 ครูให้นักเรียนเขียนเซตของคู่อันดับจากแบบรูปชุดที่ 1 และ 2 โดยให้สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับคือรูปที่ และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับคือจำนวนจุดในแต่ละรูป

แนวคำตอบ

- เซตของคู่อันดับจากแบบรูปชุดที่ 1 คือ $\{(1, 1), (2, 3), (3, 6), (4, 10), (5, 15)\}$
 - เซตของคู่อันดับจากแบบรูปชุดที่ 2 คือ $\{(1, 4), (2, 9), (3, 16), (4, 25), \dots\}$
3. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 2 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าเซตของคู่อันดับที่ได้ในข้อ 2 ตามแบบรูปชุดที่ 1 และ 2 เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

แนวคำตอบ

เซตของคู่อันดับที่ได้ในข้อ 2 ตามแบบรูปชุดที่ 1 และ 2 เป็นฟังก์ชัน เนื่องจากสมาชิกตัวหน้าของแต่ละคู่อันดับจับคู่กับสมาชิกตัวหลังเพียงตัวเดียวเท่านั้น

4. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 3 ครูให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 1 และ 2

แนวคำตอบ

- ฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 1 มีโดเมน คือ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ และเรนจ์ คือ $\{1, 3, 6, 10, 15\}$
 - ฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 2 มีโดเมน คือ $\{1, 2, 3, \dots\}$ และเรนจ์ คือ $\{4, 9, 16, \dots\}$
5. จากคำตอบที่ได้ในข้อ 4 ครูให้นักเรียนพิจารณาว่าโดเมนของฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปแต่ละชุด เป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์

แนวคำตอบ

- โดเมนของฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 1 เป็นเซตจำกัด
 - โดเมนของฟังก์ชันที่ได้จากแบบรูปชุดที่ 2 เป็นเซตอนันต์
6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบที่ได้ในข้อ 2 – 5

หมายเหตุ

เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมนี้แล้ว ครูควรสอนนักเรียนเกี่ยวกับบทนิยามของลำดับและการเขียนแสดงลำดับ โดยครูสามารถใช้ลำดับจากกิจกรรมนี้เป็นตัวอย่างของลำดับได้



กิจกรรม : ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

จุดมุ่งหมายของกิจกรรม

กิจกรรมนี้ใช้เพื่อนำเข้าสู่บทเรียน เรื่อง ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

แนวทางการดำเนินกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนพิจารณาลำดับต่อไปนี้

1) $1, 3, 7, \dots, 2^n - 1, \dots$

2) $6, 10, 14, 18, \dots, 4(n-1) + 6, \dots$

3) $1, 4, 16, 64, \dots, 4^{n-1}, \dots$

4) $0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \dots$

5) $1, 2, 3, 6, 12, \dots$

6) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \frac{1}{1024}, \dots$

7) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

8) $10, 6, 2, -2, -6, \dots$

9) $1, -1, 1, -1, \dots$

10) $2, 3, 5, 10, 20, \dots$

2. จากแต่ละลำดับที่กำหนดให้ในข้อ 1 ครูให้นักเรียนดำเนินการดังนี้

- หาผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกัน โดยนำพจน์ที่อยู่หลังลบด้วยพจน์ที่อยู่ก่อนหน้า เพื่อพิจารณาว่า มีลำดับในข้อใดบ้างที่ผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

แนวคำตอบ

ลำดับในข้อ 2), 4) และ 8) ซึ่งมีผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็น $4, \frac{2}{3}$ และ -4

ตามลำดับ

- หาอัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกัน โดยนำพจน์ที่อยู่หลังหารด้วยพจน์ที่อยู่ก่อนหน้า เพื่อพิจารณาว่า มีลำดับในข้อใดบ้างที่อัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

แนวคำตอบ

ลำดับในข้อ 3), 7) และ 9) ซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็น $4, \frac{1}{2}$ และ

-1 ตามลำดับ

3. จากข้อ 2 ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อให้ได้ข้อสรุปว่าลำดับที่กำหนดให้ในข้อ 1 มีลำดับที่ผลต่างของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัว และลำดับที่อัตราส่วนของพจน์ที่อยู่ติดกันเป็นค่าคงตัว

หมายเหตุ

เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมนี้แล้ว ครูควรสอนนักเรียนเกี่ยวกับบทนิยามของลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิต โดยครูสามารถใช้ลำดับจากกิจกรรมนี้เป็นตัวอย่างของลำดับได้



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนเข้าใจว่า ลำดับเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือเซตของจำนวนเต็มบวก ถึงแม้ว่าการเขียนแสดงลำดับจะไม่ปรากฏโดเมนก็ตาม
- การเขียนแสดงลำดับโดยเขียนแฉงพจน์ของลำดับนั้น ครูควรเขียนระบุชนิดของลำดับไว้ หรือเขียนพจน์ทั่วไปกำกับไว้เสมอ เนื่องจากมีบางลำดับที่มีพจน์แรก ๆ เหมือนกัน แต่มีพจน์ทั่วไปแตกต่างกัน เช่น

เขียนแฉงพจน์ของลำดับ $a_n = \frac{1}{n}$ ได้เป็น $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

และเขียนแฉงพจน์ของลำดับ $b_n = \frac{1}{12}(2n^2 - 3n + 13)$ ได้เป็น $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{11}{4}, \dots$

จะเห็นว่า ลำดับทั้งสองมีสามพจน์แรกเหมือนกัน แต่มีพจน์ต่อ ๆ ไปแตกต่างกัน เช่น $a_4 = \frac{1}{4}$

แต่ $b_4 = \frac{11}{4}$

ดังนั้น การเขียนแฉงพจน์จึงต้องเขียนพจน์ทั่วไปกำกับไว้เป็น $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ และ

$b_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{12}(2n^2 - 3n + 13), \dots$

- เนื่องจากการกำหนดพจน์แรก ๆ แล้วให้หาพจน์ทั่วไปของลำดับนั้น นักเรียนอาจได้พจน์ทั่วไปที่แตกต่างกัน ดังนั้น หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในหัวข้อ 3.1.1 จึงกล่าวถึงเฉพาะการหาพจน์แรก ๆ จากพจน์ทั่วไปที่กำหนดให้ โดยไม่กล่าวถึงการหาพจน์ทั่วไปจากพจน์แรก ๆ ที่กำหนดให้ ส่วนการหาพจน์ทั่วไปจากพจน์แรก ๆ ที่กำหนดให้ นั้น ได้กล่าวถึงเฉพาะในกรณีที่ศึกษาเกี่ยวกับลำดับใดลำดับหนึ่งเท่านั้น
- ลำดับที่มีทุกพจน์เป็นจำนวนเดียวกัน เช่น $1, 1, 1, \dots$ เป็นทั้งลำดับเลขคณิตที่มี $d = 0$ และลำดับเรขาคณิตที่มี $r = 1$
- การระบุว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับเลขคณิต หรือเป็นลำดับเรขาคณิต ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบ
- หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จะกล่าวถึงเพียงลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต แต่ยังมีลำดับอื่น ๆ ซึ่งนักเรียนจะได้พบในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงขึ้นไป เช่น ลำดับฮาร์โมนิก ลำดับแกว่งกวัด ลำดับฟีโบนัชชี
- ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณช่วยในการคำนวณเกี่ยวกับลำดับ เช่น ตัวอย่างที่ 13 และ 16



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- การหาพจน์ที่หายไปของลำดับเรขาคณิตที่กำหนดไว้ในแบบฝึกหัด 3.1.3 ข้อ 10 นักเรียนจะพบว่าบางลำดับมีอัตราส่วนร่วมได้มากกว่า 1 ค่า เช่น ในข้อ 2) และ 3) ทำให้พจน์ที่หายไปมีได้มากกว่า 1 คำตอบ
- ในแบบฝึกหัด 3.1.3 ข้อ 11 เนื่องจาก a^2 เป็นจำนวนจริงบวก จึงได้ว่า a เป็นได้ทั้งจำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบ

อนุกรม



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กล่าวถึงเฉพาะอนุกรมจำกัด แต่เนื่องจากได้กล่าวถึงลำดับอนันต์ไว้ในหัวข้อก่อนหน้านี้ ดังนั้นในการจัดการเรียนการสอนครูอาจแนะนำให้นักเรียนรู้จักอนุกรมอนันต์ด้วยก็ได้ โดยอธิบายว่าอนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัด เรียกว่า อนุกรมจำกัด และอนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์ เรียกว่า อนุกรมอนันต์ แต่ในบทเรียนจะเน้นเฉพาะอนุกรมจำกัดเท่านั้น
- การหาผลบวก n พจน์ของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิตนั้น บางครั้งอาจใช้วิธีเขียนแจกพจน์ทั้งหมดแล้วจึงหาผลบวก อย่างไรก็ตามครูควรสนับสนุนให้นักเรียนหาผลบวก n พจน์ของอนุกรมเลขคณิตโดยใช้ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 22 – 24 และหาผลบวก n พจน์ของอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 26 – 28
- การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ เมื่อ $r \neq 1$ สามารถพิจารณาได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ $r < 1$ (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 27) และกรณีที่ $r > 1$ (ดังแสดงในตัวอย่างที่ 26) โดยจะเห็นว่า สามารถหาผลบวก n พจน์แรกโดยใช้ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ แต่ในตัวอย่างที่ 26 จะจัดรูปใหม่เพื่อให้ตัวส่วนไม่เป็นจำนวนจริงลบ
- ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตที่มี $r = 1$ คือ $S_n = na_1$
- ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณช่วยในการคำนวณเกี่ยวกับอนุกรม เช่น ตัวอย่างที่ 30

การประยุกต์ของลำดับและอนุกรม



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรทบทวนเกี่ยวกับการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี (ปีละ 1 ครั้ง) ซึ่งนักเรียนได้เรียนแล้วในเรื่องเลขยกกำลัง ซึ่งอยู่ในบทที่ 1 เลขยกกำลัง ของหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
- ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณช่วยในการคำนวณเพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับลำดับและอนุกรม ทั้งนี้ ครูควรเน้นกระบวนการหาคำตอบของนักเรียนมากกว่าคำตอบสุดท้าย
- ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนเขียนแผนภาพประกอบการแก้ปัญหาเกี่ยวกับมูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต และค่างวด
- ในหัวข้อการประยุกต์ของลำดับและอนุกรม r จะแทนอัตราดอกเบี้ยแบบทบต้นต่องวด ซึ่งแตกต่างจาก r ที่เป็นอัตราส่วนร่วมที่กล่าวถึงในหัวข้อลำดับเรขาคณิต
- ในการกล่าวถึงดอกเบี้ยทบต้น (ตามทฤษฎีบท 1) มูลค่าปัจจุบัน และมูลค่าอนาคตนั้น อัตราดอกเบี้ย $i\%$ จะเป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปี แต่ในการกล่าวถึงค่างวดนั้น $i\%$ จะเป็นอัตราดอกเบี้ยต่องวด
- การประยุกต์ของลำดับและอนุกรมในบทนี้จะมีตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับการเงิน ซึ่งครูไม่ควรละเลยการสอนเนื้อหาดังกล่าว เนื่องจากเป็นพื้นฐานที่นักเรียนควรรู้



ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

- เนื่องจากนักเรียนไม่ได้เรียนเกี่ยวกับการใช้สมบัติของลอการิทึมในการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล ดังนั้น การแก้สมการ $(1.04)^n = 3$ ในแบบฝึกหัด 3.3 ข้อ 1 2) ให้ใช้การหาค่าประมาณของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งจะสังเกตได้ว่า $(1.04)^{28} \approx 2.9987$ และ $(1.04)^{29} \approx 3.1187$ แต่เนื่องจาก n แทนจำนวนปีที่น้อยที่สุดที่จะทำให้มีเงินเพิ่มขึ้นอย่างน้อยสามเท่าของเงินต้น ดังนั้น $n = 29$ จึงเป็นคำตอบของโจทย์ปัญหานี้

3.3 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนมีจุดมุ่งหมายเพื่อปรับปรุงการเรียนรู้และพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 3 ลำดับและอนุกรม ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
การหาพจน์ในลำดับจากพจน์ทั่วไปที่กำหนด	3.1.1	ข้อ 1 – 2
การหาพจน์ในลำดับเลขคณิตและพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต	3.1.2	ข้อ 1 – 13
การประยุกต์ของลำดับเลขคณิต	3.1.2	ข้อ 14 – 15
การหาพจน์ในลำดับเรขาคณิตและพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต	3.1.3	ข้อ 1 – 12
การประยุกต์ของลำดับเรขาคณิต	3.1.2	ข้อ 13 – 14
การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต	3.2.1	ข้อ 1 – 8
การประยุกต์ของการอนุกรมเลขคณิต	3.2.1	ข้อ 9 – 10
การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต	3.2.2	ข้อ 1 – 3
การประยุกต์ของการอนุกรมเรขาคณิต	3.2.2	ข้อ 4 – 7
การประยุกต์ของลำดับและอนุกรมเกี่ยวกับดอกเบี้ยและมูลค่าของเงิน	3.3	ข้อ 1 – 11

3.4 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีจุดมุ่งหมายว่าเมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 3 ลำดับและอนุกรม แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต
2. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา
4. ใช้ความรู้เกี่ยวกับดอกเบี้ยและมูลค่าของเงินในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย ซึ่งประกอบด้วยโจทย์ฝึกทักษะที่มีความน่าสนใจและโจทย์ท้าทายครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้ แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 บทที่ 3 ลำดับและอนุกรม สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต	1	1) – 4)
	2	1) – 6)
	3	
	4	
	5	
	9	1) – 6)
	10	
	11	
	12	
	13	

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
1. หาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต (ต่อ)	18	
	19	
	20	
2. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต	22	
	23	1) – 3)
	24	
	25	
	26	
	31	
	32	1) – 3)
	33	
	34	1)
	40	1) – 6)
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา	6	
	7	
	8	
	12	
	14	1) – 2)
	15	
	16	
	17	
	21	1) – 2)
	27	

จุดมุ่งหมาย	แบบฝึกหัดท้ายบทข้อที่	
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมในการแก้ปัญหา (ต่อ)	28	1) – 2)
	29	1) – 6)
	30	
	34	2)
	35	
	36	
	37	1) – 3)
	38	1) – 4)
4. ใช้ความรู้เกี่ยวกับดอกเบี้ยและมูลค่าของเงินในการแก้ปัญหา	41	
	42	
	43	
	44	
	45	
	46	
	47	
	48	
	49	
	50	
	52	
	53	
โจทย์ท้าทาย	39	1) – 3)
	51	

3.5 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

- นอกจากลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต ซึ่งได้กล่าวถึงในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แล้ว ยังมีลำดับอื่น ๆ ซึ่งมีชื่อเฉพาะโดยตั้งตามชื่อนักคณิตศาสตร์ที่เป็นผู้ค้นพบลำดับนั้น หรือมีชื่อตามลักษณะของลำดับ

ตัวอย่างลำดับที่มีชื่อเฉพาะ

- 1) ลำดับฮาร์โมนิก (Harmonic sequence) คือ ลำดับของจำนวนจริงที่มีส่วนกลับของจำนวนจริงเหล่านั้นเป็นลำดับเลขคณิต เช่น $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ เป็นลำดับฮาร์โมนิก เพราะว่า $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต
- 2) ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) คือ ลำดับ F_n ซึ่ง $F_0 = 0, F_1 = 1$ และ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$ เรียกแต่ละพจน์ของลำดับฟีโบนัชชีว่า จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci number) ซึ่งได้แก่ $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$
- 3) ลำดับลูคัส (sequence of Lucas numbers) คือ ลำดับ L_n ซึ่ง $L_0 = 2, L_1 = 1$ และ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$ เรียกแต่ละพจน์ของลำดับลูคัสว่า จำนวนลูคัส (Lucas number) ซึ่งได้แก่ $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots$

ข้อสังเกต ลำดับฟีโบนัชชีและลำดับลูคัสเป็นลำดับที่กำหนดโดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดเดียวกัน กล่าวคือ แต่ละพจน์ของลำดับได้จากผลบวกของสองพจน์ก่อนหน้า โดยการกำหนดสองพจน์แรกของลำดับทั้งสองต่างกัน ทำให้ลำดับทั้งสองแตกต่างกัน

ตัวอย่างลำดับที่มีชื่อตามลักษณะของลำดับ

- 1) ลำดับแกว่งกวัด (Oscillating sequence) คือ ลำดับลู่ออกที่มีลักษณะของกราฟขึ้นและลงสลับกันโดยไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง เช่น

$$2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots$$

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}$$

- 2) ลำดับสลับ (Alternating sequence) คือ ลำดับซึ่งประกอบด้วยพจน์ที่เป็นจำนวนบวก และจำนวนลบสลับกัน เช่น

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}$$

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots$$

ข้อสังเกต ลำดับสลับเป็นกรณีหนึ่งของลำดับแกว่งกวัด

- นอกจากอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งได้กล่าวถึงในหนังสือเรียนรายวิชา พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แล้ว ยังมีอนุกรมจำกัดอื่น ๆ อีก เช่น

- 1) อนุกรมโทรทรรศน์ (Telescopic series)

สมมติว่าต้องการหาผลบวก

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

ถ้าสามารถเขียน a_i ให้อยู่ในรูป $a_i = b_{i+1} - b_i$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

เมื่อ b_i เป็นลำดับใด ๆ จะได้ว่า

$$S_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n-1}) + (b_{n+1} - b_n)$$

$$= b_{n+1} - b_1$$

อนุกรมที่มีสมบัตินี้เรียกว่า อนุกรมโทรทรรศน์ เช่น

$$3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$$

ให้ $a_i = 2i + 1 = i^2 + 2i + 1 - i^2 = (i + 1)^2 - i^2$ และ $b_i = i^2$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) &= (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + [(n + 1)^2 - n^2] \\ &= (n + 1)^2 - 1 \\ &= b_{n+1} - b_1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$ เป็นอนุกรมโทรทรรศน์

- 2) อนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิต (Arithmetic-Geometric Series)

อนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตจำกัด คือ อนุกรมในรูป

$$a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + \dots + a_n r^{n-1}$$

เมื่อ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต และ $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ เป็นลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่างอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตจำกัด เช่น

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$$

จะเห็นว่า ลำดับดังกล่าวเขียนได้ในรูป $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

โดยมี $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{2n-1}{2}$ เป็นลำดับเลขคณิต

และ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}$ เป็นลำดับเรขาคณิต

ดังนั้น $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$ เป็นอนุกรมเลขคณิต-เรขาคณิตจำกัด

- นอกจากอนุกรมจำกัดซึ่งได้กล่าวไว้ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ยังมีอนุกรมอนันต์ (infinite series) ซึ่งนิยามได้ดังนี้

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์

เรียกการเขียนแสดงการบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ ว่าอนุกรมอนันต์

- ค่างวดที่กล่าวถึงในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตรงกับคำศัพท์ภาษาอังกฤษทางการเงินว่า annuity และ installment อย่างไรก็ตามทั้งสองคำนี้มีความหมายแตกต่างกัน

สำหรับ annuity นั้น เป็นค่างวดที่ชำระเป็นจำนวนเงินที่เท่ากันในระยะเวลาที่เท่ากัน ซึ่งมักใช้ในกรณีของการออมเงิน เงินสะสมจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ตามระยะเวลาที่ผ่านไป และจะมีการคิดดอกเบี้ยในช่วงระยะเวลาที่มีการฝากเงินด้วย เช่น การฝากเงินเข้าบัญชีเงินฝากของธนาคารทุกเดือน เดือนละ 1,000 บาท เป็นเวลา 6 เดือน โดยให้ดอกเบี้ยในอัตรา 6% ต่อปีนั้น เงินสะสมในบัญชีจะเพิ่มขึ้นทุก ๆ เดือนซึ่งเป็นกำหนดชำระค่างวด จนกระทั่งครบ 6 เดือน ซึ่งเป็นระยะเวลาชำระค่างวดทั้งหมดที่กำหนดไว้

ส่วน installment นั้น มีความหมายใกล้เคียงกับ annuity แต่เป็นค่างวดที่ชำระเป็นจำนวนเงินที่เท่ากันในระยะเวลาที่เท่ากัน ซึ่งมักใช้ในกรณีของการชำระหนี้ ค่าสินค้า หรือบริการ โดยก่อนที่จะมีการชำระค่างวดสำหรับงวดแรก ผู้ชำระค่างวดจะมียอดเงินรวมที่ต้องชำระคืน ซึ่งอาจมาจากผลรวมของราคาสินค้าและดอกเบี้ย แต่ยอดเงินรวมที่ต้องชำระคืนจะลดลงเรื่อย ๆ ตามระยะเวลาที่ผ่านไป เช่น การชำระเงินเพื่อจ่ายหนี้ซึ่งมียอดเงินรวมที่ต้องชำระคืน 10,000 บาท โดยชำระคืนทุกเดือน เดือนละ 2,000 บาท เป็นเวลา 5 เดือนนั้น จะเห็นว่าก่อนที่จะเริ่มชำระเงินงวดแรก ผู้ชำระเงินจะมียอดหนี้รวมทั้งหมด 10,000 บาท แต่เมื่อเริ่มชำระเงินงวดที่ 1 ยอดหนี้จะลดลง และจะลดลงเรื่อย ๆ ในทุก ๆ เดือนซึ่งเป็นกำหนดชำระค่างวด จนกระทั่งครบ 5 เดือน ซึ่งเป็นระยะเวลาชำระค่างวดทั้งหมดที่กำหนดไว้

3.6 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 3 ลำดับและอนุกรม สำหรับรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. ให้สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งเป็น 8, $a+1$, $b-2$ และ 23 ตามลำดับ จงหา $a+b$
2. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวกสามจำนวนซึ่งเป็นสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต ถ้า b เป็นสองเท่าของ a แล้วจงพิจารณาว่าข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ
 - 1) ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้ คือ a
 - 2) $a+b+c=3b$
3. ถ้าลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 5 คือ 18 และพจน์ที่ 10 คือ 38 จงหาพจน์ที่ 15
4. ผลบวกของห้าพจน์แรกของลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่งเป็น 100 ถ้าลำดับเลขคณิตนี้มีพจน์ที่ 100 เป็น -174 แล้วจงหาผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้
5. ให้ a_n เป็นพจน์หนึ่งในลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็นจำนวนจริงลบ ถ้าลำดับเรขาคณิตนี้มีพจน์ที่ 6 คือ 8 และพจน์ที่ 8 คือ 2 แล้ว $\frac{1}{8}$ เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับเรขาคณิตนี้
6. ลำดับเรขาคณิตลำดับหนึ่งมีผลคูณของสามพจน์แรกเป็น 27 และผลบวกของสามพจน์แรกเป็น 9 จงหาอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้
7. จงหาว่ามีจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 300 ถึง 500 ที่หารด้วย 3 ลงตัว แต่หารด้วย 9 ไม่ลงตัว ทั้งหมดกี่จำนวน
8. ถ้าลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 10 เป็น 95 และผลบวก 10 พจน์แรกเป็น 500 จงหาผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้
9. ถ้าลำดับเลขคณิตมีพจน์ที่ 3 เป็น 12 พจน์ที่ 30 เป็น 93 และผลบวก n พจน์แรกเป็น 1995 แล้ว จงหา n

10. ให้ S_n แทนผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต ถ้า $S_5 = 100$ และ $S_{10} = 500$ แล้ว จงหา a_{50}
11. จงหาผลบวกของจำนวนเต็มตั้งแต่ 199 ถึง 399 ที่หารด้วย 3 ลงตัว
12. จงหาผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต $4, 4 \cdot 3^1, 4 \cdot 3^2, \dots, 4 \cdot 3^6$
13. โรงละครแห่งหนึ่งมีพื้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีแถวที่นั่งเรียงลำดับตัวอักษรจากแถว A ซึ่งอยู่หลังสุดไปแถว J ซึ่งอยู่หน้าสุด โดยแถว A มีที่นั่งชมละคร 8 ที่นั่ง และแถวถัด ๆ ไป จะเพิ่มจำนวนที่นั่งจากแถวก่อนหน้า 2 ที่นั่งเสมอ โรงละครนี้สามารถจุผู้ชมได้กี่ที่นั่ง
14. กรซื้อรถยนต์คันหนึ่งราคา 549,000 บาท โดยร้านรับซื้อรถยนต์มือสองรับซื้อรถยนต์รุ่นนี้ โดยคิดค่าเสื่อมราคาในอัตรา 15% ต่อปี ถ้ากรตัดสินใจจะขายรถคันนี้ในปลายปีที่ 7 เขาจะขายรถคันนี้ได้ในราคาเท่าใด
15. ก้อยและนางวางแผนจะซื้อของขวัญให้คุณพ่อและคุณแม่ ก้อยจึงเริ่มออมเงินในเดือน มกราคม 2562 เป็นเงิน 250 บาท และจะออมเงินเพิ่มขึ้นทุกเดือน เดือนละ 50 บาท ส่วนนางเริ่มออมเงินในเดือนมีนาคม 2562 เป็นเงิน 20 บาท และจะออมเงินเดือนถัดไปเป็นสองเท่าของเงินที่ออมในเดือนก่อนหน้า เมื่อสิ้นเดือนธันวาคม 2562 ก้อยและนางจะมีเงินออมรวมกันกี่บาท
16. กิ่งแก้วฝากเงินจำนวนหนึ่งไว้กับธนาคารเป็นเวลา 10 ปี โดยไม่มีการฝากหรือถอนในระหว่างนั้น ซึ่งใน 5 ปีแรก ธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นในอัตรา 1% ต่อปี และใน 5 ปีหลัง ธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นในอัตรา 2% ต่อปี ถ้ากิ่งแก้วมีเงินในบัญชี ณ สิ้นปีที่ 10 อยู่ 50,000 บาท จงหาว่ากิ่งแก้วเริ่มต้นฝากเงินไว้เท่าใด
17. กุ๊กไก่ซื้อคอมพิวเตอร์ราคา 12,000 บาท โดยเลือกผ่อนชำระเป็นรายเดือนทุกสิ้นเดือน เดือนละเท่ากันเป็นเวลา 10 เดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว
 - 1) กุ๊กไก่จะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด
 - 2) ถ้ากุ๊กไก่ได้รับค่าใช้จ่าจากผู้ปกครองเดือนละ 5,000 บาท กุ๊กไก่จะเหลือเงินหลังผ่อนชำระค่าคอมพิวเตอร์แล้วเดือนละเท่าใด

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. จากสี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ 8, $a+1$, $b-2$ และ 23

วิธีที่ 1 จะได้ $a_1 = 8$ และ $d = a_2 - a_1 = (a+1) - 8 = a - 7$

$$\text{จาก} \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้} \quad b-2 = 8 + (3-1)(a-7)$$

$$\text{นั่นคือ} \quad 2a - b = 4 \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{และ} \quad 23 = 8 + (4-1)(a-7)$$

$$\text{นั่นคือ} \quad a = 12$$

แทน a ด้วย 12 ใน (1) จะได้ $b = 20$

$$\text{ดังนั้น} \quad a + b = 12 + 20 = 32$$

วิธีที่ 2 จะได้ $a_1 = 8$ และ $d = a_2 - a_1 = (a+1) - 8 = a - 7$

$$\text{จาก} \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้} \quad 23 = 8 + (4-1)d$$

$$d = 5$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 8, 13, 18 และ 23

$$\text{จะได้} \quad a+1 = 13$$

$$a = 12$$

$$\text{และ} \quad b-2 = 18$$

$$b = 20$$

$$\text{ดังนั้น} \quad a + b = 12 + 20 = 32$$

วิธีที่ 3 จะได้ $d = a_2 - a_1 = (a+1) - 8 = a - 7$

$$\text{และ} \quad d = a_4 - a_3 = 23 - (b-2) = 25 - b$$

$$\text{นั่นคือ} \quad a - 7 = 25 - b$$

$$\text{จะได้} \quad a + b = 25 + 7 = 32$$

2. จากสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ a , b และ c

1) เนื่องจาก b เป็นสองเท่าของ a

$$\text{นั่นคือ} \quad b = 2a$$

จะได้ สามพจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ a , $2a$ และ c

นั่นคือ ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $2a - a = a$

ดังนั้น ข้อความ “ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้ คือ a ” เป็นจริง

- 2) เนื่องจากลำดับเลขคณิตนี้มีผลต่างร่วม คือ a

จะได้ $c = 3a$

จะได้

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + 2a + 3a \\ &= 6a \\ &= 3(2a) \\ &= 3b \end{aligned}$$

ดังนั้น ข้อความ “ $a + b + c = 3b$ ” เป็นจริง

3. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $18 = a_1 + (5-1)d \quad \text{----- (1)}$

และ $38 = a_1 + (10-1)d \quad \text{----- (2)}$

จาก (1) และ (2) จะได้ $a_1 = 2$ และ $d = 4$

ดังนั้น $a_{15} = 2 + (15-1)(4) = 58$

นั่นคือ พจน์ที่ 15 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 58

4. **วิธีที่ 1** จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

และ

$$a_5 = a_1 + 4d$$

เนื่องจาก ผลบวกของห้าพจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้เป็น 100

จะได้

$$100 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$100 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d)$$

$$100 = 5a_1 + 10d$$

นั่นคือ

$$20 = a_1 + 2d \quad \text{----- (1)}$$

เนื่องจาก ลำดับเลขคณิตนี้มีพจน์ที่ 100 เป็น -174

จะได้

$$-174 = a_1 + (100-1)d$$

นั่นคือ

$$-174 = a_1 + 99d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $a_1 = 24$ และ $d = -2$

ดังนั้น ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้เป็น -2

วิธีที่ 2 ให้หาพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$
เมื่อ d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad 100 &= (a - 2d) + (a - d) + a + (a + d) + (a + 2d) \\ 5a &= 100 \\ a &= 20 \end{aligned}$$

นั่นคือ พจน์ที่ 3 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 20

เนื่องจาก พจน์ที่ 100 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ -174 และ $a_{100} = a_1 + 99d$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad -174 &= (a_3 - 2d) + 99d \\ -174 &= (20 - 2d) + 99d \\ 97d &= -194 \\ d &= -2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้เป็น -2

$$\begin{aligned} 5. \quad \text{จาก} \quad a_n &= a_1 r^{n-1} \\ \text{จะได้} \quad 8 &= a_1 r^5 && \text{----- (1)} \\ \text{และ} \quad 2 &= a_1 r^7 && \text{----- (2)} \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $r = \frac{1}{2}$ หรือ $r = -\frac{1}{2}$

เนื่องจาก ลำดับเรขาคณิตนี้มีอัตราส่วนร่วมเป็นจำนวนจริงลบ

จะได้ $r = -\frac{1}{2}$ และ $a_1 = -256$

$$\text{นั่นคือ} \quad a_n = -256 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{จะได้} \quad \frac{1}{8} = -256 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{8 \times 256} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2^3 \times 2^8} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2^{11}} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2} \right)^{11}$$

นั่นคือ $n-1 = 11$

จะได้ $n = 12$

ดังนั้น $\frac{1}{8}$ เป็นพจน์ที่ 12 ของลำดับเรขาคณิตนี้

6. วิธีที่ 1 จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$
 จะได้ สามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $a_1, a_1 r$ และ $a_1 r^2$
 เนื่องจาก ลำดับเรขาคณิตนี้มีผลคูณของสามพจน์แรกเป็น 27
 จะได้

$$27 = a_1(a_1 r)(a_1 r^2)$$

$$27 = a_1^3 r^3$$

$$27 = (a_1 r)^3$$

$$a_1 r = 3$$

นั่นคือ $a_1 = \frac{3}{r}$ ----- (1)

เนื่องจาก ลำดับเรขาคณิตนี้มีผลบวกของสามพจน์แรกเป็น 9

จะได้ $9 = a_1 + a_1 r + a_1 r^2$

$$9 = a_1(1 + r + r^2)$$

นั่นคือ $a_1 = \frac{9}{1 + r + r^2}$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $a_1 = 3$ และ $r = 1$

ดังนั้น อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 1

- วิธีที่ 2 ให้สามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต คือ $\frac{a}{r}, a$ และ ar

เมื่อ r เป็นอัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้

เนื่องจาก ผลคูณของสามพจน์แรก คือ 27

จะได้ $27 = \frac{a}{r} \times a \times ar$

$$a^3 = 27$$

$$a = 3$$

นั่นคือ พจน์ที่ 2 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 3

จะได้ สามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{3}{r}, 3$ และ $3r$

เนื่องจาก ผลบวกของสามพจน์แรก คือ 9

$$\text{จะได้} \quad 9 = \frac{3}{r} + 3 + 3r$$

$$0 = 3r - 6 + \frac{3}{r}$$

$$0 = r^2 - 2r + 1$$

$$(r-1)^2 = 0$$

$$\text{นั่นคือ} \quad r = 1$$

ดังนั้น อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 1

7. จำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 300 ถึง 500 ที่หารด้วย 3 ลงตัว ได้แก่ 300, 303, 306, ..., 498

นั่นคือ ลำดับเลขคณิตของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 300 ถึง 500 ที่หารด้วย 3 ลงตัว คือ

300, 303, 306, ..., 498 จะได้ $a_1 = 300$, $a_n = 498$ และ $d = 303 - 300 = 3$

$$\text{จาก} \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้} \quad 498 = 300 + (n-1)(3)$$

$$\text{นั่นคือ} \quad n = 67$$

ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 300 ถึง 500 ที่หารด้วย 3 ลงตัว ทั้งหมด 67 จำนวน

จำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 300 ถึง 500 ที่หารด้วย 9 ลงตัว ได้แก่ 306, 315, 324, ..., 495

นั่นคือ ลำดับเลขคณิตของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 300 ถึง 500 ที่หารด้วย 9 ลงตัว คือ

306, 315, 324, ..., 495 จะได้ $b_1 = 306$, $b_n = 495$ และ $d = 315 - 306 = 9$

$$\text{จาก} \quad b_n = b_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้} \quad 495 = 306 + (n-1)(9)$$

$$\text{นั่นคือ} \quad n = 22$$

ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 300 ถึง 500 ที่หารด้วย 9 ลงตัว ทั้งหมด 22 จำนวน

นั่นคือ มีจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 300 ถึง 500 ที่หารด้วย 3 ลงตัว แต่หารด้วย 9 ไม่ลงตัว ทั้งหมด

$67 - 22 = 45$ จำนวน

8. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

เนื่องจาก พจน์ที่ 10 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 95

$$\text{จะได้} \quad 95 = a_1 + (10-1)d$$

$$95 = a_1 + 9d \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{จาก} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

เนื่องจาก ผลบวก 10 พจน์แรก คือ 500

$$\text{จะได้} \quad 500 = \frac{10}{2}(a_1 + 95)$$

$$500 = 5(a_1 + 95)$$

$$100 = a_1 + 95$$

$$a_1 = 5$$

แทน a_1 ใน (1) ด้วย 5 จะได้ $d = 10$

ดังนั้น ผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 10

9. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

เนื่องจากพจน์ที่ 3 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 12

$$\text{จะได้} \quad 12 = a_1 + (3-1)d$$

$$12 = a_1 + 2d \quad \text{---- (1)}$$

และเนื่องจากพจน์ที่ 30 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 93

$$\text{จะได้} \quad 93 = a_1 + (30-1)d$$

$$93 = a_1 + 29d \quad \text{---- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $a_1 = 6$ และ $d = 3$

$$\text{จาก} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

เนื่องจากผลบวก n พจน์แรก คือ 1995

$$\text{จะได้} \quad 1995 = \frac{n}{2}[(2)(6) + (n-1)(3)]$$

$$1995 = \frac{n}{2}(9 + 3n)$$

$$3990 = n(9 + 3n)$$

$$0 = 3n^2 + 9n - 3990$$

$$0 = n^2 + 3n - 1330$$

$$0 = (n-35)(n+38)$$

นั่นคือ $n = 35$ หรือ $n = -38$

เนื่องจาก $n > 0$ ดังนั้น $n = 35$

10. จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

เนื่องจาก $S_5 = 100$ และ $S_{10} = 500$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad 100 &= \frac{5}{2}(2a_1 + (5-1)d) \\ 100 &= \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \\ 40 &= 2a_1 + 4d \quad \text{----- (1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad 500 &= \frac{10}{2}(2a_1 + (10-1)d) \\ 500 &= 5(2a_1 + 9d) \\ 100 &= 2a_1 + 9d \quad \text{----- (2)} \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $a_1 = -4$ และ $d = 12$

$$\text{จาก} \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad a_{50} &= -4 + (50-1)(12) \\ &= 584 \end{aligned}$$

11. จำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 199 ถึง 399 ที่หารด้วย 3 ลงตัว ได้แก่ 201, 204, 207, ..., 399
นั่นคือ ลำดับเลขคณิตของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 199 ถึง 399 ที่หารด้วย 3 ลงตัว คือ
201, 204, 207, ..., 399 จะได้ $a_1 = 201$, $a_n = 399$ และ $d = 204 - 201 = 3$

$$\text{จาก} \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้} \quad 399 = 201 + (n-1)(3)$$

$$\text{นั่นคือ} \quad n = 67$$

$$\text{จาก} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad S_{67} &= \frac{67}{2}(201 + 399) \\ &= 20,100 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนเต็มตั้งแต่ 199 ถึง 399 ที่หารด้วย 3 ลงตัว คือ 20,100

$$12. \text{ จาก} \quad S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

เนื่องจากลำดับที่กำหนดให้มี $a_1 = 4$ และ $r = 3$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad S_7 &= \frac{4(1-3^7)}{1-3} \\ &= \frac{4(-2186)}{-2} \\ &= 4,372 \end{aligned}$$

13. จำนวนที่นั่งแต่ละแถวในโรงละครเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 8$ และ $d = 2$ และโรงละครนี้มีที่นั่งทั้งหมด 10 แถว จากแถว A ซึ่งอยู่หลังสุดไปแถว J ซึ่งอยู่หน้าสุด

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{10} &= \frac{10}{2}(2(8) + (10-1)(2)) \\ &= 170 \end{aligned}$$

ดังนั้น โรงละครนี้จุผู้ชมได้ 170 ที่นั่ง

14. กรซื้อรถยนต์มาราคา 549,000 บาท

$$\text{เมื่อครบ 1 ปี รถยนต์ของกรราคา } 549,000 \left(\frac{85}{100} \right) \text{ บาท}$$

$$\text{เมื่อครบ 2 ปี รถยนต์ของกรราคา } 549,000 \left(\frac{85}{100} \right)^2 \text{ บาท}$$

$$\text{เมื่อครบ 3 ปี รถยนต์ของกรราคา } 549,000 \left(\frac{85}{100} \right)^3 \text{ บาท}$$

$$\text{จะเห็นว่าราคารถของกรเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี } a_1 = 549,000 \text{ และ } r = \frac{85}{100}$$

ดังนั้น ราคารถยนต์ของกรเมื่อครบ 7 ปี คือ a_8

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย 8 ใน } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } a_8 = 549,000 \left(\frac{85}{100} \right)^{8-1} = 549,000 \left(\frac{85}{100} \right)^7 \approx 175,997$$

ดังนั้น กรจะขายรถคันนี้ได้ในราคาประมาณ 175,997 บาท

15. เนื่องจาก ก้อยเริ่มออมเงินในเดือนมกราคม 2562 เป็นเงิน 250 บาท และจะออมเงินเพิ่มขึ้นทุกเดือน เดือนละ 50 บาท

นั่นคือ เดือนที่ 1 (มกราคม) ก้อยออมเงิน 250 บาท

เดือนที่ 2 (กุมภาพันธ์) ก้อยออมเงิน $250 + 50$ บาท

เดือนที่ 3 (มีนาคม) ก้อยออมเงิน $(250 + 50) + 50 = 250 + 2(50)$ บาท

เดือนที่ 4 (เมษายน) ก้อยออมเงิน $(250 + 2(50)) + 50 = 250 + 3(50)$ บาท

จะเห็นว่าเงินที่ก้อยออมในแต่ละเดือนเป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 250$ และ $d = 50$

ดังนั้น ก้อยจะมีเงินออมรวมเมื่อสิ้นเดือนธันวาคม 2562 เป็นเงิน S_{12}

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย 12 ใน } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\text{จะได้ } S_{12} = \frac{12}{2}(2(250) + (12-1)50) = 6,300$$

ดังนั้น ก้อยจะมีเงินออมรวมเมื่อสิ้นเดือนธันวาคม 2562 เป็นเงิน 6,300 บาท

เนื่องจาก นางเริ่มออมเงินในเดือนมีนาคม 2562 เป็นเงิน 20 บาท และจะออมเงินในเดือนถัดไปเป็นสองเท่าของเงินออมในเดือนก่อนหน้า

นั่นคือ เดือนที่ 1 (มีนาคม) นางออมเงิน 20 บาท

เดือนที่ 2 (เมษายน) นางออมเงิน $20(2)$ บาท

เดือนที่ 3 (พฤษภาคม) นางออมเงิน $20(2)^2$ บาท

เดือนที่ 4 (มิถุนายน) นางออมเงิน $20(2)^3$ บาท

จะเห็นว่าเงินที่นางออมในแต่ละเดือนเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 20$ และ $r = 2$

ดังนั้น นางจะมีเงินออมรวมเมื่อสิ้นเดือนธันวาคม 2562 เป็นเงิน S_{10}

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 10 \text{ ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_{10} = \frac{20(1-2^{10})}{1-2} = 20,460$$

ดังนั้น นางจะมีเงินออมรวมเมื่อสิ้นเดือนธันวาคม 2562 เป็นเงิน 20,460 บาท

นั่นคือ ก้อยและนางจะมีเงินออมรวมกันเมื่อสิ้นเดือนธันวาคม $6,300 + 20,460 = 26,760$ บาท

16. วิธีที่ 1 พิจารณาในช่วง 5 ปีแรกที่กิ้งแก้วฝากเงิน (ปีที่ 1 – 5)

ให้กิ้งแก้วเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P_1 บาท

$$\text{ในที่นี้ } P = P_1, k = 1, n = 5 \text{ และ } r = \frac{1}{100} = 0.01$$

จากทฤษฎีบท 1 จำนวนเงินรวม คือ $P_1 \left(1 + \frac{0.01}{1}\right)^5$ หรือ $P_1(1.01)^5$ บาท

พิจารณาในช่วง 5 ปีหลังที่กิ้งแก้วฝากเงิน (ปีที่ 6 – 10)

เงินต้นในช่วง 5 ปีหลัง คือ $P_1(1.01)^5$ บาท

$$\text{ในที่นี้ } P = P_1(1.01)^5, k = 1, n = 5 \text{ และ } r = \frac{2}{100} = 0.02$$

จากทฤษฎีบท 1 จำนวนเงินรวม คือ $(P_1(1.01)^5) \left(1 + \frac{0.02}{1}\right)^5$ หรือ

$$P_1(1.01)^5(1.02)^5 \text{ บาท}$$

เนื่องจาก กิ้งแก้วมีเงินในบัญชี ณ สิ้นปีที่ 10 อยู่ 50,000 บาท

$$\text{จะได้ } 50,000 = P_1(1.01)^5(1.02)^5$$

$$50,000 = P_1(1.0302)^5$$

$$P_1 = 43,088.58939$$

ดังนั้น กิ่งแก้วเริ่มต้นฝากเงินไว้ประมาณ 43,089 บาท

วิธีที่ 2 พิจารณาในช่วง 5 ปีหลังที่กิ่งแก้วฝากเงิน (ปีที่ 6 – 10)

$$\text{ในที่นี้ } S = 50000, k = 1, n = 5 \text{ และ } r = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$\text{จาก } P = S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn}$$

$$\text{จะได้ } P = 50000 \left(1 + \frac{0.02}{1}\right)^{-5}$$

$$= 45,286.54049$$

ดังนั้น เงินต้นเมื่อเริ่มต้นปีที่ 6 คือ 45,286.54049 บาท

พิจารณาในช่วง 5 ปีแรกที่กิ่งแก้วฝากเงิน (ปีที่ 1 – 5)

$$\text{ในที่นี้ } S = 45,286.54049, k = 1, n = 5 \text{ และ } r = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$\text{จาก } P = S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn}$$

$$\text{จะได้ } P = 45,286.54049 \left(1 + \frac{0.01}{1}\right)^{-5}$$

$$= 43,088.58939$$

ดังนั้น เงินต้นเมื่อเริ่มต้นปีที่ 1 คือ 43,088.58939 บาท

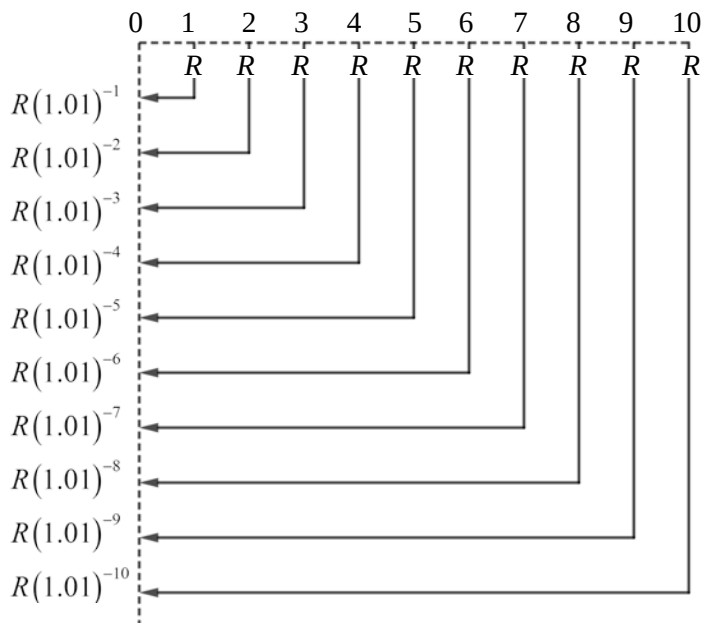
นั่นคือ กิ่งแก้วเริ่มต้นฝากเงินไว้ประมาณ 43,089 บาท

17. 1) ให้ R แทนค่างวดที่กู้ยืมจะต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

$$\text{ในที่นี้ } i = \frac{12}{12} \text{ และ } r = 0.01$$

เนื่องจากคอมพิวเตอร์ราคา 12,000 บาท โดยกู้ยืมจะผ่อนชำระทุกเดือนเป็นเวลา 10 เดือน

ดังนั้น ต้องหามูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน



จากแผนภาพ จะได้มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1, 2, ..., 10 คือ

$$R(1.01)^{-1}, R(1.01)^{-2}, \dots, R(1.01)^{-10} \text{ ตามลำดับ}$$

นั่นคือ ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งสิบงวด คือ

$$R(1.01)^{-1} + R(1.01)^{-2} + \dots + R(1.01)^{-10}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 10 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1.01)^{-1}$ และอัตราส่วนร่วมคือ $(1.01)^{-1}$

ดังนั้น ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งสิบงวด คือ $\frac{R(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-10})}{1-(1.01)^{-1}}$

เนื่องจากก๊ากมีเงินที่ต้องผ่อนชำระ 12,000 บาท จะได้ว่า

$$12,000 = \frac{R(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-10})}{1-(1.01)^{-1}}$$

$$R = \frac{12,000(1-(1.01)^{-1})}{(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-10})}$$

$$R \approx 1,266.98$$

- ดังนั้น กุ๊กไก่จะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 1,267 บาท
- 2) เนื่องจากกุ๊กไก่ได้รับค่าใช้จายจากผู้ปกครองเดือนละ 5,000 บาท
ดังนั้น กุ๊กไก่จะเหลือเงินหลังผ่อนชำระค่าคอมพิวเตอร์แล้วเดือนละประมาณ
 $5,000 - 1,267 = 3,733$ บาท

เฉลยแบบฝึกหัดและวิธีทำโดยละเอียด

บทที่ 1 เลขยกกำลัง

แบบฝึกหัด 1.1

1.
 - 1) $1^{100} = 1$
 - 2) $(-1)^{2019} = -1$
 - 3) $(-8.43)^0 = 1$
 - 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 5^4 = 625$
2.
 - 1) $(3^{-2} \times 15^8)^0 = 3^{(-2)(0)} \times 15^{(8)(0)}$
 $= 3^0 \times 15^0$
 $= 1$
 - 2) $2^3 \times 4^{-2} \times (32^{-2} \times 8)^{-1} = 2^3 \times (2^2)^{-2} \times ((2^5)^{-2} \times 2^3)^{-1}$
 $= 2^3 \times 2^{-4} \times 2^{10} \times 2^{-3}$
 $= 2^{3+(-4)+10+(-3)}$
 $= 2^6$
 - 3) $\frac{2^2 \times 10^3}{5^4 \times 2^5} = \frac{2^2 \times (5 \times 2)^3}{5^4 \times 2^5}$
 $= \frac{2^2 \times 5^3 \times 2^3}{5^4 \times 2^5}$
 $= 2^{2+3-5} \times 5^{3-4}$
 $= 2^0 \times 5^{-1}$
 $= \frac{1}{5}$
 - 4) $\frac{2^{-3} \times 3^{-5}}{3^{-5} \times 2^0} = 2^{-3-0} \times 3^{-5-(-5)}$
 $= 2^{-3} \times 3^0$
 $= \frac{1}{2^3}$

$$\begin{aligned}
 3. \quad 1) \quad & (x^3 y^{-2})(x^{-5} y^3) = x^{3+(-5)} y^{-2+3} \\
 & = x^{-2} y \\
 & = \frac{y}{x^2} \\
 2) \quad & \left(\frac{x^4}{2y^{-2}} \right)^{-2} (2xy^2)^3 = \left(\frac{x^{-8}}{2^{-2} y^4} \right) (2^3 x^3 y^6) \\
 & = 2^{3-(-2)} x^{-8+3} y^{6-4} \\
 & = 2^5 x^{-5} y^2 \\
 & = \frac{2^5 y^2}{x^5} \\
 3) \quad & y^4 \left(\frac{1}{3} y^2 \right) (12y^{-8}) = 4y^{4+2+(-8)} \\
 & = 2^2 y^{-2} \\
 & = \frac{2^2}{y^2} \\
 4) \quad & (x^{-5} y^7)(x^{-2} y^{-7} z^0) = x^{-5+(-2)} y^{7+(-7)} (1) \\
 & = x^{-7} y^0 \\
 & = \frac{1}{x^7} \\
 5) \quad & \left(\frac{1}{2} x^{-3} y^2 \right)^{-4} = \frac{1}{2^{-4}} x^{12} y^{-8} \\
 & = \frac{2^4 x^{12}}{y^8} \\
 6) \quad & \frac{(x^2 y^3)(xy^4)^{-3}}{x^2 y} = \frac{(x^2 y^3)(x^{-3} y^{-12})}{x^2 y} \\
 & = x^{2+(-3)-2} y^{3+(-12)-1} \\
 & = x^{-3} y^{-10} \\
 & = \frac{1}{x^3 y^{10}}
 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.2

1. 1) เนื่องจาก $8^2 = 64$ และ $(-8)^2 = 64$
 ดังนั้น รากที่ 2 ของ 64 คือ 8 และ -8
- 2) เนื่องจาก $(\sqrt{5})^2 = 5$ และ $(-\sqrt{5})^2 = 5$
 ดังนั้น รากที่ 2 ของ 5 คือ $\sqrt{5}$ และ $-\sqrt{5}$
- 3) เนื่องจาก $(\sqrt[4]{4})^4 = 4$ และ $(-\sqrt[4]{4})^4 = 4$
 ดังนั้น รากที่ 4 ของ 4 คือ $\sqrt[4]{4}$ และ $-\sqrt[4]{4}$
- 4) เนื่องจาก $(-7)^3 = -343$
 ดังนั้น รากที่ 3 ของ -343 คือ -7
- 5) เนื่องจากรากที่ 4 ของ 625 คือ 5 และ -5
 และ $(625)(5) > 0$ แต่ $(625)(-5) < 0$
 ดังนั้น ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 625 คือ 5
- 6) เนื่องจากไม่มีรากที่ 4 ของ -1296 ในระบบจำนวนจริง
 ดังนั้น ไม่มีค่าหลักของรากที่ 4 ของ -1296 ในระบบจำนวนจริง
2. 1) $\sqrt{144} = \sqrt{12 \times 12} = 12$
- 2) $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4 \times 4 \times 4 \times 4} = 4$
- 3) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4 \times 4 \times 4} = 4$
- 4) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
- 5) $\frac{3}{\sqrt[3]{-27}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(-3) \times (-3) \times (-3)}} = \frac{3}{(-3)} = -1$
- 6) $\sqrt{(-11)^2} = \sqrt{121} = \sqrt{11 \times 11} = 11$
3. 1) $\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
 $= \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{15}} &= \frac{\sqrt{7 \times 3}}{\sqrt{5 \times 3}} \\
 &= \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{\sqrt{35}}{5} \\
 3) \quad \sqrt{\frac{3}{20}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}} \cdot \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}} \\
 &= \frac{\sqrt{60}}{20} \\
 &= \frac{2\sqrt{15}}{20} \\
 &= \frac{\sqrt{15}}{10} \\
 4) \quad \frac{\sqrt{96}}{2\sqrt{12}} &= \frac{\sqrt{8 \times 12}}{2\sqrt{12}} \\
 &= \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{12}}{2\sqrt{12}} \\
 &= \frac{\sqrt{8}}{2} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{2} \\
 &= \sqrt{2} \\
 5) \quad \frac{3\sqrt{8}}{4\sqrt{12}} &= \frac{3 \times 2\sqrt{2}}{4 \times 2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{8}}{4\sqrt{12}} &= \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{12} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6) \quad \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4}} &= \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2 \times 2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2 \times 2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{18}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4. \quad 1) \quad \sqrt{45} \cdot \sqrt{20} &= \sqrt{3 \times 3 \times 5} \times \sqrt{2 \times 2 \times 5} \\ &= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5} \\ &= 2 \times 3 \times 5 \\ &= 30\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \quad (7\sqrt{5} - 3\sqrt{5}) + (3\sqrt{2} + \sqrt{2}) &= (7-3)\sqrt{5} + (3+1)\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{5} + 4\sqrt{2} \\ &= 4(\sqrt{5} + \sqrt{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) \quad (2\sqrt{3} + \sqrt{7})(2\sqrt{3} - \sqrt{7}) &= (2\sqrt{3} + \sqrt{7})2\sqrt{3} - (2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} \\ &= 12 + 2\sqrt{21} - 2\sqrt{21} - 7 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4) \quad (2 + \sqrt{3})^2 &= (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \\ &= (2 + \sqrt{3})(2) + (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3}) \\ &= 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3 \\ &= 7 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5) \quad 3\sqrt{8} - 4\sqrt{18} + 7\sqrt{2} &= 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 7\sqrt{2} \\ &= (6 - 12 + 7)\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad 2\sqrt{5} + \sqrt{125} - \frac{8}{\sqrt{20}} &= 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - \frac{8}{2\sqrt{5}} \\
 &= 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - \left(\frac{8}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right) \\
 &= 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - \frac{8\sqrt{5}}{10} \\
 &= 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5} \\
 &= \left(2 + 5 - \frac{4}{5} \right) \sqrt{5} \\
 &= \frac{31\sqrt{5}}{5}
 \end{aligned}$$

5. 1) เนื่องจาก $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$
 จะได้ $\sqrt{(-7)^2} > -7$
- 2) เนื่องจาก $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ และ $-\sqrt[5]{32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$
 จะได้ $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32}$
- 3) เนื่องจาก $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{108}{4}} = \sqrt[3]{27} = 3$ และ $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{9 \times 24} = \sqrt[3]{216} = 6$
 ดังนั้น $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}} < \sqrt[3]{9}\sqrt[3]{24}$
- 4) เนื่องจาก $\frac{12}{\sqrt{8}} = \frac{12}{2\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{2} \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
 และ $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
 ดังนั้น $\frac{12}{\sqrt{8}} = \sqrt{18}$
- 5) เนื่องจาก $\frac{6}{\sqrt[3]{4}} = \frac{6}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = 3\sqrt[3]{2}$
 และ $\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{18 \times 6} = \sqrt[3]{2^2 \times 3^3} = 3\sqrt[3]{4}$
 จะได้ $3\sqrt[3]{2} < 3\sqrt[3]{4}$
 ดังนั้น $\frac{6}{\sqrt[3]{4}} < \sqrt[3]{18}\sqrt[3]{6}$

แบบฝึกหัด 1.3

1. 1)
$$\frac{27^{\frac{2}{3}}}{3^2} = \frac{(3^3)^{\frac{2}{3}}}{3^2}$$

$$= \frac{3^2}{3^2}$$

$$= 1$$
- 2)
$$(0.25)^{\frac{3}{2}} = (0.5^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= (0.5)^3$$
- 3)
$$\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{5^2}$$
- 4)
$$(-27)^{\frac{2}{3}} = \left((-3)^3\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= (-3)^2$$

$$= 3^2$$
- 5)
$$3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}$$

$$= 3^{\frac{4}{3}}$$
- 6)
$$\left(7^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{7}{2}} = 7^{\frac{14}{3}}$$
- 7)
$$(-1000)^{-\frac{4}{3}} = \left((-10)^3\right)^{-\frac{4}{3}}$$

$$= (-10)^{-4}$$

$$= \frac{1}{(-10)^4}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad & (-1000)^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{10^4} \\
 & 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} \\
 & = 5^{\frac{6}{3}} \\
 & = 5^2 \\
 9) \quad & 8^{\frac{5}{3}} \times 8^{-\frac{4}{3}} = 8^{\frac{5}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right)} \\
 & = 8^{\frac{1}{3}} \\
 & = (2^3)^{\frac{1}{3}} \\
 & = 2 \\
 10) \quad & 0.5^{\frac{7}{2}} \times 0.5^{-\frac{3}{2}} = 0.5^{\frac{7}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right)} \\
 & = 0.5^{\frac{4}{2}} \\
 & = 0.5^2 \\
 11) \quad & 10^{\frac{5}{3}} \times 10^{-\frac{8}{3}} = 10^{\frac{5}{3} + \left(-\frac{8}{3}\right)} \\
 & = 10^{-\frac{3}{3}} \\
 & = 10^{-1} \\
 & = \frac{1}{10} \\
 12) \quad & \frac{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}}}{2} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 1} \\
 & = 2^2 \\
 13) \quad & \frac{2^3 \times 8^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{8}} = \frac{2^3 \times (2^3)^{\frac{3}{2}}}{(2^3)^{\frac{1}{2}}} \\
 & = \frac{2^3 \times 2^{\frac{9}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} \\
 & = 2^{3 + \frac{9}{2} - \frac{3}{2}} \\
 & = 2^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14) \quad \frac{8^{\frac{1}{3}} + 7}{27^{\frac{1}{3}}} &= \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}} + 7}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \frac{2 + 7}{3} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15) \quad \frac{88^{\frac{2}{3}}}{11^{\frac{2}{3}}} &= \left(\frac{88}{11} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 8^{\frac{2}{3}} \\
 &= (2^3)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16) \quad \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 12^{\frac{2}{3}}}{18^{\frac{1}{3}}} &= \frac{2^{\frac{2}{3}} \times (2^2 \times 3)^{\frac{2}{3}}}{(2 \times 3^2)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}} \\
 &= 2^{\frac{5}{3}} \times 3^0 \\
 &= 2^{\frac{5}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17) \quad \frac{30^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}} &= \frac{30^{\frac{2}{3}}}{(3 \times 5)^{\frac{2}{3}}} \\
 &= \left(\frac{30}{15} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18) \quad \frac{8 \times 3^{\frac{5}{3}} \times 6^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{5}{2}}} &= \frac{2^3 \times 3^{\frac{5}{3}} \times (2 \times 3)^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{5}{2}}} \\
 &= \frac{2^3 \times 3^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{5}{2}}} \\
 &= \frac{2^3 \times 3^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}+1}} \\
 &= \frac{2^3 \times 3^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{2}} - \left(2^{\frac{3}{2}} \times 2\right)} \\
 &= \frac{2^3 \times 3^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{2}}(1-2)} \\
 &= -\frac{2^3 \times 3^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -2^{3+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}} \times 3^{\frac{5}{3}+\frac{2}{3}} \\
 &= -2^{\frac{13}{6}} \times 3^{\frac{7}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad 1) \quad \left(\frac{x^{-4}}{4y^6}\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{x^{-2}}{2y^3} \\
 &= \frac{1}{2x^2y^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{3}{2}}}\right)^3 &= \left(x^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{2}\right)}\right)^3 \\
 &= \left(x^{\frac{13}{6}}\right)^3 \\
 &= x^{\frac{13}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad 9x^{\frac{3}{2}}(3x)^{-\frac{1}{2}} &= 3^2 \times x^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 3^{2+\left(-\frac{1}{2}\right)} \times x^{\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)} \\
 &= 3^{\frac{3}{2}} x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \left(\frac{27x^6}{y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}} &= \left(\frac{3^3 \times x^6}{y^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{3^{-2} \times x^{-4}}{y^{-1}} \\
 &= \frac{y}{3^2 x^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad 1) \quad (\sqrt[3]{10})^3 &= \left(10^{\frac{1}{3}}\right)^3 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \sqrt[3]{(-12)^3} &= \left((-12)^{\frac{1}{3}}\right)^3 \\
 &= -12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \sqrt{14}\sqrt{56} &= (\sqrt{2 \times 7})(\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 7}) \\
 &= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7} \\
 &= 2 \times 2 \times 7 \\
 &= 28
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36} &= \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6 \times 6} \\
 &= \sqrt[3]{6 \times 6 \times 6} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{18} &= \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{4^2 \times 2} - \sqrt{3^2 \times 2} \\
 &= 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\
 &= (5 + 4 - 3)\sqrt{2} \\
 &= 6\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad 5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{32} - \sqrt[3]{108} &= 5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2^3 \times 4} - \sqrt[3]{3^3 \times 4} \\
 &= 5\sqrt[3]{4} + 4\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} \\
 &= (5 + 4 - 3)\sqrt[3]{4} \\
 &= 6\sqrt[3]{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{192} &= \sqrt[3]{3^3 \times 3} + \sqrt[3]{5^3 \times 3} - \sqrt[3]{4^3 \times 3} \\
 &= 3\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{3} \\
 &= (3+5-4)\sqrt[3]{3} \\
 &= 4\sqrt[3]{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad 3\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt[4]{64} &= 3\sqrt{2} + \sqrt{4^2 \times 2} - \sqrt[4]{2^4 \times 2^2} \\
 &= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt[4]{2^2} \\
 &= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2(2^2)^{\frac{1}{4}} \\
 &= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\left(2^{\frac{1}{2}}\right) \\
 &= 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\
 &= (3+4-2)\sqrt{2} \\
 &= 5\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad \sqrt{5}(2\sqrt{3} - 2\sqrt{5}) &= 2\sqrt{15} - 10 \\
 &= -10 + 2\sqrt{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad (\sqrt{7} + 4\sqrt{5})^2 &= (\sqrt{7} + 4\sqrt{5})(\sqrt{7} + 4\sqrt{5}) \\
 &= (\sqrt{7} + 4\sqrt{5})(\sqrt{7}) + (\sqrt{7} + 4\sqrt{5})(4\sqrt{5}) \\
 &= 7 + 4\sqrt{35} + 4\sqrt{35} + 80 \\
 &= 87 + 8\sqrt{35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \text{ เนื่องจาก } \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{8}} &= \frac{(3^4)^{\frac{1}{4}}}{(2^3)^{\frac{1}{4}}} \\
 &= \frac{3}{(2^3)^{\frac{1}{4}}} \times \frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} \\
 &= \frac{3 \times 2^{\frac{1}{4}}}{2} \\
 &= \frac{3}{2} \left(2^{\frac{1}{4}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt[8]{1024} &= (2^{10})^{\frac{1}{8}} \\
 &= 2^{\frac{10}{8}} \\
 &= 2^{\frac{5}{4}} \\
 &= 2\left(2^{\frac{1}{4}}\right) \\
 \text{และ} \quad \frac{\sqrt[8]{324}}{\sqrt[4]{9}} &= \frac{(2^2 \times 3^4)^{\frac{1}{8}}}{(3^2)^{\frac{1}{4}}} \\
 &= \frac{2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} \\
 &= 2^{\frac{1}{4}} \\
 \text{ดังนั้น} \quad \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{8}} - \sqrt[8]{1024} + \frac{\sqrt[8]{324}}{\sqrt[4]{9}} &= \frac{3}{2}\left(2^{\frac{1}{4}}\right) - 2\left(2^{\frac{1}{4}}\right) + 2^{\frac{1}{4}} \\
 &= \left(\frac{3}{2} - 2 + 1\right)2^{\frac{1}{4}} \\
 &= \frac{1}{2}\left(2^{\frac{1}{4}}\right) \\
 &= 2^{\frac{1}{4}-1} \\
 &= 2^{-\frac{3}{4}} \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt[4]{8}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12) \text{ เนื่องจาก} \quad 4(9)^{\frac{1}{6}} &= 4(3^2)^{\frac{1}{6}} \\
 &= 4(3)^{\frac{1}{3}} \\
 3(24)^{\frac{1}{3}} &= 3(2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 3(24)^{\frac{1}{3}} &= 6(3)^{\frac{1}{3}} \\
 \frac{2\left(48^{\frac{2}{3}}\right)}{144^{\frac{1}{6}}} &= \frac{2(2^4 \times 3)^{\frac{2}{3}}}{(2^4 \times 3^2)^{\frac{1}{6}}} \\
 &= \frac{2 \times 2^{\frac{8}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}} \\
 &= 2^{1+\frac{8}{3}-\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} \\
 &= 2^3(3)^{\frac{1}{3}} \\
 &= 8(3)^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } 4(9)^{\frac{1}{6}} + 3(24)^{\frac{1}{3}} - \frac{2\left(48^{\frac{2}{3}}\right)}{144^{\frac{1}{6}}} &= 4(3)^{\frac{1}{3}} + 6(3)^{\frac{1}{3}} - 8(3)^{\frac{1}{3}} \\
 &= 2(3)^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

4. 1)

$$\begin{aligned}
 \sqrt{72x^3} &= \sqrt{6^2 \times 2x^3} \\
 &= 6x\sqrt{2x}
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 \sqrt{54xy^4} &= \sqrt{3^2 \times 6xy^4} \\
 &= 3y^2\sqrt{6x}
 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{32x^4}{y^2}} &= \sqrt{\frac{4^2 \times 2x^4}{y^2}} \\
 &= \frac{4\sqrt{2x^2}}{y}
 \end{aligned}$$

4)

$$\sqrt[4]{(3x^2)^4} = 3x^2$$

5)

$$\begin{aligned}
 x^2\sqrt{4x^3} - 2x\sqrt{x^5} + \sqrt{9x^7} &= 2x^3\sqrt{x} - 2x^3\sqrt{x} + 3x^3\sqrt{x} \\
 &= 3x^3\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

6)

$$(\sqrt{12x^3y})(\sqrt{27xy}) = (2x\sqrt{3xy})(3\sqrt{3xy})$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{12x^3y})(\sqrt{27xy}) &= 6x(3xy) \\ &= 18x^2y\end{aligned}$$

5. 1) เนื่องจาก $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

และ $9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

ดังนั้น $27^{\frac{2}{3}} < 9^{\frac{3}{2}}$

2) เนื่องจาก $2\left(18^{\frac{1}{2}}\right) = 2\left(2 \times 3^2\right)^{\frac{1}{2}} = 6\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$ และ $3\left(4^{\frac{1}{4}}\right) = 3\left(\left(2^2\right)^{\frac{1}{4}}\right) = 3\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$

ดังนั้น $2\left(18^{\frac{1}{2}}\right) > 3\left(4^{\frac{1}{4}}\right)$

3) เนื่องจาก $18^{\frac{2}{3}}12^{\frac{2}{3}} = (18 \times 12)^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}} = 6^2$

และ $6^{\frac{3}{2}}6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = 6^{\frac{4}{2}} = 6^2$

ดังนั้น $18^{\frac{2}{3}}12^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{3}{2}}6^{\frac{1}{2}}$

4) เนื่องจาก $7^37^{\frac{1}{5}} = 7^{3 + \frac{1}{5}} = 7^{\frac{16}{5}}$, $49^{\frac{1}{10}} = (7^2)^{\frac{1}{10}} = 7^{\frac{1}{5}}$

และ $\frac{16}{5} > \frac{1}{5}$

ดังนั้น $7^37^{\frac{1}{5}} > 49^{\frac{1}{10}}$

5) เนื่องจาก $\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 4^3 = 2^6$, $\frac{4^{\frac{3}{2}}}{8^{-2}} = \frac{(2^2)^{\frac{3}{2}}}{(2^3)^{-2}} = \frac{2^3}{2^{-6}} = 2^9$

และ $6 < 9$

ดังนั้น $\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 < \frac{4^{\frac{3}{2}}}{8^{-2}}$

6. จาก $d = 3.57\sqrt{h}$ และ $h = 49$

จะได้

$$\begin{aligned}d &= 3.57\sqrt{49} \\ &= (3.57)(7) \\ &= 24.99\end{aligned}$$

ดังนั้น ชายผู้นี้สามารถมองได้ไกลสุดประมาณ 24.99 กิโลเมตร

7. จาก $W = (0.0016)L^{\frac{12}{5}}$ และ $L = 32$

จะได้

$$\begin{aligned} W &= (0.0016)(32)^{\frac{12}{5}} \\ &= (0.0016)(2^5)^{\frac{12}{5}} \\ &= (0.2)^4 (2^{12}) \\ &= (2 \times 0.1)^4 (2^{12}) \\ &= 2^{4+12} \times 0.0001 \\ &= 2^{16} \times 0.0001 \\ &= 65,536 \times 0.0001 \\ &\approx 6.55 \end{aligned}$$

ดังนั้น วาฬที่มีความยาว 32 ฟุต จะมีน้ำหนักประมาณ 6.55 ตัน

8. จาก $n = n_0(1+r)^t$

ในที่นี้ $t=10$, $r = \frac{4}{100} = 0.04$ และ $n_0 = 112,000$

จะได้

$$\begin{aligned} n &= 112,000(1+0.04)^{10} \\ &= 112,000(1.04)^{10} \\ &\approx 165,787.36 \end{aligned}$$

ดังนั้น ใน พ.ศ. 2571 จังหวัดนี้มีประชากรประมาณ 165,787 คน

9. 1) ในที่นี้ $P = 50000$, $n = 10$ และ $r = \frac{0.75}{100} = 0.0075$

จากทฤษฎีบท 7 จะมีจำนวนเงินฝากเมื่อสิ้นปีที่ 10 คือ

$$50,000(1+0.0075)^{10} \approx 53,879.13 \text{ บาท}$$

ดังนั้น ถ้าฝากเงิน 50,000 บาท โดยไม่มีการถอนเงิน เมื่อสิ้นปีที่ 10 จะมีเงินฝากประมาณ 53,879.13 บาท และได้รับดอกเบี้ยทั้งหมดประมาณ

$$53,879.13 - 50,000 = 3,879.13 \text{ บาท}$$

2) ในที่นี้ $n = 15$, $r = \frac{0.75}{100} = 0.0075$

และเงินรวมในบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 15 เท่ากับ 150,000 บาท จากทฤษฎีบท 7 จะได้

$$P(1+0.0075)^{15} = 150,000$$

$$P = 150,000(1.0075)^{-15}$$

$$\approx 134,095.88$$

ดังนั้น ถ้าต้องการให้มีเงินในบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 15 เป็นจำนวนเงิน 150,000 บาท

แล้วต้องฝากเงินอย่างน้อยประมาณ 134,096 บาท

10. ในที่นี้ $P = 20,000$ และ $n = 5$ เงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 5 เท่ากับ 22,081.62 บาท

ให้อัตราดอกเบี้ยที่ธนาคารกำหนดคือ $i\%$ ต่อปี และ $r = \frac{i}{100}$ จากทฤษฎีบท 7 จะได้

$$20,000(1+r)^5 = 22,081.62$$

$$(1+r)^5 = \frac{22,081.62}{20,000}$$

$$(1+r)^5 \approx 1.1041$$

$$1+r \approx (1.1041)^{\frac{1}{5}}$$

$$1+r \approx 1.02$$

$$r \approx 0.02$$

นั่นคือ $i \approx 2$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยที่ธนาคารกำหนดสำหรับเงินฝากนี้ประมาณ 2%

11. จากโจทย์ สามารถใช้แนวคิดเดียวกับการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น โดยใช้ P แทนเงินเดือนเริ่มต้นสำหรับพนักงานวุฒิปริญญาตรี i แทนร้อยละของเงินเดือนที่เพิ่มขึ้นต่อปี

และ $r = \frac{i}{100}$ จะได้ $P = 18,000$ และ $r = \frac{7}{100} = 0.07$

- 1) ในที่นี้ $n = 30 - 24 = 6$

จากทฤษฎีบท 7 จะได้ว่า เมื่อสายธารมีอายุ 30 ปี สายธารจะได้รับเงินเดือนประมาณ $18,000(1+0.07)^6 \approx 27,013.15$ บาท

- 2) จากโจทย์ ต้องการได้เงินเดือนเกิน 50,000 บาท

จากทฤษฎีบท 7 จะได้

$$18,000(1+0.07)^n = 50,000$$

$$(1.07)^n = \frac{50,000}{18,000}$$

$$\approx 2.7778$$

เนื่องจาก $(1.07)^{15} \approx 2.7590$ และ $(1.07)^{16} \approx 2.9522$

จะได้ $18,000(1.07)^{15} \approx 49,662.57$ และ $18,000(1.07)^{16} \approx 53,138.95$

นั่นคือ สายธารต้องทำงาน 16 ปี จึงจะได้รับเงินเดือนเกิน 50,000 บาท

- 3) จากโจทย์ เงินเดือนสูงสุดของพนักงานที่มีวุฒิปริญญาตรีจะได้รับ คือ 80,000 บาท

จากทฤษฎีบท 7 จะได้

$$\begin{aligned} 18,000(1+0.07)^n &= 80,000 \\ (1.07)^n &= \frac{80,000}{18,000} \\ &\approx 4.4444 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(1.07)^{22} \approx 4.4304$ และ $(1.07)^{23} \approx 4.7405$

จะได้ $18,000(1.07)^{22} \approx 79,747.23$ และ $18,000(1.07)^{23} \approx 85,329.54$

นั่นคือ เมื่อสายธารทำงานไปแล้ว 22 ปี เงินเดือนจะยังไม่ถึง 80,000 บาท

แต่เมื่อสายธารทำงานไปแล้ว 23 ปี จะได้รับเงินเดือนในอัตราสูงสุด 80,000 บาท

ดังนั้น สายธารจะได้รับเงินเดือนในอัตราสูงสุดเมื่ออายุ $24 + 23 = 47$ ปี

แบบฝึกหัดท้ายบท

$$\begin{aligned} 1. \quad 1) \quad \frac{2 \times 5^0 \times 3^{-3}}{3^{-3} \times 8} &= \frac{2 \times 5^0 \times 3^{-3}}{3^{-3} \times 2^3} \\ &= 2^{1-3} \times 5^0 \times 3^{-3-(-3)} \\ &= 2^{-2} \times 5^0 \times 3^0 \\ &= \frac{1}{2^2} \\ 2) \quad \frac{2 \times 6^{-2} \times 3^3}{9^{-3} \times 8} &= \frac{2 \times (2 \times 3)^{-2} \times 3^3}{(3^2)^{-3} \times 2^3} \\ &= \frac{2 \times 2^{-2} \times 3^{-2} \times 3^3}{3^{-6} \times 2^3} \\ &= 2^{1+(-2)-3} \times 3^{-2+3-(-6)} \\ &= 2^{-4} \times 3^7 \\ &= \frac{3^7}{2^4} \\ 3) \quad (3-3^2+3^3-3^4+3^5)^0 &= (183)^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \frac{12^3 \times 10^{-1} \times 30^2}{4^2 \times 15^2 \times 6^{-2}} &= \frac{(2^2 \times 3)^3 \times (2 \times 5)^{-1} \times (2 \times 3 \times 5)^2}{(2^2)^2 \times (3 \times 5)^2 \times (2 \times 3)^{-2}} \\
 &= \frac{(2^6 \times 3^3) \times (2^{-1} \times 5^{-1}) \times (2^2 \times 3^2 \times 5^2)}{2^4 \times (3^2 \times 5^2) \times (2^{-2} \times 3^{-2})} \\
 &= 2^{6+(-1)+2-4-(-2)} \times 3^{3+2-2-(-2)} \times 5^{-1+2-2} \\
 &= 2^5 \times 3^5 \times 5^{-1} \\
 &= \frac{(2 \times 3)^5}{5} \\
 &= \frac{6^5}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad 1) \quad \frac{x^2 y^{-3}}{x^4 y^2} &= x^{2-4} y^{-3-2} \\
 &= x^{-2} y^{-5} \\
 &= \frac{1}{x^2 y^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{x^9 (2x)^4}{x^3} &= \frac{x^9 (2^4 x^4)}{x^3} \\
 &= 2^4 x^{9+4-3} \\
 &= 2^4 x^{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \frac{(6x^2 y^{-5} z)^2}{2(x^{-2} y z)^3} &= \frac{6^2 (x^4 y^{-10} z^2)}{2(x^{-6} y^3 z^3)} \\
 &= \frac{6^2}{2} x^{4-(-6)} y^{-10-3} z^{2-3} \\
 &= 18x^{10} y^{-13} z^{-1} \\
 &= \frac{18x^{10}}{y^{13} z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad (2xy^{-1})(xy^2)^{-2} &= (2xy^{-1})(x^{-2}y^{-4}) \\
 &= 2x^{1+(-2)}y^{-1+(-4)} \\
 &= 2x^{-1}y^{-5} \\
 &= \frac{2}{xy^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \left(\frac{1}{3x^2y^{-3}}\right)^{-2} &= \frac{1}{3^{-2}x^{-4}y^6} \\
 &= \frac{3^2x^4}{y^6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \left(\frac{x^{-1}yz^{-2}}{y^{-5}zx^{-8}}\right)^{-1} &= \frac{xy^{-1}z^2}{y^5z^{-1}x^8} \\
 &= x^{1-8}y^{-1-5}z^{2-(-1)} \\
 &= x^{-7}y^{-6}z^3 \\
 &= \frac{z^3}{x^7y^6}
 \end{aligned}$$

3. 1) เนื่องจาก $11^2 = 121$ และ $(-11)^2 = 121$
 ดังนั้น รากที่ 2 ของ 121 คือ 11 และ -11
- 2) เนื่องจาก $(\sqrt[3]{396})^3 = 396$
 ดังนั้น รากที่ 3 ของ 396 คือ $\sqrt[3]{396}$
- 3) เนื่องจาก ไม่มีจำนวนจริง y ซึ่ง $y^4 = -81$
 ดังนั้น ไม่มีรากที่ 4 ของ -81 ในระบบจำนวนจริง
- 4) เนื่องจาก $(-2)^5 = -32$
 ดังนั้น รากที่ 5 ของ -32 คือ -2

$$\begin{aligned}
 4. \quad 1) \quad (0.027)^{\frac{2}{3}} &= \left((0.3)^3\right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= (0.3)^2 \\
 &= 0.09
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}} &= \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\
 &= \frac{27}{64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad 16^{-\frac{1}{4}} &= \left(2^4\right)^{-\frac{1}{4}} \\
 &= 2^{-1} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad (-125)^{-\frac{1}{3}} &= \left((-5)^3\right)^{-\frac{1}{3}} \\
 &= (-5)^{-1} \\
 &= -\frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} &= \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad 0.5^{\frac{3}{2}} \times 8^{\frac{3}{2}} &= (0.5 \times 8)^{\frac{3}{2}} \\
 &= 4^{\frac{3}{2}} \\
 &= (2^2)^{\frac{3}{2}} \\
 &= 2^3 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \left(4^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{7}{5}} = 4^{\frac{7}{2}} \\
 & = \left(2^2\right)^{\frac{7}{2}} \\
 & = 2^7 \\
 & = 128 \\
 8) \quad & \frac{12^{\frac{2}{3}}}{18^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(2^2 \times 3\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(2 \times 3^2\right)^{\frac{1}{3}}} \\
 & = \frac{2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}} \\
 & = 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} \\
 & = 2^1 \times 3^0 \\
 & = 2 \\
 9) \quad & \frac{5^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}}}{10^{\frac{2}{3}}} = \frac{(5 \times 2)^{\frac{5}{3}}}{10^{\frac{2}{3}}} \\
 & = \frac{10^{\frac{5}{3}}}{10^{\frac{2}{3}}} \\
 & = 10^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}} \\
 & = 10 \\
 10) \quad & \frac{5^{\frac{2}{3}} \times 32^{\frac{2}{3}}}{50^{\frac{1}{3}}} = \frac{5^{\frac{2}{3}} \times \left(2^5\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(2 \times 5^2\right)^{\frac{1}{3}}} \\
 & = \frac{5^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{10}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}} \\
 & = 2^{\frac{10}{3}-\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}} \\
 & = 2^3 \times 5^0 \\
 & = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 10^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}} &= \frac{2^{\frac{2}{3}} \times (2 \times 5)^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}} \\
 &= 2^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} \\
 &= 2^1 \times 5^{\frac{1}{3}} \\
 &= 2 \left(5^{\frac{1}{3}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12) \quad \frac{2 \times 6^{-\frac{3}{2}} \times 3}{9^{-\frac{3}{2}} \times 8^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2 \times (2 \times 3)^{-\frac{3}{2}} \times 3}{(3^2)^{-\frac{3}{2}} \times (2^3)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{2 \times 2^{-\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{3}{2}} \times 3}{3^{-3} \times 2^{\frac{9}{2}}} \\
 &= 2^{1 + \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{9}{2}} \times 3^{\frac{3}{2} + 1 - (-3)} \\
 &= 2^{-5} \times 3^{\frac{5}{2}} \\
 &= \frac{3^{\frac{5}{2}}}{2^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad 1) \quad \sqrt[3]{3^2 \times 4^2 \times 6} &= \sqrt[3]{3^2 \times 4^2 \times (2 \times 3)} \\
 &= \sqrt[3]{3^2 \times (2^2)^2 \times (2 \times 3)} \\
 &= \sqrt[3]{3^3 \times 2^5} \\
 &= 6\sqrt[3]{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{375} &= 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} \\
 &= (3 - 2 + 5)\sqrt[3]{3} \\
 &= 6\sqrt[3]{3}
 \end{aligned}$$

- 3) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
 $= (2 - 3 + 2)\sqrt{5}$
 $= \sqrt{5}$
- 4) วิธีที่ 1 $(5\sqrt{2} + 1)(5\sqrt{2} - 1) = (5\sqrt{2} + 1)(5\sqrt{2}) - (5\sqrt{2} + 1)(1)$
 $= 50 + 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 1$
 $= 49$
- วิธีที่ 2 $(5\sqrt{2} + 1)(5\sqrt{2} - 1) = (5\sqrt{2})^2 - 1^2$
 $= 50 - 1$
 $= 49$
- 5) วิธีที่ 1 $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$
 $= (\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6}) - (\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{3})$
 $= 6 - \sqrt{18} - \sqrt{18} + 3$
 $= 9 - 2\sqrt{18}$
 $= 9 - 6\sqrt{2}$
- วิธีที่ 2 $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2(\sqrt{6})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2$
 $= 6 - 2\sqrt{18} + 3$
 $= 9 - 2\sqrt{18}$
 $= 9 - 6\sqrt{2}$
- 6) $3\sqrt{5}(\sqrt{10} + 2\sqrt{5}) = (3\sqrt{5})(\sqrt{10}) + (3\sqrt{5})(2\sqrt{5})$
 $= 15\sqrt{2} + 30$
- 7) $(\sqrt{5} - 2)(2\sqrt{5} - 1) = (\sqrt{5} - 2)(2\sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)(1)$
 $= 10 - 4\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2$
 $= 12 - 5\sqrt{5}$
- 8) วิธีที่ 1 $(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9}) + (\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{3}) + (\sqrt[3]{3} - 1)(1)$
 $= 3 - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3} - 1$
 $= 3 - 1$
 $= 2$

วิธีที่ 2 $(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1) = (\sqrt[3]{3}-1)((\sqrt[3]{3})^2+(\sqrt[3]{3})(1)+(1)^2)$

$$= (\sqrt[3]{3})^3 - 1^3$$

$$= 3 - 1$$

$$= 2$$

9) $(2\sqrt{3}+\sqrt{7})(\sqrt{3}-3\sqrt{7}) = (2\sqrt{3}+\sqrt{7})(\sqrt{3}) - (2\sqrt{3}+\sqrt{7})(3\sqrt{7})$

$$= 6 + \sqrt{21} - 6\sqrt{21} - 21$$

$$= -15 - 5\sqrt{21}$$

10) $(\sqrt{98}-\sqrt{18})(\sqrt{8}+\sqrt{50}) = (7\sqrt{2}-3\sqrt{2})(2\sqrt{2}+5\sqrt{2})$

$$= (4\sqrt{2})(7\sqrt{2})$$

$$= 56$$

11) $\frac{\sqrt[3]{5^4}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{5^4}{5}}$

$$= \sqrt[3]{5^{4-1}}$$

$$= \sqrt[3]{5^3}$$

$$= 5$$

12) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1296} + \frac{\sqrt{867}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{32}}{\sqrt[4]{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(36 + \frac{17\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(36 + 17 - 4)$$

$$= \frac{49}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{49}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{49\sqrt{2}}{2}$$

13) $\frac{15}{\sqrt[3]{135}} - \frac{15}{\sqrt[5]{25}} + \frac{15}{\sqrt[9]{125}} = \frac{15}{3\sqrt[3]{5}} - \frac{15}{\sqrt[3]{5}} + \frac{15}{\sqrt[3]{5}}$

$$= \frac{5}{\sqrt[3]{5}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$$

14) เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 \frac{15}{\sqrt[3]{135}} - \frac{15}{\sqrt[6]{25}} + \frac{15}{\sqrt[9]{125}} &= \frac{5\sqrt[3]{25}}{5} \\
 &= \sqrt[3]{25} \\
 2\left(108^{\frac{1}{3}}\right) &= 2\left(\left(2^2 \times 3^3\right)^{\frac{1}{3}}\right) \\
 &= 2\left(2^{\frac{2}{3}} \times 3\right) \\
 &= 3\left(2^{\frac{5}{3}}\right) \\
 \frac{3}{432^{\frac{1}{3}}} &= \frac{3}{\left(2^4 \times 3^3\right)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \frac{3}{2^{\frac{4}{3}} \times 3} \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} \\
 \frac{288^{\frac{1}{3}}}{24^{\frac{2}{3}}} &= \frac{\left(2^5 \times 3^2\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(2^3 \times 3\right)^{\frac{2}{3}}} \\
 &= \frac{2^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}{2^2 \times 3^{\frac{2}{3}}} \\
 &= 2^{\frac{5}{3}-2} \\
 &= 2^{-\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}
 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad 2^{\frac{1}{3}} \left(2 \left(108^{\frac{1}{3}} \right) - \frac{3}{432^{\frac{1}{3}}} - \frac{288^{\frac{1}{3}}}{24^{\frac{2}{3}}} \right) &= 2^{\frac{1}{3}} \left(3 \left(2^{\frac{5}{3}} \right) - \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} - \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \right) \\
 &= 3 \left(2^{\frac{1}{3} + \frac{5}{3}} \right) - 2^{\frac{1}{3} - \frac{4}{3}} - 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} \\
 &= 3(2^2) - 2^{-1} - 2^0 \\
 &= 12 - \frac{1}{2} - 1 \\
 &= \frac{21}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad 1) \quad 3\sqrt{4x^5} - 5x\sqrt{36x^3} &= 3(2x^2\sqrt{x}) - 5x(6x\sqrt{x}) \\
 &= 6x^2\sqrt{x} - 30x^2\sqrt{x} \\
 &= (6x^2 - 30x^2)\sqrt{x} \\
 &= -24x^2\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad x\sqrt[3]{8x} - 4\sqrt[3]{27x^4} + \frac{\sqrt[3]{675x^6}}{\sqrt[3]{25x^2}} &= x(2\sqrt[3]{x}) - 4(3x\sqrt[3]{x}) + \frac{3x^2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{25x^2}} \\
 &= 2x\sqrt[3]{x} - 12x\sqrt[3]{x} + \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^2}} \\
 &= 2x\sqrt[3]{x} - 12x\sqrt[3]{x} + \left(\frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^2}} \times \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} \right) \\
 &= 2x\sqrt[3]{x} - 12x\sqrt[3]{x} + \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{x} \\
 &= 2x\sqrt[3]{x} - 12x\sqrt[3]{x} + 3x\sqrt[3]{x} \\
 &= (2 - 12 + 3)x\sqrt[3]{x} \\
 &= -7x\sqrt[3]{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \left(\frac{27x^3}{y^6} \right)^{\frac{2}{3}} &= \left(\frac{3^3 \times x^3}{y^6} \right)^{\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{3^2 \times x^2}{y^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{27x^3}{y^6} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3^2 x^2}{y^4} \\ 4) \quad & \left(\frac{125x^3y^4}{27x^{-6}y} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{5^3 \times x^{3-(-6)}y^{4-1}}{3^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ & = \left(\frac{5^3 \times x^9y^3}{3^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ & = \frac{5x^3y}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & \left(6x^{\frac{1}{2}}y \right)^{-2} \left(3xy^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(6^{-2}x^{-1}y^{-2} \right) \left(3^2x^2y \right) \\ & = \frac{9}{36}x^{-1+2}y^{-2+1} \\ & = \frac{1}{4}xy^{-1} \\ & = \frac{x}{2^2y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & \left(\frac{x^{-2}y^{-\frac{3}{2}}}{27xy^{\frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{x^{-2-1}y^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}}{3^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \\ & = \left(\frac{x^{-3}y^{-2}}{3^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \\ & = \frac{x^2y^{\frac{4}{3}}}{3^{-2}} \\ & = 3^2x^2y^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad 1) \quad & \frac{\sqrt{432a^3b^5}}{\sqrt{144ab^2}} = \sqrt{\frac{432a^3b^5}{144ab^2}} \\ & = \sqrt{3a^{3-1}b^{5-2}} \\ & = \sqrt{3a^2b^3} \\ & = ab\sqrt{3b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \sqrt[3]{\frac{5a^3}{27b}} &= \sqrt[3]{\frac{5a^3}{27b} \times \frac{b^2}{b^2}} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{5a^3b^2}{3^3b^3}} \\
 &= \frac{a}{3b} \sqrt[3]{5b^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \sqrt{\frac{40x^2y^5}{3a^2b^5}} &= \sqrt{\frac{(2^2 \times 10)x^2y^5}{3a^2b^5}} \\
 &= \frac{2xy^2}{ab^2} \sqrt{\frac{10y}{3b}} \\
 &= \frac{2xy^2}{ab^2} \left(\frac{\sqrt{10y}}{\sqrt{3b}} \times \frac{\sqrt{3b}}{\sqrt{3b}} \right) \\
 &= \frac{2xy^2 \sqrt{30by}}{3ab^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \left(\sqrt{\frac{11a^3b}{2xy^3}} \right) \left(\sqrt{\frac{22x^2y}{25ab}} \right) &= \sqrt{\left(\frac{11a^3b}{2xy^3} \right) \left(\frac{22x^2y}{25ab} \right)} \\
 &= \sqrt{\frac{121}{25} a^{3-1} b^{1-1} x^{2-1} y^{1-3}} \\
 &= \sqrt{\frac{121}{25} a^2 b^0 x y^{-2}} \\
 &= \sqrt{\frac{121a^2x}{25y^2}} \\
 &= \frac{11a}{5y} \sqrt{x}
 \end{aligned}$$

8. 1) เนื่องจาก $2\sqrt{2} < 3$

ดังนั้น $2\sqrt{2}\sqrt{5} < 3\sqrt{5}$

2) เนื่องจาก $(\sqrt[3]{-56})(\sqrt[3]{-49}) = \sqrt[3]{(-56)(-49)} = \sqrt[3]{(56)(49)} = \sqrt[3]{2^3 \times 7^3} = 14$

และ $(\sqrt[3]{48})(\sqrt[3]{36}) = \sqrt[3]{(48)(36)} = \sqrt[3]{2^6 \times 3^3} = 12$

ดังนั้น $(\sqrt[3]{-56})(\sqrt[3]{-49}) > (\sqrt[3]{48})(\sqrt[3]{36})$

3) เนื่องจาก $(-8)^{\frac{2}{3}} = \left((-8)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (-2)^2 = 4$ และ $(-64)^{\frac{1}{3}} = -4$

ดังนั้น $(-8)^{\frac{2}{3}} > (-64)^{\frac{1}{3}}$

4) เนื่องจาก $3(-27)^{\frac{2}{3}} = 3\left((-27)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3(-3)^2 = 27$

และ $-2(9)^{\frac{3}{2}} = -2\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = -2(3)^3 = -54$

ดังนั้น $3(-27)^{\frac{2}{3}} > -2(9)^{\frac{3}{2}}$

5) เนื่องจาก $2(-8)^{\frac{1}{3}} = 2(-2) = -4$ และ $-3(2)^{\frac{1}{2}} \approx -4.24$

ดังนั้น $2(-8)^{\frac{1}{3}} > -3(2)^{\frac{1}{2}}$

6) เนื่องจาก $2^{-1}4^{\frac{1}{2}}8^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\left(4^{\frac{1}{2}}8^{\frac{3}{2}}\right)$ และ $\frac{4^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{3}{2}}} = 4^{\frac{1}{2}}8^{\frac{3}{2}}$

ดังนั้น $2^{-1}4^{\frac{1}{2}}8^{\frac{3}{2}} < \frac{4^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{3}{2}}}$

7) เนื่องจาก $\frac{\sqrt[4]{54}\sqrt[4]{6}}{\sqrt[6]{8}} = \frac{(3^3 \times 2)^{\frac{1}{4}}(2 \times 3)^{\frac{1}{4}}}{(2^3)^{\frac{1}{6}}} = \frac{3^{\frac{3}{4}}2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = 3$

ดังนั้น $3^{\frac{3}{4}}3^{\frac{1}{4}} > \frac{\sqrt[4]{54}\sqrt[4]{6}}{\sqrt[6]{8}}$

9. จาก $n = n_0(1+r)^t$

ในที่นี้ $n_0 = 7.4$, $r = \frac{1.13}{100} = 0.0113$ และ $t = 27$

จะได้

$$\begin{aligned} n &= 7.4(1+0.0113)^{27} \\ &= 7.4(1.0113)^{27} \\ &\approx 10.02 \end{aligned}$$

ดังนั้น ใน พ.ศ. 2586 โลกจะมีจำนวนประชากรประมาณ 10.02 พันล้านคน

10. จาก $n = 10000(1.3)^{\frac{t}{10}}$ และ $t = 10$

จะได้
$$\begin{aligned} n &= 10000(1.3)^{\frac{10}{10}} \\ &= 10000(1.3) \\ &= 13000 \end{aligned}$$

ดังนั้น ในอีก 10 ปีข้างหน้า จะมีจำนวนประชากรในเมืองนี้ 13,000 คน

11. จาก $S = (0.1091)(wh)^{0.5}$

ในที่นี้ $w = 180$ และ $h = 64$

จะได้
$$\begin{aligned} S &= (0.1091)(180 \times 64)^{0.5} \\ &= (0.1091)(180 \times 64)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx 11.71 \end{aligned}$$

ดังนั้น คนที่สูง 5 ฟุต 4 นิ้ว และหนัก 180 ปอนด์ จะมีพื้นที่ผิวหนังประมาณ 11.71 ตารางฟุต

12. จาก $A = 10(0.8)^t$ และ $A = 1$

จะได้
$$1 = 10(0.8)^t$$

นั่นคือ
$$(0.8)^t = 0.1$$

เนื่องจาก $(0.8)^{10} \approx 0.107$ และ $(0.8)^{11} \approx 0.086$

ดังนั้น ถ้าต้องการให้ปริมาณยาที่เหลืออยู่ในร่างกายน้อยกว่า 1 มิลลิกรัม จะต้องใช้เวลาอย่างน้อย 11 ชั่วโมง

13. จาก $a = p^{\frac{2}{3}}$ และ $p = 165$

จะได้
$$\begin{aligned} a &= 165^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(165^{\frac{1}{3}}\right)^2 \\ &\approx 30.08 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางเฉลี่ยจากดาวเนปจูนไปยังดวงอาทิตย์ประมาณ 30.08 AU

14. 1) ในที่นี้ $P = 100000$, $n = 50$ และ $r = \frac{4}{100} = 0.04$

จากทฤษฎีบท 7 จะมีจำนวนเงินฝากเมื่อสิ้นปีที่ 50 คือ

$$100,000(1+0.04)^{50} \approx 710,668.33 \text{ บาท}$$

ดังนั้น เมื่อฝากครบ 50 ปี กรจะได้รับเงินทั้งหมดประมาณ 710,668.33 บาท

2) ในที่นี้ $n = 30$, $r = \frac{4}{100} = 0.04$

และเงินรวมในบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 30 เท่ากับ 10,000,000 บาท

ให้ P คือ เงินต้น จากทฤษฎีบท 7 จะได้

$$P(1+0.04)^{30} = 10,000,000$$

$$P = 10,000,000(1.04)^{-30}$$

$$\approx 3,083,186.68$$

จะได้ว่า ถ้าต้องการให้มีเงินในบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 30 เป็นจำนวนเงิน 10,000,000 บาท

แล้วจะต้องฝากเงินต้นอย่างน้อย 3,083,187 บาท

15. ในที่นี้ $P = 50,000$ และ $n = 10$ เงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ 10 เท่ากับ 67,195.82 บาท

ให้อัตราดอกเบี้ยที่ธนาคารกำหนด คือ $i\%$ ต่อปี และ $r = \frac{i}{100}$ จากทฤษฎีบท 7 จะได้

$$50,000(1+r)^{10} = 67,195.82$$

$$(1+r)^{10} = \frac{67,195.82}{50,000}$$

$$(1+r)^{10} = 1.3439164$$

$$1+r = (1.3439164)^{\frac{1}{10}}$$

$$1+r \approx 1.03$$

$$r \approx 0.03$$

นั่นคือ $i \approx 3$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยที่ธนาคารกำหนดสำหรับเงินฝากนี้ประมาณ 3%

16. จากโจทย์ สามารถใช้แนวคิดเดียวกับการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น โดยใช้ P แทน

เงินเดือนเริ่มต้น i แทนร้อยละของเงินเดือนของแพทย์ที่เพิ่มขึ้นต่อปี และ $r = \frac{i}{100}$

จะได้ $r = \frac{6}{100} = 0.06$

- 1) พิจารณาเงินเดือนของนายแพทย์ศุภกุล

ในที่นี้ $P = 17,920$ และ $n = 30 - 24 = 6$

จากทฤษฎีบท 7 จะได้ว่า เมื่อนายแพทย์ศุภกุลมีอายุ 30 ปี จะได้รับเงินเดือน

ประมาณ $17,920(1+0.06)^6 \approx 25,419.86$ บาท

พิจารณาเงินเดือนของแพทย์หญิงวัฒนา

ในที่นี้ $P = 20,000$ และ $n = 30 - 27 = 3$

จากทฤษฎีบท 7 จะได้ว่า เมื่อแพทย์หญิงวัฒนามีอายุ 30 ปี จะได้รับเงินเดือน
ประมาณ $20,000(1+0.06)^3 \approx 23,820.32$ บาท

ดังนั้น เมื่อทั้งสองคนมีอายุ 30 ปี นายแพทย์ศุภกุลจะมีเงินเดือนมากกว่า
แพทย์หญิงวัฒนา และมากกว่าประมาณ $25,419.86 - 23,820.32 = 1,599.54$ บาท

- 2) จากโจทย์ อัตราเงินเดือนสูงสุดของแพทย์จะได้รับ คือ 76,800 บาท

พิจารณาเงินเดือนของนายแพทย์ศุภกุล

ในที่นี้ $P = 17,920$ จากทฤษฎีบท 7 จะได้

$$\begin{aligned} 17,920(1+0.06)^n &= 76,800 \\ (1.06)^n &= \frac{76,800}{17,920} \\ &\approx 4.2857 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(1.06)^{24} \approx 4.0489$ และ $(1.06)^{25} \approx 4.2919$

จะได้ $17,920(1.06)^{24} \approx 72,556.91$ และ $17,920(1.06)^{25} \approx 76,910.32$

นั่นคือ เมื่อนายแพทย์ศุภกุลทำงานไปแล้ว 24 ปี เงินเดือนจะยังไม่ถึง 76,800 บาท

แต่เมื่อนายแพทย์ศุภกุลทำงานไปแล้ว 25 ปี จึงจะได้รับเงินเดือนสูงสุดของแพทย์
คือ 76,800 บาท

จะได้ว่า นายแพทย์ศุภกุลจะได้รับเงินเดือนสูงสุดเมื่ออายุ $24 + 25 = 49$ ปี

พิจารณาเงินเดือนของแพทย์หญิงวัฒนา

ในที่นี้ $P = 20,000$ จากทฤษฎีบท 7 จะได้

$$\begin{aligned} 20,000(1+0.06)^n &= 76,800 \\ (1.06)^n &= \frac{76,800}{20,000} \\ &= 3.84 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(1.06)^{23} \approx 3.8197$ และ $(1.06)^{24} \approx 4.0489$

จะได้ $20,000(1.06)^{23} \approx 76,394.99$ และ $20,000(1.06)^{24} \approx 80,978.69$

นั่นคือ เมื่อแพทย์หญิงวัฒนาทำงานไปแล้ว 23 ปี เงินเดือนจะยังไม่ถึง 76,800 บาท

แต่เมื่อแพทย์หญิงวัฒนาทำงานไปแล้ว 24 ปี จึงจะได้รับเงินเดือนสูงสุดของแพทย์ คือ
76,800 บาท

จะได้ว่า แพทย์หญิงวัฒนาจะได้รับเงินเดือนสูงสุดเมื่ออายุ $27 + 24 = 51$ ปี

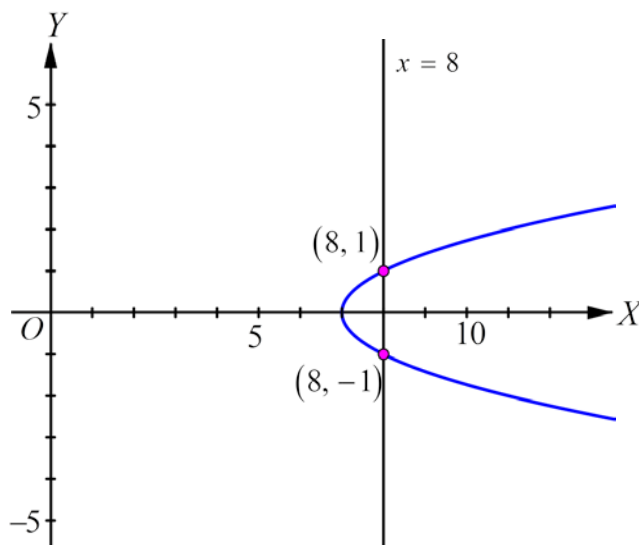
ดังนั้น นายแพทย์ศุภกุลจะได้รับเงินเดือนสูงสุดเมื่ออายุ 49 ปี และแพทย์หญิงวัฒนา

จะได้รับเงินเดือนสูงสุดเมื่ออายุ 51 ปี

บทที่ 2 ฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด 2.1

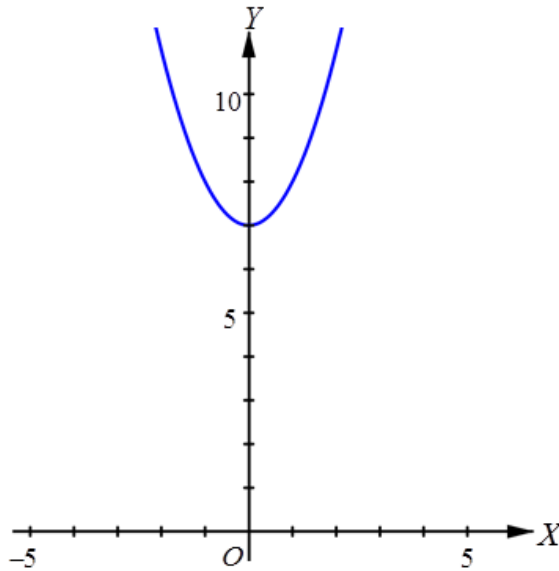
1. 1) เนื่องจาก สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน A ไม่มีตัวใดซ้ำกันเลย
ดังนั้น A เป็นฟังก์ชัน
- 2) เนื่องจาก มีคู่อันดับใน B ที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน
คือ $(p, 1)$ และ $(p, 3)$
ดังนั้น B ไม่เป็นฟังก์ชัน
- 3) วิธีที่ 1 เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x = y^2 + 7\}$ ได้ดังนี้



จากกราฟ สังเกตว่า มีเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ที่ตัดกราฟสองจุด
เช่น เส้นตรง $x = 8$ ตัดกราฟสองจุด คือ $(8, 1)$ และ $(8, -1)$
ดังนั้น C ไม่เป็นฟังก์ชัน

- วิธีที่ 2 เนื่องจากมีคู่อันดับใน C ที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลัง
ต่างกัน เช่น $(8, 1)$ และ $(8, -1)$
ดังนั้น C ไม่เป็นฟังก์ชัน

- 4) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid y = x^2 + 7\}$ ได้ดังนี้



จากกราฟ สังเกตว่า ไม่มีเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y เส้นใดตัดกราฟมากกว่า 1 จุด ดังนั้น D เป็นฟังก์ชัน

2. 1) $f(a) = 2$
 $f(b) = 4$
 $f(c) = 3$
 $f(d) = 1$
- 2) $f(a) = 1$
 $f(b) = 4$
 $f(c) = 2$
 $f(d) = 3$
3. 1) จาก $f(x) = x^2$ และ $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 จะได้ $f(-2) = (-2)^2 = 4$
 $f(-1) = (-1)^2 = 1$
 $f(0) = 0^2 = 0$
 $f(1) = 1^2 = 1$
 $f(2) = 2^2 = 4$

ดังนั้น $f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

2) จาก $f(x) = \sqrt{x+2}$ และ $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

จะได้ $f(-2) = \sqrt{(-2)+2} = \sqrt{0} = 0$

$$f(-1) = \sqrt{(-1)+2} = \sqrt{1} = 1$$

$$f(0) = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$$

$$f(1) = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

$$f(2) = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

ดังนั้น $f = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, \sqrt{2}), (1, \sqrt{3}), (2, 2)\}$

4. เนื่องจาก $-2 < 1$ จะได้ $f(-2) = 1$

เนื่องจาก $0 < 1$ จะได้ $f(0) = 1$

เนื่องจาก $1 \leq 1 \leq 3$ จะได้ $f(1) = 1$

เนื่องจาก $\frac{1}{2} < 1$ จะได้ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

เนื่องจาก $1 \leq \sqrt{3} \leq 3$ จะได้ $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

เนื่องจาก $9 > 3$ จะได้ $f(9) = 2$

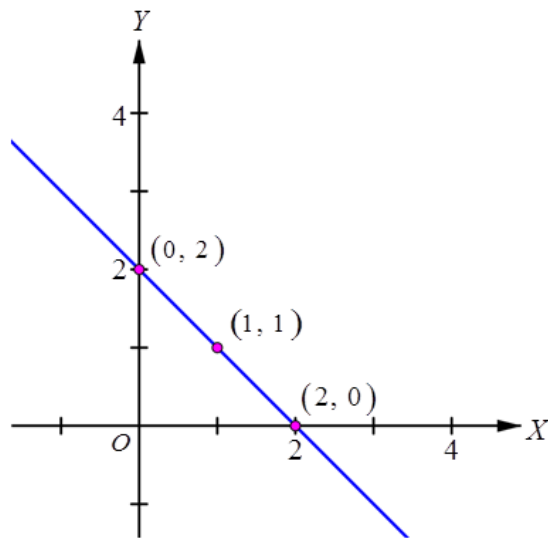
เนื่องจาก $h > 0$ จะได้ $3+h > 3$ นั่นคือ $f(3+h) - f(3) = 2 - 3 = -1$

5. 1) แทน x ในสมการ $y = -x + 2$ ด้วย 0, 1 และ 2 จะได้คู่อันดับซึ่งเป็นสมาชิกของเซต r ดังตาราง

x	0	1	2
y	2	1	0
(x, y)	(0, 2)	(1, 1)	(2, 0)

ซึ่งเขียนกราฟของคู่อันดับในตาราง ได้จุด (0,2), (1,1) และ (2,0)

และเมื่อให้ x เป็นจำนวนจริง จะเขียนกราฟของ r ได้ดังนี้

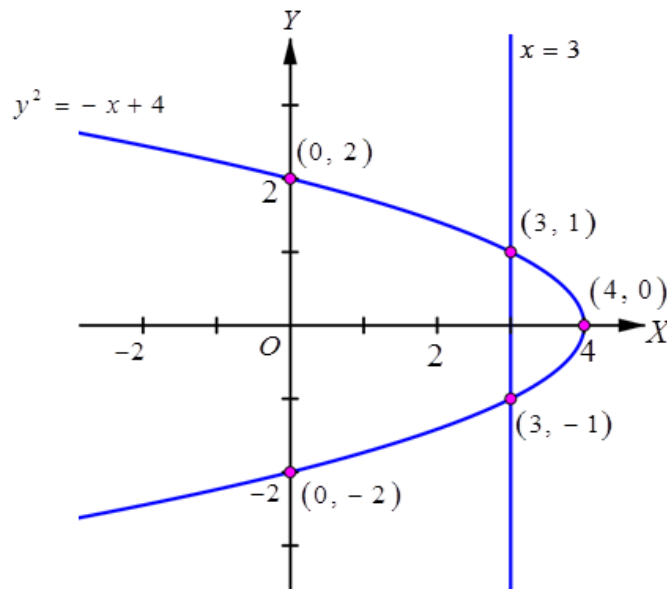


จากรูป พบว่าไม่มีเส้นขนานกับแกน Y เส้นใดที่ตัดกราฟของ r มากกว่า 1 จุด ดังนั้น r เป็นฟังก์ชัน

- 2) แทน x ในสมการ $y^2 = -x + 4$ ด้วย 0, 3 และ 4 จะได้ คู่อันดับซึ่งเป็นสมาชิกของเซต r ดังตาราง

x	0	3	4
y	$-2, 2$	$-1, 1$	0
(x, y)	$(0, -2), (0, 2)$	$(3, -1), (3, 1)$	$(4, 0)$

ซึ่งเขียนกราฟของคู่อันดับในตาราง ได้จุด $(0, -2), (0, 2), (3, -1), (3, 1)$ และ $(4, 0)$ และเมื่อให้ x เป็นจำนวนจริง จะเขียนกราฟของ r ได้ดังนี้



จากรูป สังเกตว่า มีเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ที่ตัดกับกราฟ r สองจุด เช่น
เส้นตรง $x=3$ ตัดกราฟสองจุด คือ $(3,-1)$ และ $(3,1)$

ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน

6. 1) พิจารณา $f(x) = x^2 - 1$ จะเห็นว่า ไม่ว่าแทน x เป็นจำนวนจริงใดก็จะได้ค่า
หา $f(x)$ ได้เสมอ

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริง หรือ $D_f = \mathbb{R}$

และเมื่อพิจารณา $y = x^2 - 1$

จะได้ว่า $x = \pm\sqrt{y+1}$

เนื่องจาก จำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์ที่สองต้องไม่เป็นจำนวนลบ

ดังนั้น $y+1 \geq 0$ นั่นคือ $y \geq -1$

ดังนั้น $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$

- 2) เนื่องจากในระบบจำนวนจริง จำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์ที่สองต้องไม่เป็น
จำนวนลบ

ดังนั้น $x-7 \geq 0$ นั่นคือ $x \geq 7$

จะได้ว่า โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 7 หรือ

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

และเมื่อพิจารณา $y = \sqrt{x-7}$

เนื่องจาก $\sqrt{x-7} \geq 0$ จะได้ $y \geq 0$

ดังนั้น $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

- 3) เนื่องจากในระบบจำนวนจริงไม่นิยามเศษส่วนที่ตัวส่วนเป็นศูนย์

ดังนั้น $2x-3 \neq 0$

นั่นคือ $x \neq \frac{3}{2}$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ $\frac{3}{2}$

หรือ $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3}{2}\right\}$

และเมื่อพิจารณา $y = \frac{1}{2x-3}$

จะได้ว่า $2x-3 = \frac{1}{y}$

แสดงว่า y เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$

- 4) เนื่องจากในระบบจำนวนจริง จำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์ที่สองต้องไม่เป็นจำนวนลบ

ดังนั้น $x \geq 0$

จะได้ว่า โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 หรือ

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

และเมื่อพิจารณา $y = -\sqrt{x}$

เนื่องจาก $\sqrt{x} \geq 0$ จะได้ $-\sqrt{x} \leq 0$ นั่นคือ $y \leq 0$

ดังนั้น $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$

7. เนื่องจาก $-4 < x < 3$

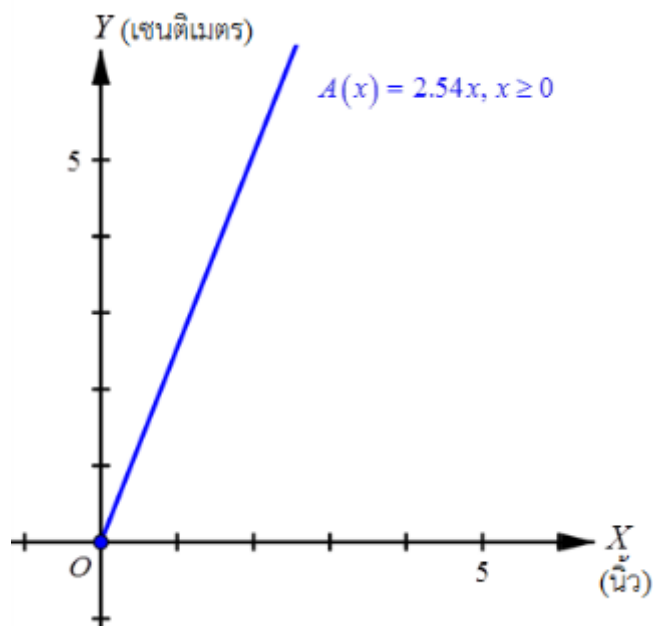
จะได้ $0 \leq x^2 < 16$ นั่นคือ $-6 \leq x^2 - 6 < 10$

ดังนั้น $-6 \leq f(x) < 10$

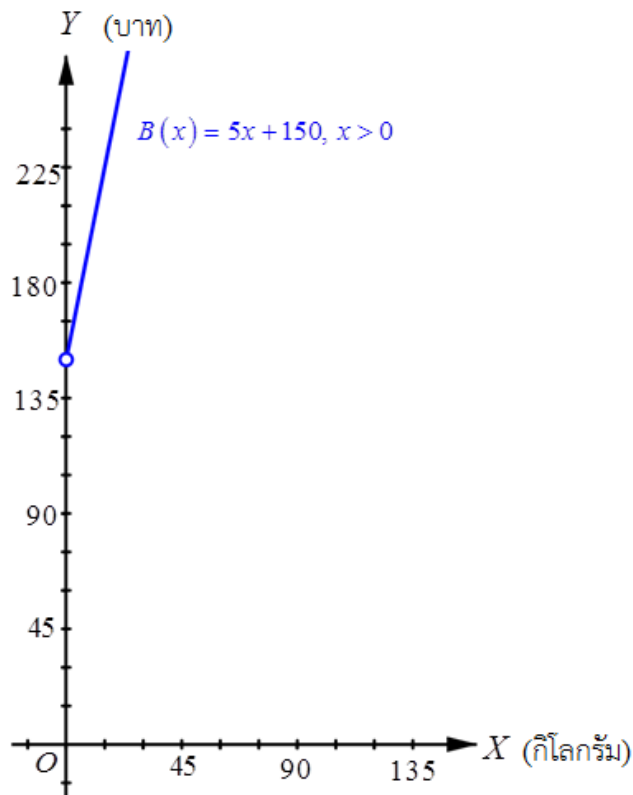
จะได้ว่า $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid -6 \leq y < 10\}$

แบบฝึกหัด 2.2

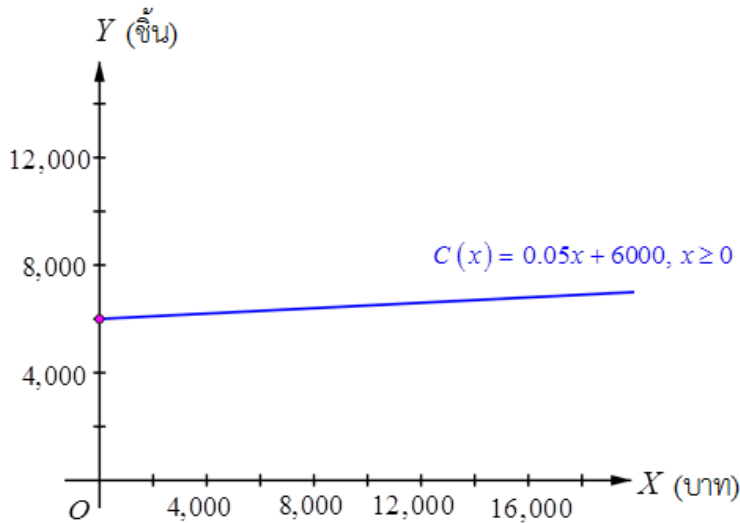
1.
 - 1) จ
 - 2) ข
 - 3) ง
 - 4) ค
 - 5) ก
2.
 - 1) ให้ $f(x) = \frac{2}{7}x + 1$
 หาค่าของฟังก์ชัน f ที่ 3 จะได้ $f(3) = \frac{2}{7}(3) + 1 = \frac{13}{7}$
 จะได้ จุด $(3, \frac{13}{7})$ อยู่บนกราฟของ f
 ดังนั้น จุด $(3, 5)$ ไม่อยู่บนกราฟ $y = \frac{2}{7}x + 1$
 - 2) ให้ $f(x) = -2x - 7$
 หาค่าของฟังก์ชัน f ที่ -4 จะได้ $f(-4) = -2(-4) - 7 = 1$
 จะได้ จุด $(-4, 1)$ อยู่บนกราฟของ f
 ดังนั้น จุด $(-4, -5)$ ไม่อยู่บนกราฟ $2x + y = -7$
 - 3) เนื่องจาก $y = -1$ เป็นกราฟเส้นตรงขนานแกน X ผ่านจุด $(0, -1)$
 ดังนั้น จุด $(4, -5)$ ไม่อยู่บนกราฟ $y = -1$
 - 4) เนื่องจาก $x = 2$ เป็นกราฟเส้นตรงขนานแกน Y ผ่านจุด $(2, 0)$
 ดังนั้น จุด $(2, 0)$ อยู่บนกราฟ $x = 2$
 - 5) ให้ $f(x) = -x$
 หาค่าของฟังก์ชัน f ที่ 1 จะได้ $f(1) = -1$
 ดังนั้น จุด $(1, -1)$ อยู่บนกราฟ $x + y = 0$
3.
 - 1) ให้ $A(x)$ เป็นฟังก์ชันของความยาวที่มีหน่วยเป็นเซนติเมตร เมื่อ x เป็นความยาวที่มีหน่วยเป็นนิ้ว
 เนื่องจาก ความยาวที่มีหน่วยเป็นนิ้ว เท่ากับ 2.54 เท่าของความยาวที่มีหน่วยเป็นเซนติเมตร
 ดังนั้น $A(x) = 2.54x$ เมื่อ $x \geq 0$ และเขียนกราฟแสดงได้ดังนี้



- 2) ให้ $B(x)$ เป็นฟังก์ชันของค่าขนส่งสินค้าซึ่งมีน้ำหนัก x กิโลกรัม จากกรุงเทพฯ ไปยังจังหวัดที่อยู่ในเขตชายแดนภาคใต้ เนื่องจาก ค่าขนส่งประกอบด้วยค่าขนส่งขั้นต่ำ 150 บาท กับค่าขนส่งที่คิดตาม น้ำหนักสินค้ากิโลกรัมละ 5 บาท ดังนั้น $B(x) = 5x + 150$ เมื่อ $x > 0$ และเขียนกราฟแสดงได้ดังนี้

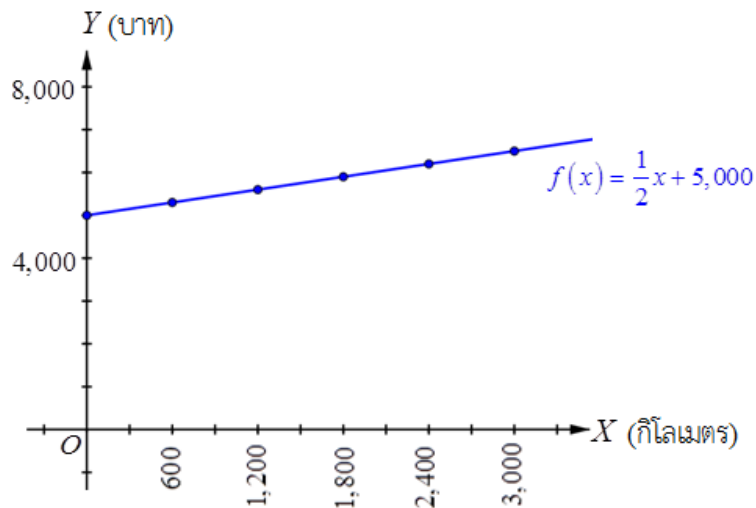


- 3) ให้ $C(x)$ แทนฟังก์ชันของรายได้ของพนักงานขายสินค้าที่มียอดขาย x บาท เนื่องจาก รายได้ของพนักงานขายสินค้าประกอบด้วยเงินเดือนประจำ 6,000 บาท รวมกับค่านายหน้า 5% ของยอดขายสินค้า ดังนั้น $C(x) = \frac{5}{100}x + 6,000$ เมื่อ $x \geq 0$ และเขียนกราฟแสดงได้ดังนี้



4. 1) ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงยอดขายสินค้า (ชิ้น) เมื่อเวลาผ่านไป x ปี

$$f(x) = 12,000 + x(0.1)(12,000) = 12,000 + 1,200x$$
 ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงยอดขายสินค้าเมื่อเวลาผ่านไป x ปี คือ $f(x) = 12,000 + 1,200x$
- 2) เนื่องจาก $f(5) = 12,000 + 1,200(5) = 18,000$
 ดังนั้น ใน พ.ศ. 2565 บริษัทนี้จะมียอดขายสินค้า 18,000 ชิ้น
5. จากข้อมูลในตารางพบว่า ทุกๆ ระยะทางที่เพิ่มขึ้น 600 กิโลเมตร จะมีค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้น 300 บาท นั่นคือ ทุกๆ ระยะที่เพิ่มขึ้น 1 กิโลเมตร จะมีค่าใช้จ่ายเพิ่มขึ้น $\frac{1}{2}$ บาท
 ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันของค่าใช้จ่ายในการเดินทาง x กิโลเมตร
 ดังนั้น $f(x) = \frac{1}{2}x + 5,000$
 เขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้



- 1) ค่าใช้จ่ายสำหรับการเดินทางประมาณ 400 กิโลเมตร คำนวณจากการแทน x ใน $f(x)$ ด้วย 400 จะได้

$$f(400) = \frac{1}{2}(400) + 5,000 = 5,200$$

ดังนั้น ถ้าต้องการเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปยังจังหวัดขอนแก่น จะต้องเสียค่าใช้จ่ายประมาณ 5,200 บาท

- 2) ระยะทางในการเดินทาง โดยที่มีเงิน 5,500 บาท คำนวณหา x ได้จาก

$$\begin{aligned} 5,500 &= \frac{1}{2}x + 5,000 \\ x &= 1,000 \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้ามีเงิน 5,500 บาท แล้วเดซจะเดินทางได้ประมาณ 1,000 กิโลเมตร

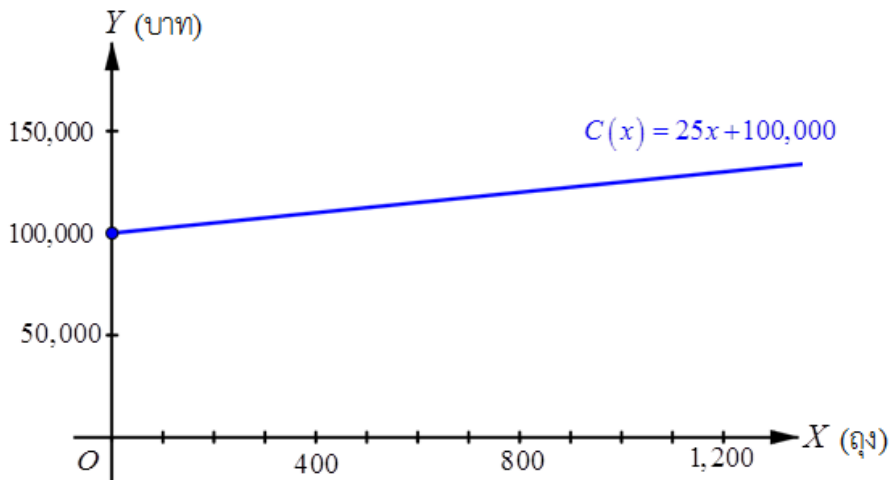
- 3) ค่าใช้จ่ายสำหรับการเดินทางประมาณ 2,100 กิโลเมตร คำนวณจากการแทน x ใน $f(x)$ ด้วย 2,100 จะได้

$$f(2,100) = \frac{1}{2}(2,100) + 5,000 = 6,050$$

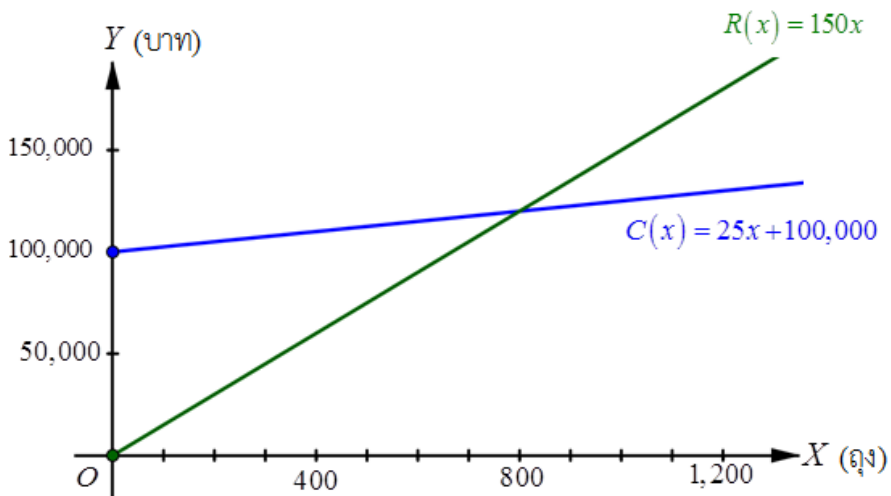
นั่นคือ การเดินทาง 2,100 กิโลเมตร จะมีค่าใช้จ่ายประมาณ 6,050 บาท

ดังนั้น ถ้าเดซมีเงิน 6,000 บาท เขาจะไม่สามารถเดินทางจากจังหวัดแม่ฮ่องสอน ไปยังจังหวัดยะลาได้ โดยที่เขายังขาดเงินอีกประมาณ 50 บาท

6. 1) ให้ $C(x)$ แทนฟังก์ชันของต้นทุนในการผลิตมะม่วงอบแห้ง x ถุง
 เนื่องจากต้นทุนประกอบด้วยสองส่วน คือ ต้นทุนขั้นต่ำ 100,000 บาท และ
 ต้นทุนในการผลิตถุงละ 25 บาท
 ดังนั้น $C(x) = 25x + 100,000$



- 2) ให้ $R(x)$ แทนฟังก์ชันของรายได้จากการขายมะม่วงอบแห้ง x ถุง
 เนื่องจาก ขบาแก้วขายมะม่วงอบแห้งในราคาถุงละ 150 บาท
 ดังนั้น $R(x) = 150x$



- 3) ต้นทุนสำหรับการผลิตมะม่วงอบแห้ง 900 ลูก คำนวณจากการแทน x ใน $C(x)$ ด้วย 900 จะได้

$$C(900) = 25(900) + 100,000 = 122,500$$

นั่นคือ ชบาแก้วผลิตมะม่วงอบแห้ง 900 ลูก มีต้นทุน 122,500 บาท

และรายได้สำหรับการขายมะม่วงอบแห้ง 900 ลูก คำนวณจากการแทน x ใน $R(x)$ ด้วย 900 จะได้

$$R(900) = 150(900) = 135,000$$

นั่นคือ ชบาแก้วขายมะม่วงอบแห้ง 900 ลูก มีรายได้ 135,000 บาท

ดังนั้น ชบาแก้วได้กำไรทั้งหมด $135,000 - 122,500 = 12,500$ บาท

- 4) จุดคุ้มทุน คือ จุดที่รายได้เท่ากับต้นทุน นั่นคือ

$$R(x) = C(x)$$

$$150x = 25x + 100,000$$

$$125x = 100,000$$

$$x = 800$$

ดังนั้น ชบาแก้วจะต้องขายมะม่วงอบแห้ง 800 ลูก จึงจะคุ้มทุน

- 5) เนื่องจาก ถ้าชบาแก้วขายมากกว่า 800 ลูก ชบาแก้วจะมีรายได้มากกว่าต้นทุน ดังนั้น ส่วนต่างของต้นทุนกับรายได้ คือ

$R(x) - C(x) = 150x - (25x + 100,000) = 125x - 100,000$ ซึ่งจะมีส่วนต่างที่เพิ่มมากขึ้น เมื่อขายมะม่วงอบแห้งได้มากขึ้น

7. 1) ให้ $f(t)$ แทนฟังก์ชันแสดงน้ำหนักรีดน้ำที่คัดแยกโดยเครื่องคัดแยกเครื่องที่ 1 เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง

เนื่องจากเครื่องที่ 1 คัดแยกน้ำหนักรีดน้ำด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 12 ตันต่อชั่วโมง จะได้ $f(t) = 12t$ เมื่อ $0 \leq t \leq 10$

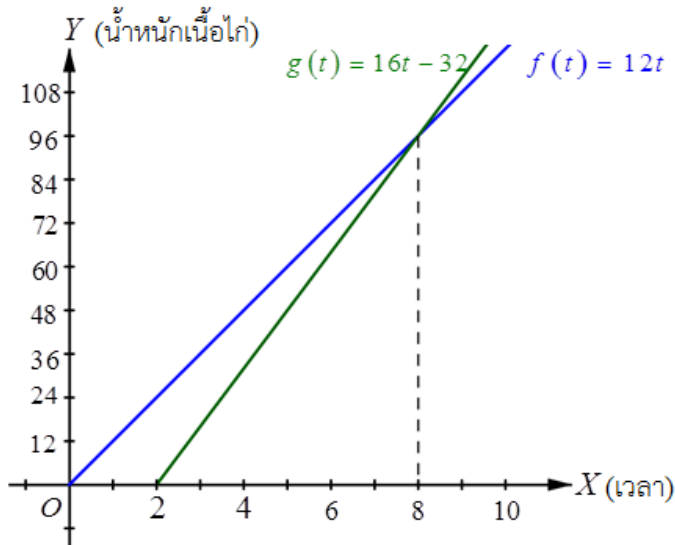
ให้ $g(t)$ แทนฟังก์ชันแสดงน้ำหนักรีดน้ำที่คัดแยกโดยเครื่องคัดแยกเครื่องที่ 2 เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง

เนื่องจากเครื่องที่ 2 คัดแยกน้ำหนักรีดน้ำด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 16 ตันต่อชั่วโมง แต่เริ่มเปิดใช้งานช้ากว่าเครื่องที่ 1 อยู่ 2 ชั่วโมง

นั่นคือ $g(t) = 16(t - 2) = 16t - 32$ เมื่อ $2 \leq t \leq 10$

จะได้ $g(t) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq t < 2 \\ 16t - 32 & ; 2 \leq t \leq 10 \end{cases}$

เขียนกราฟแสดง $f(t)$ และ $g(t)$ ได้ดังนี้



- 2) ณ เวลา 12:00 น. จะได้ $t = 5$

จะได้ $f(5) = 12(5) = 60$

และ $g(5) = 16(5) - 32 = 48$

ดังนั้น ณ เวลา 12:00 น. เครื่องที่ 1 คัดแยกเนื้อไก่ได้มากกว่า เครื่องที่ 2 และมากกว่าอยู่ 12 ตัน

- 3) ถ้าเครื่องคัดแยกเครื่องที่ 2 คัดแยกน้ำหนักเนื้อไก่ได้มากกว่าเครื่องที่ 1
จะได้ว่า

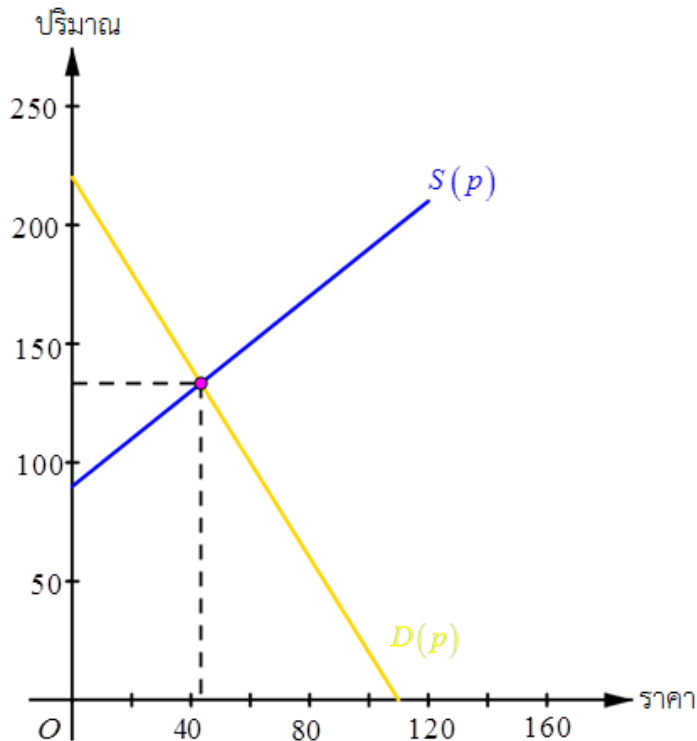
$$g(t) > f(t)$$

นั่นคือ $16t - 32 > 12t$

จะได้ $t > 8$

นั่นคือ เครื่องคัดแยกเครื่องที่ 2 จะสามารถคัดแยกน้ำหนักเนื้อไก่ได้มากกว่าเครื่องที่ 1 หลังเวลา 15:00 น.

8. 1) เขียนกราฟของฟังก์ชันอุปสงค์และฟังก์ชันอุปทาน ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่าจุดที่กราฟของฟังก์ชันอุปสงค์ตัดกับกราฟของฟังก์ชันอุปทาน คือ จุดดุลยภาพ

- 2) เนื่องจากราคาดุลยภาพจะเกิดขึ้นเมื่ออุปสงค์เท่ากับอุปทาน นั่นคือ

$$\begin{aligned} D(p) &= S(p) \\ 220 - 2p &= p + 90 \\ -3p &= -130 \\ p &= \frac{130}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น ราคาดุลยภาพ คือ $\frac{130}{3}$ บาทต่อกิโลกรัม

- 3) จากกราฟ เมื่อพิจารณาราคาขายที่น้อยกว่า $\frac{130}{3}$ บาทต่อกิโลกรัม จะได้ว่า อุปสงค์มากกว่าอุปทาน นั่นคือ ปริมาณความต้องการซื้ออย่างพaramากกว่าปริมาณความต้องการขายอย่างพารา

แบบฝึกหัด 2.3

1. 1) $y = (x - 4)^2 - 3$

เมื่อเทียบกับ $y = (x - h)^2 + k$

จะได้ $a = 1$, $h = 4$ และ $k = -3$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดยอดที่จุด $(4, -3)$ และคู่กับกราฟ (ง)

2) $y = -(x - 4)^2 + 3$

เมื่อเทียบกับ $y = (x - h)^2 + k$

จะได้ $a = -1$, $h = 4$ และ $k = 3$

นั่นคือ กราฟคว่ำลง มีจุดยอดที่จุด $(4, 3)$ และคู่กับกราฟ (ข)

3) $y = (x + 4)^2 - 3$

เมื่อเทียบกับ $y = (x - h)^2 + k$

จะได้ $a = 1$, $h = -4$ และ $k = -3$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดยอดที่จุด $(-4, -3)$ และคู่กับกราฟ (ญ)

4) $y = -(x + 4)^2 + 3$

เมื่อเทียบกับ $y = (x - h)^2 + k$

จะได้ $a = -1$, $h = -4$ และ $k = 3$

นั่นคือ กราฟคว่ำลง มีจุดยอดที่จุด $(-4, 3)$ และคู่กับกราฟ (ก)

5) $y = 2(x - 2)^2$

เมื่อเทียบกับ $y = (x - h)^2 + k$

จะได้ $a = 2$, $h = 2$ และ $k = 0$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดยอดที่จุด $(2, 0)$ และคู่กับกราฟ (ณ)

6) $y = (x + 3)^2 - 4$

เมื่อเทียบกับ $y = (x - h)^2 + k$

จะได้ $a = 1$, $h = -3$ และ $k = -4$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดยอดที่จุด $(-3, -4)$ และคู่กับกราฟ (ข)

$$7) \quad y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$$

เมื่อเทียบกับ $y = (x-h)^2 + k$

$$\text{จะได้ } a = -\frac{1}{2}, h = -1 \text{ และ } k = -3$$

นั่นคือ กราฟคว่ำลง มีจุดยอดที่จุด $(-1, -3)$ และคู่กับกราฟ (ค)

$$8) \quad y = -2(x+3)^2 + 2$$

เมื่อเทียบกับ $y = (x-h)^2 + k$

$$\text{จะได้ } a = -2, h = -3 \text{ และ } k = 2$$

นั่นคือ กราฟคว่ำลง มีจุดยอดที่จุด $(-3, 2)$ และคู่กับกราฟ (ฉ)

$$9) \quad y = x^2 - 2x + 3$$

$$= (x^2 - 2x + 1) + 2$$

$$= (x-1)^2 + 2$$

เมื่อเทียบกับ $y = (x-h)^2 + k$

$$\text{จะได้ } a = 1, h = 1 \text{ และ } k = 2$$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดยอดที่จุด $(1, 2)$ และคู่กับกราฟ (ซ)

$$10) \quad y = 2x^2 - 4x + 5$$

$$= 2(x^2 - 2x + 1) + 3$$

$$= 2(x-1)^2 + 3$$

เมื่อเทียบกับ $y = (x-h)^2 + k$

$$\text{จะได้ } a = 2, h = 1 \text{ และ } k = 3$$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดยอดที่จุด $(1, 3)$ และคู่กับกราฟ (จ)

$$2. \quad 1) \quad \text{เขียน } f(x) = x^2 - 4x - 5 \text{ ให้อยู่ในรูป } f(x) = (x-h)^2 + k \text{ ได้ดังนี้}$$

$$f(x) = (x^2 - 4x + 4) - 9$$

$$= (x-2)^2 - 9$$

$$\text{จะได้ } a = 1, h = 2 \text{ และ } k = -9$$

เนื่องจาก $a > 0$

ดังนั้น กราฟของฟังก์ชัน f หงายขึ้น และมีจุดยอดที่จุด $(2, -9)$ และมีค่าต่ำสุด คือ -9

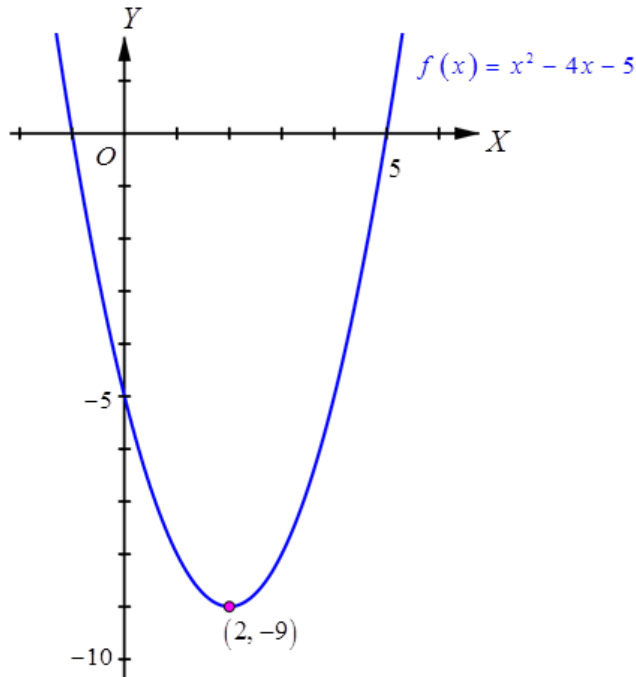
หาจุดที่กราฟตัดแกน X โดยกำหนดให้ $f(x) = 0$

นั่นคือ $x^2 - 4x - 5 = 0$
 $(x-5)(x+1) = 0$

จะได้ $x=5$ หรือ $x=-1$

ดังนั้น กราฟตัดแกน X ที่จุด $(-1, 0)$ และ $(5, 0)$

เขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 4x - 5$ ได้ดังนี้



จากกราฟ พบว่า $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \{y \mid y \geq -9\}$

2) เขียน $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ ให้อยู่ในรูป $f(x) = (x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 6x + 9) + 1 \\ &= -(x-3)^2 + 1 \end{aligned}$$

จะได้ $a=-1$, $h=3$ และ $k=1$

เนื่องจาก $a < 0$

ดังนั้น กราฟของฟังก์ชัน f คว่ำลง และมีจุดยอดที่จุด $(3, 1)$ และมีค่าสูงสุด คือ 1

หาจุดที่กราฟตัดแกน X โดยกำหนดให้ $f(x) = 0$

นั่นคือ $-x^2 + 6x - 8 = 0$

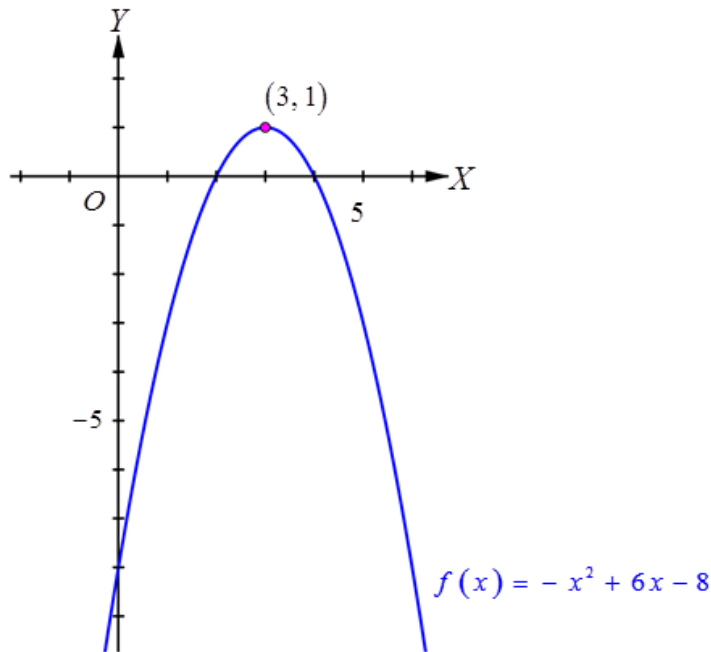
$$-(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$-(x-4)(x-2) = 0$$

จะได้ $x=4$ หรือ $x=2$

ดังนั้น กราฟตัดแกน X ที่จุด $(2, 0)$ และ $(4, 0)$

เขียนกราฟของ $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ ได้ดังนี้



จากกราฟ พบว่า $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \{y \mid y \leq 1\}$

3) เขียน $f(x) = -x^2 - 2x$ ให้อยู่ในรูป $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 + 2x + 1) + 1 \\ &= -(x+1)^2 + 1 \end{aligned}$$

จะได้ $a = -1$, $h = -1$ และ $k = 1$

เนื่องจาก $a < 0$

ดังนั้น กราฟของฟังก์ชัน f คว่ำลง และมีจุดยอดที่จุด $(-1, 1)$ และมีค่าสูงสุด คือ 1

หาจุดที่กราฟตัดแกน X โดยกำหนดให้ $f(x) = 0$

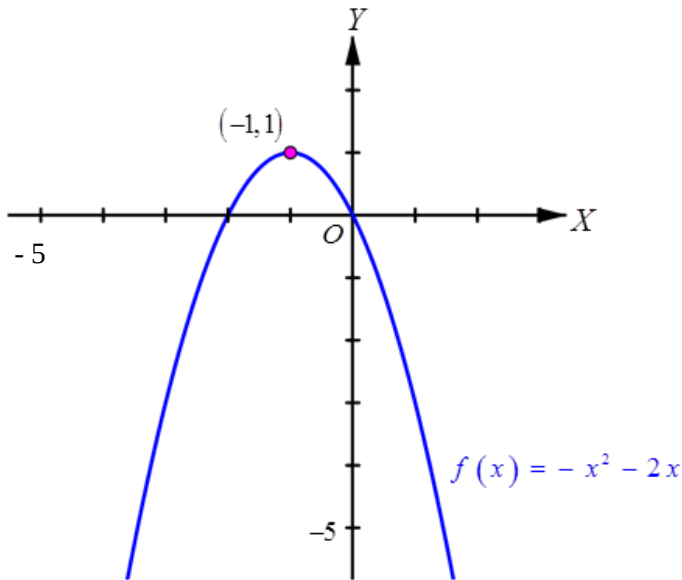
นั่นคือ $-x^2 - 2x = 0$

$$-x(x+2) = 0$$

จะได้ $x=0$ หรือ $x=-2$

ดังนั้น กราฟตัดแกน X ที่จุด $(-2, 0)$ และ $(0, 0)$

เขียนกราฟของ $f(x) = -x^2 - 2x$ ได้ดังนี้



จากกราฟ พบว่า $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \{y \mid y \leq 1\}$

- 4) เขียน $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ให้อยู่ในรูป $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 6x + 9) - 1 \\ &= (x-3)^2 - 1 \end{aligned}$$

จะได้ $a=1$, $h=3$ และ $k=-1$

เนื่องจาก $a > 0$

ดังนั้น กราฟของฟังก์ชัน f หายขึ้น และมีจุดยอดที่จุด $(3, -1)$ และมีค่าต่ำสุด คือ -1

หาจุดที่กราฟตัดแกน X โดยกำหนดให้ $f(x) = 0$

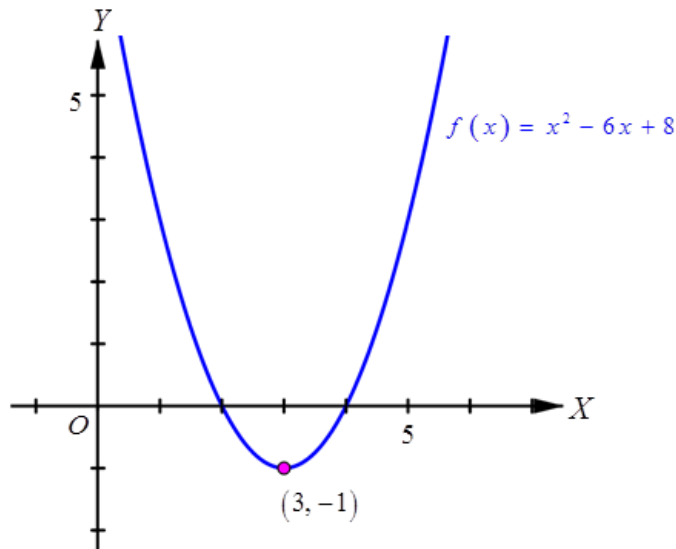
นั่นคือ $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$(x-4)(x-2) = 0$$

จะได้ $x=4$ หรือ $x=2$

ดังนั้น กราฟตัดแกน X ที่จุด $(2, 0)$ และ $(4, 0)$

เขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ได้ดังนี้



จากกราฟ พบว่า $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \{y \mid y \geq -1\}$

3. 1) ให้ y แทนกำไรจากการขายสินค้า x ชิ้น

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad y &= x(100 - 0.1x) \\ &= 100x - 0.1x^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการแสดงกำไรจากการขายสินค้า x ชิ้น คือ $y = 100x - 0.1x^2$

- 2) จาก $y = 100x - 0.1x^2$

เขียนให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y &= -0.1(x^2 - 1,000x) \\ &= -0.1(x^2 - 1,000x + 500^2) + (0.1)(500)^2 \\ &= -0.1(x - 500)^2 + 25,000 \end{aligned}$$

จะได้ $a = -0.1$, $h = 500$ และ $k = 25,000$

เนื่องจาก $a < 0$ ดังนั้น กราฟของฟังก์ชัน f คว่ำลง และมีจุดยอดที่จุด $(500, 25000)$

ดังนั้น จะต้องขายสินค้า 500 ชิ้น จึงจะได้มีกำไรมากที่สุด 25,000 บาท

4. 1) ให้ $f(x)$ แทนรายได้ต่อเดือนของเจ้าของหอพักแห่งนี้

เมื่อ x คือ จำนวนห้องว่าง

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } f(x) &= (80 - x)(4,000 + 200x) \\ &= 320,000 + 16,000x - 4,000x - 200x^2 \\ &= -200x^2 + 12,000x + 320,000\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการแสดงรายได้ของเจ้าของหอพักแห่งนี้ คือ $f(x) = -200x^2 + 12,000x + 320,000$

- 2) จาก $f(x) = -200x^2 + 12,000x + 320,000$

ถ้าต้องการให้มีรายได้เดือนละ 375,000 บาท

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ } 375,000 &= -200x^2 + 12,000x + 320,000 \\ 200x^2 - 12,000x + 55,000 &= 0 \\ x^2 - 60x + 275 &= 0 \\ (x - 55)(x - 5) &= 0\end{aligned}$$

จะได้ $x = 5$ หรือ $x = 55$

ถ้า $x = 5$ เจ้าของหอพักต้องคิดค่าเช่าห้องละ $4,000 + 200(5) = 5,000$ บาท

ถ้า $x = 55$ เจ้าของหอพักต้องคิดค่าเช่าห้องละ $4,000 + 200(55) = 15,000$ บาท

ดังนั้น ถ้าต้องการให้มีรายได้เดือนละ 375,000 บาท เจ้าของหอพักต้องคิดค่าเช่าห้องละ 5,000 บาท หรือ 15,000 บาท

- 3) จาก $f(x) = -200x^2 + 12,000x + 320,000$

เขียนให้อยู่ในรูป $a(x - h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}f(x) &= -200(x^2 - 60x + 900) + 500,000 \\ &= -200(x - 30)^2 + 500,000\end{aligned}$$

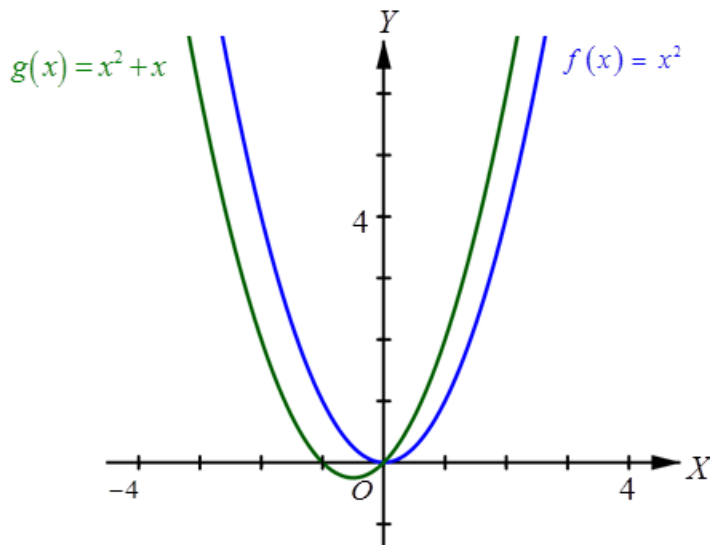
จะได้ $a = -200$, $h = 30$ และ $k = 500,000$

ดังนั้น กราฟของฟังก์ชัน f มีจุดยอดที่จุด $(30, 500,000)$

จะได้ว่า เจ้าของหอพักต้องตั้งราคาห้องละ $4,000 + 200(30) = 10,000$ บาท

จึงทำให้มีรายได้มากที่สุด 500,000 บาท

5. ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อความยาวของด้านเป็น x เซนติเมตร และ $g(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เมื่อความยาวของด้านกว้างเป็น x เซนติเมตร และด้านยาวยาวกว่าด้านกว้าง 1 เซนติเมตร
จะได้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x(x+1) = x^2 + x$



- 1) เนื่องจากด้านยาวยาว 3.5 เซนติเมตร จะได้ ด้านกว้างยาว 2.5 เซนติเมตร
จะได้ว่า รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านกว้างยาว 2.5 เซนติเมตร มีพื้นที่
 $(2.5)^2 + 2.5 = 8.75$ ตารางเซนติเมตร
ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านยาวยาว 3.5 เซนติเมตร จะมีพื้นที่ 8.75 ตารางเซนติเมตร
- 2) จากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ 6.25 ตารางเซนติเมตร
นั่นคือ จะได้ $x = 2.5$
ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ 6.25 ตารางเซนติเมตร จะมีความยาวด้านเป็น
2.5 เซนติเมตร
- 3) ถ้าพื้นที่ของรูปทั้งสองต่างกัน 3 ตารางเซนติเมตร
จะได้ $(x^2 + x) - x^2 = 3$ นั่นคือ $x = 3$
ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีพื้นที่ 12 ตารางเซนติเมตร และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มี
พื้นที่ 9 ตารางเซนติเมตร

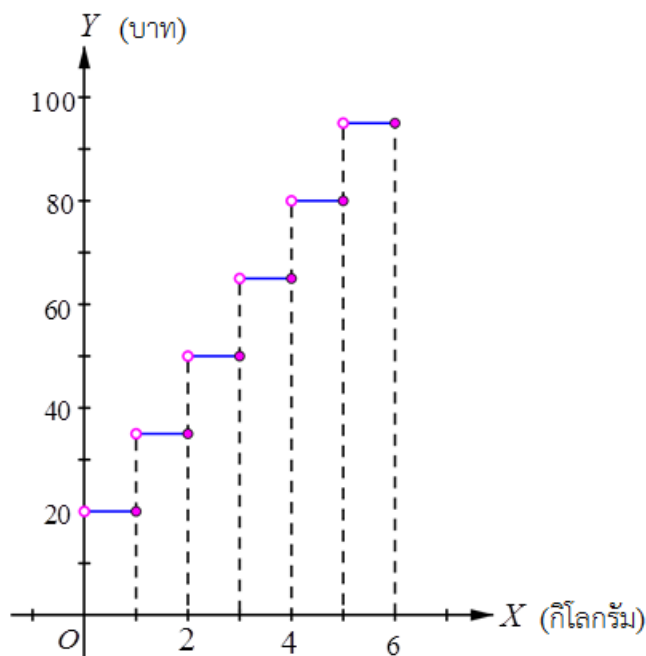
- 4) ถ้าความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น x เซนติเมตร แล้วผลต่างของพื้นที่ทั้งสองรูปเป็น $(x^2 + x) - x^2 = x$ ตารางเซนติเมตร
- ให้ $h(x)$ แทนความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและผลต่างของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมทั้งสอง จะได้ว่า $h(x) = x$

แบบฝึกหัด 2.4

1. ให้ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการในการส่งพัสดุของบริษัทแห่งหนึ่งมีหน่วยเป็นบาท เมื่อ x แทนน้ำหนักของพัสดุมีหน่วยเป็นกิโลกรัม จะเขียนฟังก์ชันของ $f(x)$ ได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 20.00 & ; 0 < x \leq 1 \\ 35.00 & ; 1 < x \leq 2 \\ 50.00 & ; 2 < x \leq 3 \\ 65.00 & ; 3 < x \leq 4 \\ 80.00 & ; 4 < x \leq 5 \\ 95.00 & ; 5 < x \leq 6 \end{cases}$$

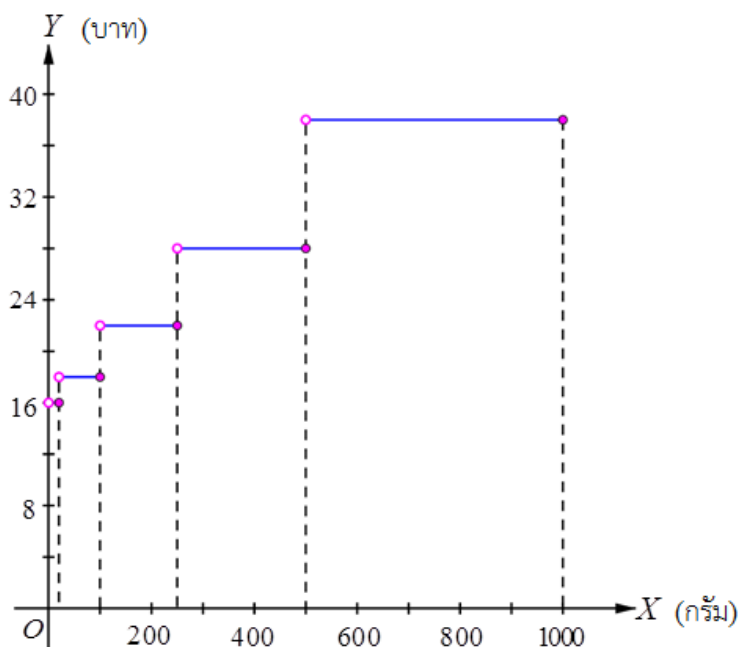
เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ได้ดังนี้



2. ให้ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการในการส่งจดหมาย (ไปรษณีย์ลงทะเบียน) ของบริษัทแห่งหนึ่งมีหน่วยเป็นบาท เมื่อ x แทนน้ำหนักของจดหมายมีหน่วยเป็นกรัม จะเขียนฟังก์ชันของ $f(x)$ ได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 16.00 & ; 0 < x \leq 20 \\ 18.00 & ; 20 < x \leq 100 \\ 22.00 & ; 100 < x \leq 250 \\ 28.00 & ; 250 < x \leq 500 \\ 38.00 & ; 500 < x \leq 1,000 \end{cases}$$

เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ได้ดังนี้

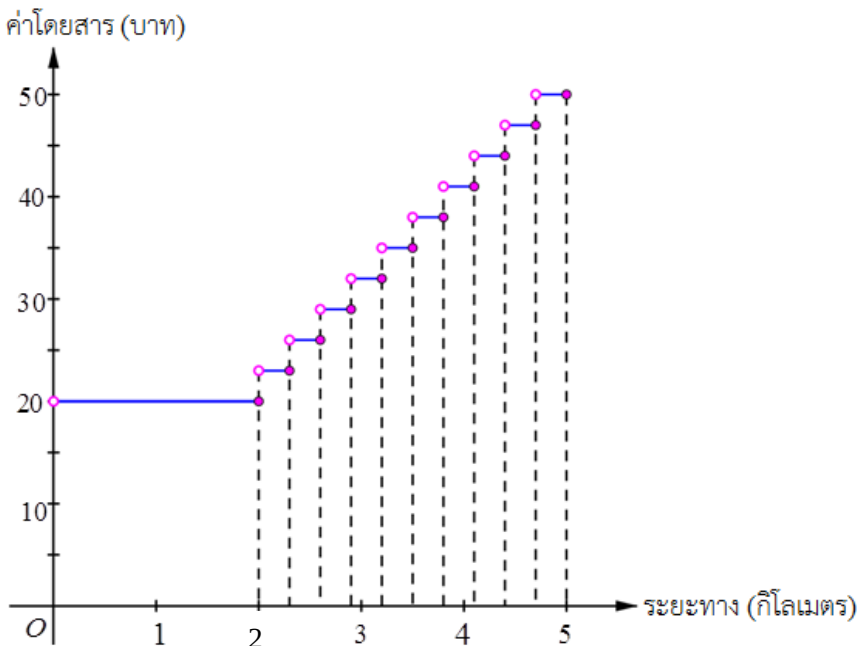


- 1) ถ้าต้องการส่งจดหมายหนัก 700 กรัม ต้องเสียค่าบริการ 38.00 บาท
- 2) ถ้าส่งจดหมายหนึ่งฉบับเสียค่าบริการ 22 บาท จดหมายฉบับนี้จะหนักเกิน 100 กรัม แต่ไม่เกิน 250 กรัม
- 3) จดหมายหนัก 500 กรัม จะเสียค่าบริการ 28.00 บาท และจดหมาย 230 กรัม จะเสียค่าบริการ 22.00 บาท
นั่นคือ ทุกเดือนต้องเสียค่าบริการ $28.00 + 22.00 = 50.00$ บาท
ดังนั้น เมื่อครบ 1 ปี จะเสียค่าบริการทั้งหมด 600.00 บาท

3. ให้ $f(x)$ แทนค่าโดยสารของรถโดยสารประเภทหนึ่งมีหน่วยเป็นบาท
เมื่อ x แทนระยะทางหน่วยเป็นกิโลเมตร จะเขียนฟังก์ชันของ $f(x)$ ได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 20 & ; 0 < x \leq 2 \\ 23 & ; 2 < x \leq 2.3 \\ 26 & ; 2.3 < x \leq 2.6 \\ 29 & ; 2.6 < x \leq 2.9 \\ 32 & ; 2.9 < x \leq 3.2 \\ 35 & ; 3.2 < x \leq 3.5 \\ 38 & ; 3.5 < x \leq 3.8 \\ 41 & ; 3.8 < x \leq 4.1 \\ 44 & ; 4.1 < x \leq 4.4 \\ 47 & ; 4.4 < x \leq 4.7 \\ 50 & ; 4.7 < x \leq 5.0 \end{cases}$$

เขียนกราฟของฟังก์ชัน f ได้ดังนี้



- 1) ถ้าเดินทางด้วยรถโดยสารตั้งแต่ต้นสายจนสุดสาย จะต้องเสียค่าโดยสาร 50 บาท
- 2) ถ้าเดินทางไป 3.82 กิโลเมตร จะต้องเสียค่าโดยสาร 41 บาท

- 3) ถ้าจ่ายค่าโดยสารไป 38 บาท แล้วระยะทางที่เป็นไปได้ในการเดินทางครั้งนี้เกิน 3.5 กิโลเมตร แต่ไม่เกิน 3.8 กิโลเมตร
- 4) ถ้ามัดหมี่เดินทางจากบ้านไปโรงเรียนเป็นระยะทาง 4.5 กิโลเมตร จะต้องเสียค่าโดยสาร 47 บาท
- แต่ถ้าเดินทางจากบ้านไปร้านค้าเพื่อซื้ออุปกรณ์กีฬาเป็นระยะทาง 2.6 กิโลเมตร จะเสียค่าโดยสาร 26 บาท และเดินทางต่อจากร้านค้าไปโรงเรียนเป็นระยะทาง 1.9 กิโลเมตร จะเสียค่าโดยสาร 20 บาท จะได้ว่า เสียค่าโดยสารทั้งหมด 46 บาท ดังนั้น มัดหมี่จะเสียค่าโดยสารน้อยกว่าปกติ อยู่ 1 บาท
4. 1) ให้ $f(t)$ แทนอัตราค่าโทรออกของซิมคุยกัมมีหน่วยเป็นบาท เมื่อ t แทนเวลาโทรออกหน่วยเป็นนาที

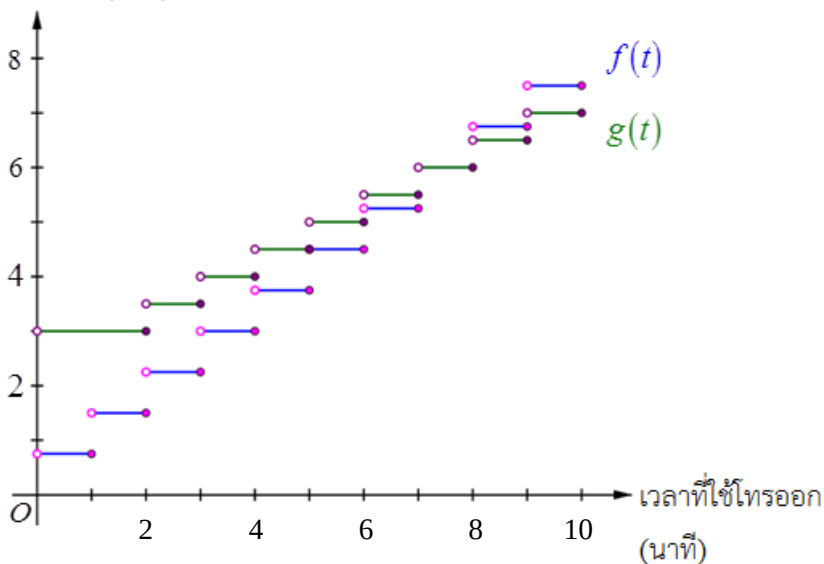
$$\text{จะได้ } f(t) = \begin{cases} 0.75 & ; 0 < t \leq 1 \\ 1.50 & ; 1 < t \leq 2 \\ 2.25 & ; 2 < t \leq 3 \\ 3.00 & ; 3 < t \leq 4 \\ 3.75 & ; 4 < t \leq 5 \\ 4.50 & ; 5 < t \leq 6 \\ 5.25 & ; 6 < t \leq 7 \\ 6.00 & ; 7 < t \leq 8 \\ 6.75 & ; 8 < t \leq 9 \\ 7.50 & ; 9 < t \leq 10 \\ \vdots & \end{cases}$$

ให้ $g(t)$ แทนอัตราค่าโทรออกของซิมคุยสนุกมีหน่วยเป็นบาท เมื่อ t แทนเวลาโทรออกหน่วยเป็นนาที

$$\text{จะได้ } g(t) = \begin{cases} 3 & ; 0 < t \leq 2 \\ 3.5 & ; 2 < t \leq 3 \\ 4 & ; 3 < t \leq 4 \\ 4.5 & ; 4 < t \leq 5 \\ 5 & ; 5 < t \leq 6 \\ 5.5 & ; 6 < t \leq 7 \\ 6 & ; 7 < t \leq 8 \\ 6.5 & ; 8 < t \leq 9 \\ 7 & ; 9 < t \leq 10 \\ \vdots & \end{cases}$$

เขียนกราฟของ f และ g ได้ดังนี้

อัตราค่าโทร (บาท)



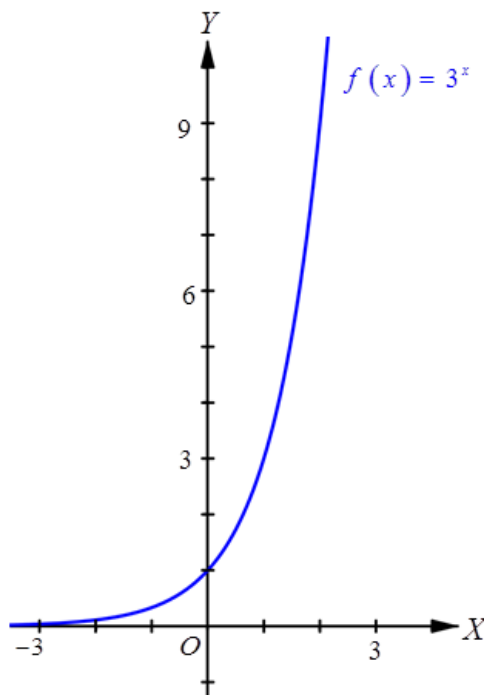
- 2) จากกราฟ สำหรับผู้ใช้โทรศัพท์สำหรับโทรออกไม่เกิน 5 นาที ควรจะใช้ซิมคุยคุ้ม
จึงจะประหยัดกว่า
- 3) ค่าโทรออกของทั้งสองซิมจะเท่ากัน เมื่อโทรออกเป็นระยะเวลาเกิน 7 นาที แต่ไม่เกิน
8 นาที
- 4) ซิมคุยคุ้มจะประหยัดกว่า เมื่อใช้โทรออกไม่เกิน 7 นาที และซิมคุยสนุกจะประหยัดกว่า
เมื่อใช้เวลาโทรออกมากกว่า 8 นาที

แบบฝึกหัด 2.5

1. 1) แทน x ใน $f(x) = 3^x$ ด้วย $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ และ 3 จะได้

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$(x, f(x))$	$\left(-3, \frac{1}{27}\right)$	$\left(-2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(2, 9)$	$(3, 27)$

เขียนคู่อันดับในตาราง และเมื่อให้ x เป็นจำนวนจริง จะเขียนกราฟได้ดังนี้



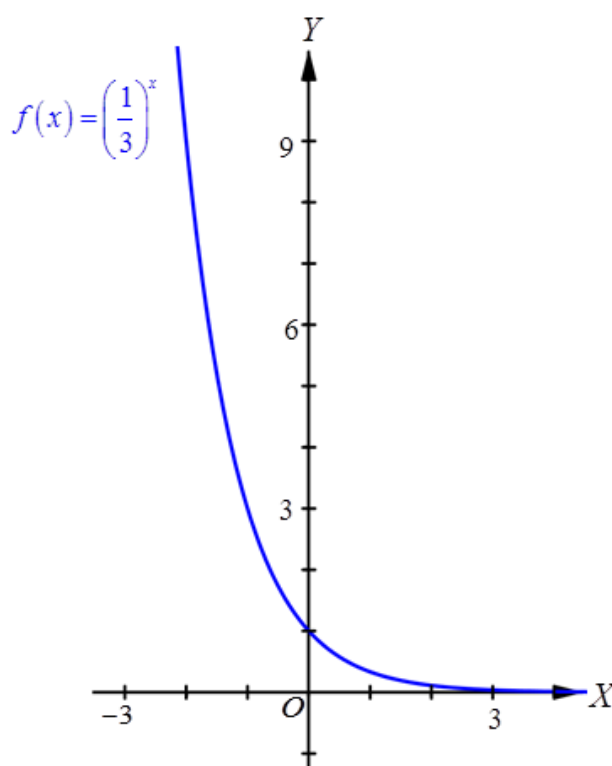
โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริงบวก

2) แทน x ใน $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ด้วย $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ และ 3 จะได้

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
$(x, f(x))$	$(-3, 27)$	$(-2, 9)$	$(-1, 3)$	$(0, 1)$	$\left(1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(2, \frac{1}{9}\right)$	$\left(3, \frac{1}{27}\right)$

เขียนคู่อันดับในตาราง และเมื่อให้ x เป็นจำนวนจริง จะเขียนกราฟได้ดังนี้



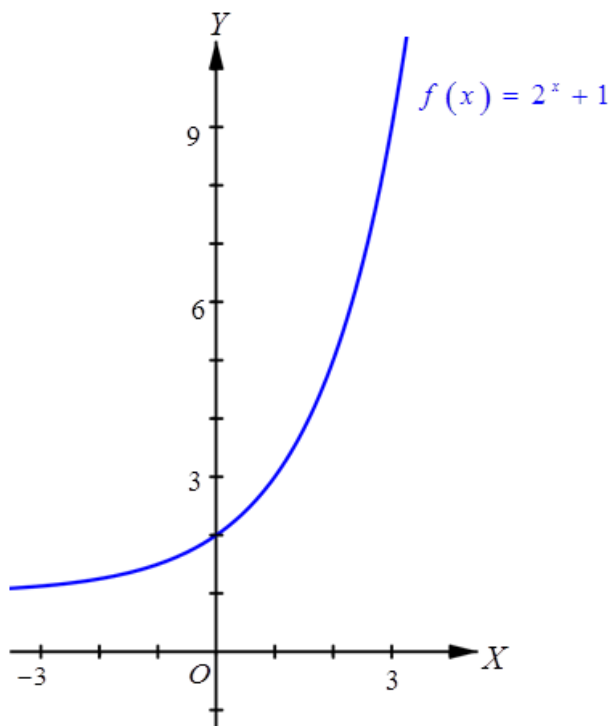
โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริงบวก

3) แทน x ใน $f(x) = 2^x + 1$ ด้วย $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ และ 3 จะได้

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	5	9
$(x, f(x))$	$\left(-3, \frac{9}{8}\right)$	$\left(-2, \frac{5}{4}\right)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$(0, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 5)$	$(3, 9)$

เขียนคู่อันดับในตาราง และเมื่อให้ x เป็นจำนวนจริง จะเขียนกราฟได้ดังนี้



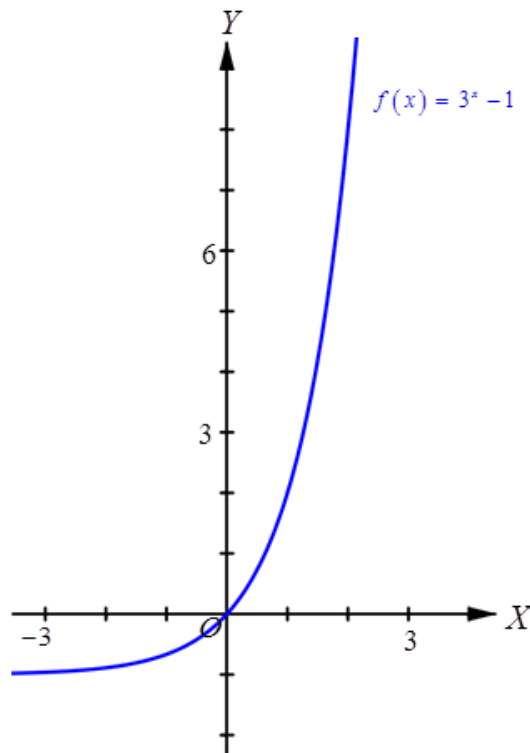
โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริงที่มากกว่า 1

4) แทน x ใน $f(x) = 3^x - 1$ ด้วย $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ และ 3 จะได้

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{26}{27}$	$-\frac{8}{9}$	$-\frac{2}{3}$	0	2	8	26
$(x, f(x))$	$\left(-3, -\frac{26}{27}\right)$	$\left(-2, -\frac{8}{9}\right)$	$\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$	$(0, 0)$	$(1, 2)$	$(2, 8)$	$(3, 26)$

เขียนคู่อันดับในตาราง และเมื่อให้ x เป็นจำนวนจริง จะเขียนกราฟได้ดังนี้



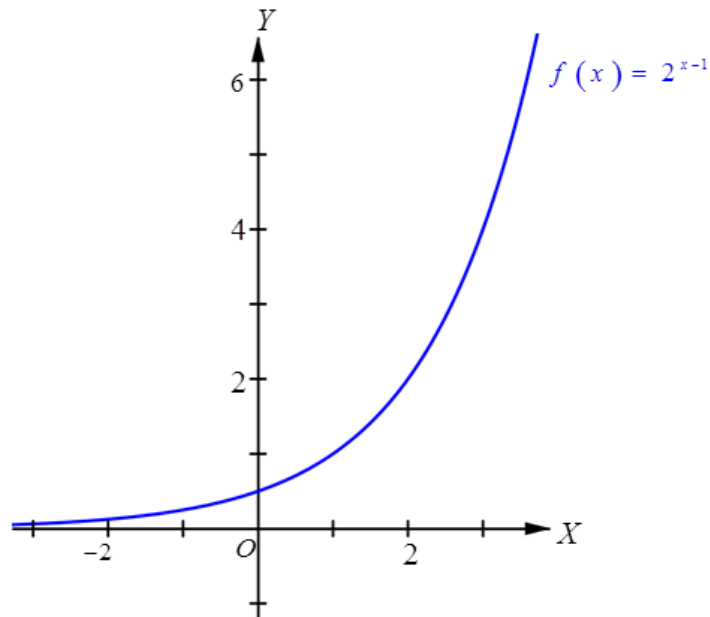
โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริงที่มากกว่า -1

5) แทน x ใน $f(x) = 2^{x-1}$ ด้วย $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ และ 3 จะได้

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$(x, f(x))$	$(-3, \frac{1}{16})$	$(-2, \frac{1}{8})$	$(-1, \frac{1}{4})$	$(0, \frac{1}{2})$	$(1, 1)$	$(2, 2)$	$(3, 4)$

เขียนคู่อันดับในตาราง และเมื่อให้ x เป็นจำนวนจริง จะเขียนกราฟได้ดังนี้



โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริงบวก

2. ให้ $x=10$

จะได้ $f(10) = 4,000(1.03)^{10} \approx 5,375.67$

นั่นคือ ใน 10 ปีข้างหน้า เมืองนี้จะมีประชากรประมาณ 5,375 คน

ให้ $x=20$

จะได้ $f(20) = 4,000(1.03)^{20} \approx 7,224.44$

นั่นคือ ใน 20 ปีข้างหน้า เมืองนี้จะมีประชากรประมาณ 7,224 คน

3. 1) เมื่อครบ 3 ปี ชายคนนี้จะต้องชำระเงินคืนให้ธนาคารทั้งหมด

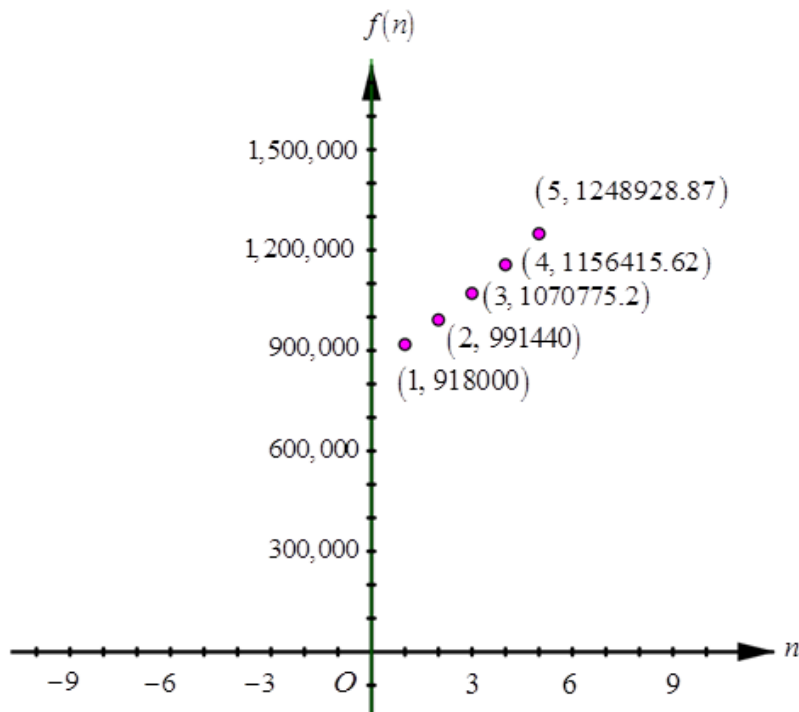
$$\begin{aligned} f(3) &= 850,000(1.08)^3 \\ &= 1,070,755.2 \text{ บาท} \end{aligned}$$

โดยคิดเป็นดอกเบี้ย $1,070,755.2 - 850,000 = 220,755.2$ บาท

- 2) แทน n ใน $f(n) = 850,000(1.08)^n$ ด้วย 1, 2, 3, 4 และ 5 จะได้ คู่อันดับดังตาราง

n	$f(n)$
1	918,000
2	991,440
3	1,070,755.2
4	1,156,415.62
5	1,248,928.87

จากตาราง เขียนกราฟได้ดังนี้



แบบฝึกหัดท้ายบท

1.
 - 1) เป็นฟังก์ชัน
 - 2) เป็นฟังก์ชัน
 - 3) ไม่เป็นฟังก์ชัน
 - 4) ไม่เป็นฟังก์ชัน
2.
 - 1) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่ลำดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่ตัวหลังต่างกัน คือ $(4, d)$ และ $(4, e)$
 - 2) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่ลำดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่ตัวหลังต่างกัน เช่น $(3, 0)$ และ $(3, 1)$
 - 3) เป็นฟังก์ชัน
3. จาก $f(x) = x^2 + 3x - 5$
 จะได้ $f(0) = (0)^2 + 3(0) - 5 = -5$
 $f(-1) = (-1)^2 + 3(-1) - 5 = -7$
 $f(3) = (3)^2 + 3(3) - 5 = 13$
 $f(a) = a^2 + 3a - 5$
4.
 - 1) พิจารณา $f(x) = -3x - 4$
 จะเห็นว่า ไม่ว่าแทน x ด้วยจำนวนจริงใดก็จะสามารถหา $f(x)$ ได้เสมอ
 ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริง หรือ $D_f = \mathbb{R}$
 หาเรนจ์ของฟังก์ชัน f โดยให้ $y = -3x - 4$
 จะได้ว่า $x = -\frac{y+4}{3}$ ซึ่งเห็นว่า ไม่ว่าแทน y เป็นจำนวนจริงใดก็จะสามารถหา x ที่คู่กับ y ได้เสมอ
 ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริง หรือ $R_f = \mathbb{R}$

- 2) เนื่องจากในระบบจำนวนจริง จำนวนในเครื่องหมายกรณฑ์ที่สองต้องไม่เป็นจำนวนจริงลบ

ดังนั้น $x - 2 \geq 0$ นั่นคือ $x \geq 2$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2

ให้ $y = \sqrt{x - 2}$

เนื่องจาก $\sqrt{x - 2} \geq 0$ จะได้ $y \geq 0$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0

- 3) พิจารณา $f(x) = \frac{x^2}{2}$ จะเห็นว่า ไม่ว่าแทน x ด้วยจำนวนจริงใดก็จะสามารถหา

$f(x)$ ได้เสมอ

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริง

และพิจารณา $y = \frac{x^2}{2}$

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ จะได้ $y \geq 0$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0

- 4) พิจารณา $f(x) = 2x^2$ จะเห็นว่า ไม่ว่าแทน x ด้วยจำนวนจริงใดก็จะสามารถหา

$f(x)$ ได้เสมอ

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริง

และพิจารณา $y = 2x^2$

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ จะได้ $y \geq 0$

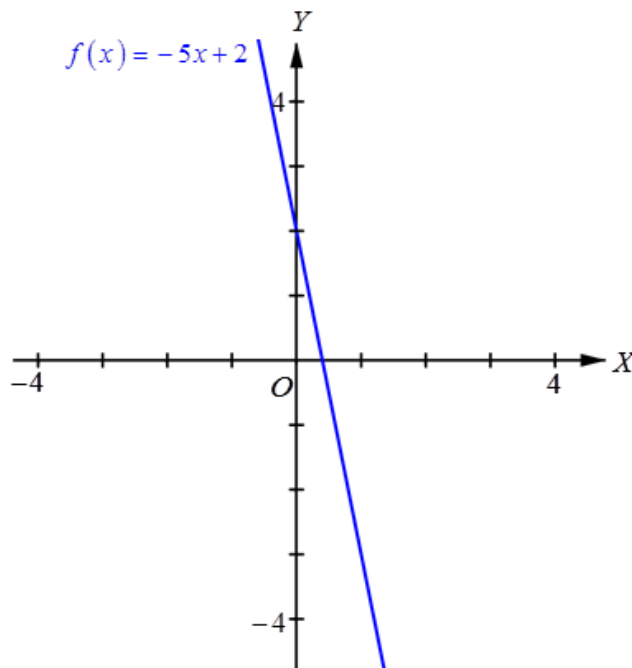
ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0

5. 1) ให้ $f(x) = -5x + 2$

เมื่อแทน x ด้วย 0 จะได้ $f(0) = 2$ นั่นคือ จุดที่กราฟของ f ตัดแกน Y คือจุด $(0, 2)$

ถ้า $f(x) = 0$ จะได้ $x = \frac{2}{5}$ นั่นคือ จุดที่กราฟของ f ตัดแกน X คือจุด $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$

เขียนกราฟของ $f(x) = -5x + 2$ ได้ดังนี้



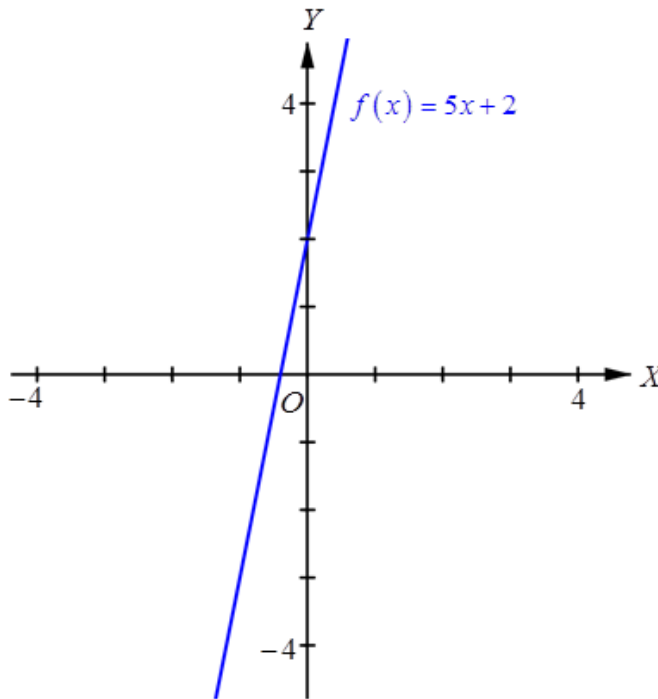
จากกราฟ จะได้ว่า โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริง
และ เรนจ์ของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริง

2) ให้ $f(x) = 5x + 2$

เมื่อแทน x ด้วย 0 จะได้ $f(0) = 2$ นั่นคือ จุดที่กราฟของ f ตัดแกน Y คือจุด $(0, 2)$

ถ้า $f(x) = 0$ จะได้ $x = -\frac{2}{5}$ นั่นคือ จุดที่กราฟของ f ตัดแกน X คือจุด $(-\frac{2}{5}, 0)$

เขียนกราฟของ $f(x) = 5x + 2$ ได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่า โดเมนของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริง
และ เรนจ์ของฟังก์ชัน f คือ เซตของจำนวนจริง

3) ให้ $f(x) = -x^2 - 6x - 10$

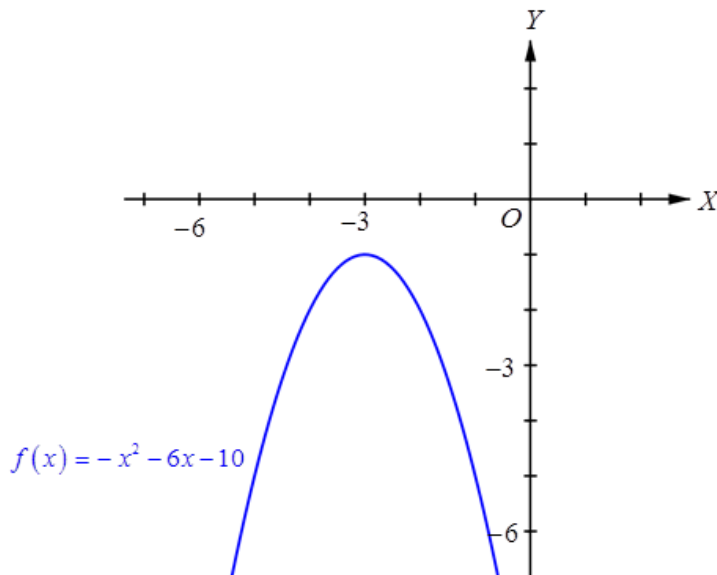
เขียนให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 + 6x + 9) - 1 \\ &= -(x+3)^2 - 1 \end{aligned}$$

จะได้ $a = -1$, $h = -3$ และ $k = -1$

เนื่องจาก $a < 0$ ดังนั้น กราฟของฟังก์ชัน f จะคว่ำลงและมีจุดยอดที่จุด $(-3, -1)$

เขียนกราฟของ $f(x) = -x^2 - 6x - 10$ ได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่า โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง
และเรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $\{y \mid y \leq -1\}$

4) ให้ $f(x) = x^2 - 6x - 10$

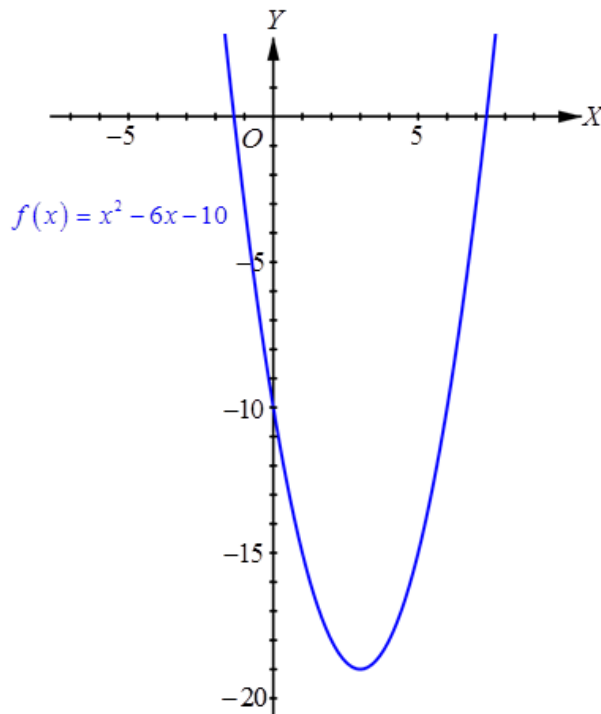
เขียนให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 6x + 9) - 19 \\ &= (x-3)^2 - 19 \end{aligned}$$

จะได้ $a=1$, $h=3$ และ $k=-19$

เนื่องจาก $a > 0$ ดังนั้น กราฟของฟังก์ชัน f จะหงายขึ้นและมีจุดยอดที่จุด $(3, -19)$

เขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 6x - 10$ ได้ดังนี้



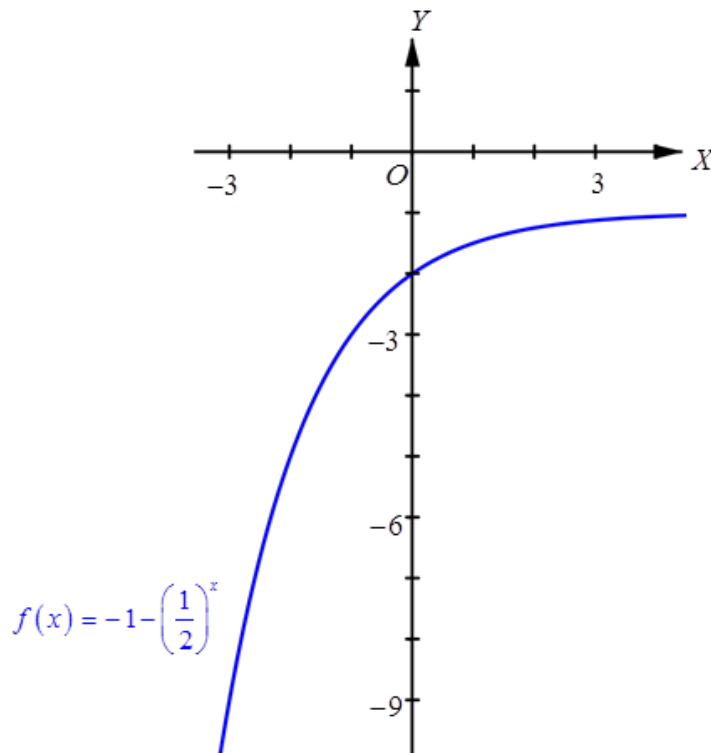
จากกราฟ จะได้ว่า โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง

และเรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $\{y \mid y \geq -19\}$

5) แทน x ใน $f(x) = -1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ด้วย $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ และ 3 จะได้คู่อันดับดังตาราง

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-9	-5	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{9}{8}$
$(x, f(x))$	$(-3, -9)$	$(-2, -5)$	$(-1, -3)$	$(0, -2)$	$\left(1, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(2, -\frac{5}{4}\right)$	$\left(3, -\frac{9}{8}\right)$

เขียนกราฟของ $f(x) = -1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ได้ดังนี้

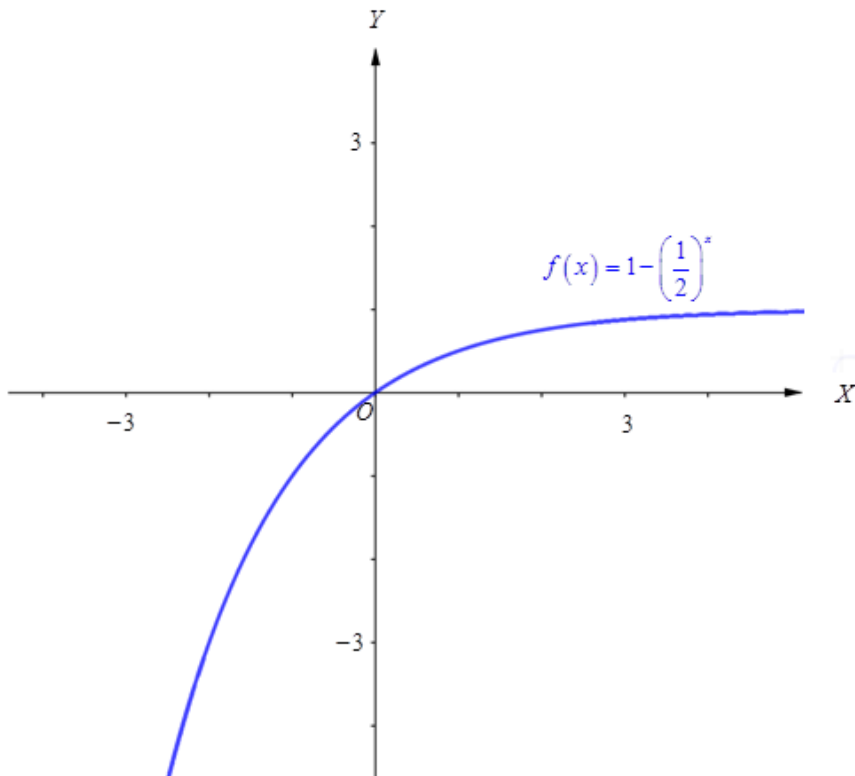


จากกราฟ จะได้ว่า โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง
และเรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $\{y \mid y < -1\}$

6) แทน x ใน $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ด้วย $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ และ 3 จะได้คู่อันดับดังตาราง

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-7	-3	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
$(x, f(x))$	$(-3, -7)$	$(-2, -3)$	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(2, \frac{3}{4}\right)$	$\left(3, \frac{7}{8}\right)$

เขียนกราฟของ $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ว่า โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริง
และเรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $\{y \mid y < 1\}$

6.
 - 1) (ง)
 - 2) (ฉ)
 - 3) (ก)
 - 4) (จ)
 - 5) (ข)
 - 6) (ค)
7. จากกราฟ จะได้ว่า ศจิจัรบรถโดยเพิ่มอัตราเร็วจาก 0 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถึง 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เป็นเวลา 1 ชั่วโมง แล้วจึงจัรบรถด้วยอัตราเร็วคงที่ 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เป็นเวลา 3 ชั่วโมง จากนั้นจึงลดอัตราเร็วจนรถหยุดในเวลา 4 ชั่วโมง

8. 1) ให้ $f(x) = ax + b$ แทนฟังก์ชันแสดงราคาของคอมพิวเตอร์เมื่อเวลาผ่านไป x ปี โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัว

จากโจทย์ $f(0) = 50,000$ จะได้ $b = 50,000$

และ $f(5) = 5,000$ จะได้

$$5,000 = 5a + 50,000$$

$$a = -9,000$$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงราคาของคอมพิวเตอร์เมื่อเวลาผ่านไป x ปี คือ $f(x) = -9,000x + 50,000$

- 2) ให้ d แทนค่าเสื่อมราคาต่อปี จะได้

$$d = \frac{50,000 - (-9,000x + 50,000)}{x}$$

$$= \frac{50,000 + 9,000x - 50,000}{x}$$

$$= 9,000$$

ดังนั้น ค่าเสื่อมราคาต่อปีของคอมพิวเตอร์ของบริษัทแห่งนี้ เท่ากับ 9,000 บาท

- 3) หาราคาทุนของอุปกรณ์สำนักงานนี้ จากการแทน x ด้วย 0 ใน $g(x)$ จะได้

$$g(0) = 19,200 - 3,200(0)$$

$$= 19,200$$

ดังนั้น ราคาทุนของอุปกรณ์สำนักงานนี้ เท่ากับ 19,200 บาท

ถ้าให้ d แทนค่าเสื่อมราคาต่อปี

$$\text{จะได้ } d = \frac{19,200 - (19,200 - 3,200x)}{x}$$

$$= \frac{19,200 - 19,200 + 3,200x}{x}$$

$$= 3,200$$

ดังนั้น ค่าเสื่อมราคาต่อปีของอุปกรณ์สำนักงานนี้ เท่ากับ 3,200 บาท

9. จากขณะที่นักดำน้ำอยู่ที่ความลึก 40 ฟุต เมื่อความดันน้ำทะเลเพิ่มขึ้น 0.45 psi ทุก ๆ ความลึกหนึ่งฟุต และความดันที่ผิวน้ำทะเลประมาณ 14.7 psi

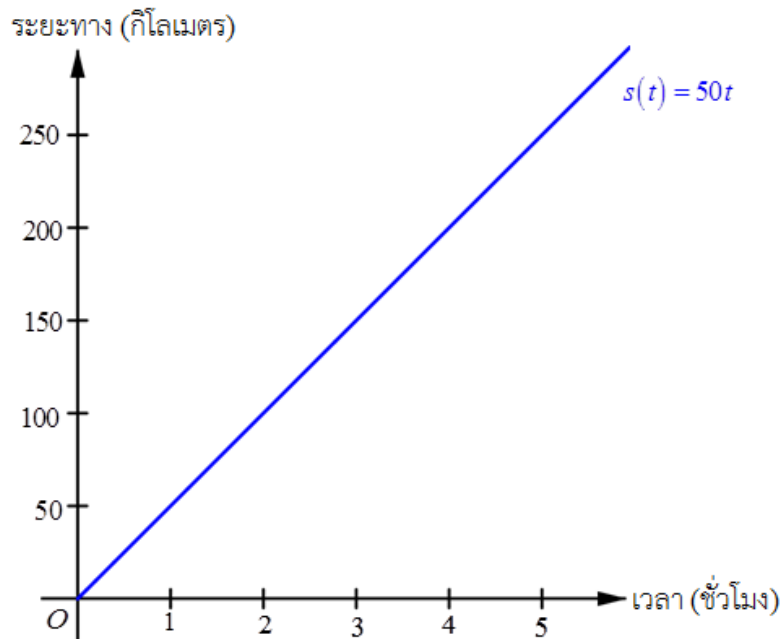
จะได้ว่า $a = 0.45$, $x = 40$ และ $b = 14.7$

นั่นคือ $f(x) = 0.45(40) + 14.7$

$$= 32.7 \text{ psi}$$

ดังนั้น ความดันน้ำทะเลที่ความลึก 40 ฟุต เป็น 32.7 psi

10. 1) ให้ $f(x) = mx + b$ เป็นฟังก์ชันรายได้ของพนักงานบริษัทแห่งนี้ เมื่อได้ค่าเบี้ยเลี้ยง และค่าพาหนะ b บาท และได้ค่านายหน้าร้อยละ m ของยอดขาย
จากโจทย์ กนกและอานันท์ มียอดขาย 200,000 บาท และ 150,000 บาท ตามลำดับ
จากค่านายหน้าร้อยละ m
จะได้ว่า มียอดขาย 100 บาท จะได้ค่านายหน้า m บาท
ถ้ากนกมียอดขาย 200,000 บาท จะได้ค่านายหน้า $\frac{m \cdot 200,000}{100} = 2,000m$ บาท
และอานันท์มียอดขาย 150,000 บาท จะได้ค่านายหน้า $\frac{m \cdot 150,000}{100} = 1,500m$ บาท
จากโจทย์ กนกและอานันท์ ได้รับเงินจากบริษัท 34,000 บาท และ 28,000 บาท ตามลำดับ
จะได้ว่า $34,000 = 2,000m + b$ ----- (1)
 $28,000 = 1,500m + b$ ----- (2)
จาก (1) และ (2) จะได้
 $6,000 = 500m$
 $m = 12$
ดังนั้น บริษัทจ่ายค่านายหน้าให้กับพนักงานร้อยละ 12
2) จาก $34,000 = 2,000m + b$ และ $m = 12$
จะได้ $34,000 = 2,000(12) + b$
 $b = 10,000$
ดังนั้น บริษัทจ่ายค่าเบี้ยเลี้ยงและค่าพาหนะให้กับกนกและอานันท์เป็นเงินคนละ 10,000 บาท
3) ฟังก์ชันแสดงรายได้ที่พนักงานได้รับแต่ละเดือน คือ $f(x) = \frac{12}{100}x + 10,000$
เมื่อ x คือ ยอดขายที่พนักงานแต่ละคนขายได้
11. 1) ให้ $s(t)$ เป็นระยะทางที่รถไฟแล่นได้ใน t ชั่วโมง
เนื่องจากรถไฟสายเหนือแล่นด้วยอัตราเร็วเฉลี่ย 50 กิโลเมตรต่อชั่วโมง
จะได้ $s(t) = 50t$ เมื่อ $t \geq 0$
และเขียนกราฟของ $s(t)$ ได้ดังนี้



- 2) ในที่นี้ $t=5$ จะได้

$$\begin{aligned}s(5) &= 50(5) \\ &= 250\end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางจากสถานีรถไฟหัวลำโพงถึงสถานีนครสวรรค์ เท่ากับ 250 กิโลเมตร

12. 1) ให้ y เป็นจำนวนชิ้นของขนมที่ขายได้ เมื่อ x เป็นราคาขนม ($x > 35$)

นั่นคือ ราคาขนมเพิ่มขึ้น $x-35$ บาท จะทำให้ขายขนมได้ลดลง $2(x-35)$ ชิ้น

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } y &= 100 - 2(x-35) \\ &= 100 - 2x + 70 \\ &= 170 - 2x\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชิ้นที่ขายได้กับราคาขนม คือ $y = 170 - 2x$

เมื่อ y เป็นจำนวนชิ้นของขนมที่ขายได้ และ x เป็นราคาขนม

- 2) ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินที่ขายได้ทั้งหมด เมื่อ x เป็นราคาขนม

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } f(x) &= (170 - 2x)x \\ &= 170x - 2x^2\end{aligned}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินที่ขายได้ทั้งหมด คือ $f(x) = 170x - 2x^2$

เมื่อ x เป็นราคาขนม

3) ให้ $f(x) = 3,000$ จะได้

$$\begin{aligned} 3,000 &= 170x - 2x^2 \\ 2x^2 - 170x + 3,000 &= 0 \\ x^2 - 85x + 1,500 &= 0 \\ (x - 25)(x - 60) &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $x = 25$ หรือ $x = 60$

เนื่องจาก x เป็นราคาขาย ซึ่งมีค่ามากกว่า 35 บาท

จะได้ $x = 60$

ดังนั้น ถ้าพิภพต้องการให้มีรายได้จากการขายขนมวันละ 3,000 บาท เขาจะต้องขายขนมราคาชิ้นละ 60 บาท

4) จาก $f(x) = 170x - 2x^2$

เขียนให้อยู่ในรูป $a(x - h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \left(x^2 - 85x + \left(\frac{85}{2} \right)^2 \right) + \frac{7,225}{2} \\ &= -2 \left(x - \frac{85}{2} \right)^2 + \frac{7,225}{2} \end{aligned}$$

จะได้ $a = -2$, $h = \frac{85}{2}$ และ $k = \frac{7,225}{2}$

เนื่องจาก $a < 0$ นั่นคือ กราฟของฟังก์ชัน f จะคว่ำลงและมีจุดยอดที่จุด

$$\left(\frac{85}{2}, \frac{7,225}{2} \right) \text{ หรือ } (42.5, 3,612.5)$$

แต่เนื่องจากพ่อค้าคนนี้เพิ่มราคาขายชิ้นละ 1 บาท จึงพิจารณาค่า x ที่ 42 และ 43

ถ้า $x = 42$ จะได้ว่า $f(42) = 3,612$

และถ้า $x = 43$ จะได้ว่า $f(43) = 3,612$

ดังนั้น ต้องขายขนมราคาชิ้นละ 42 หรือ 43 บาท จึงจะมีรายได้สูงสุด 3,612 บาท

13. 1) ให้ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

y แทนความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

และ $A(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจากรั้วทั้งหมดยาว 120 เมตร

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad 2x + y &= 120 \\ y &= 120 - 2x \end{aligned}$$

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้ คือ $xy = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2$

จะได้ $A(x) = 120x - 2x^2$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ได้จากการล้อมรั้ว คือ

$A(x) = 120x - 2x^2$ เมื่อ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

2) จาก $A(x) = 120x - 2x^2$

เขียนให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A(x) &= -2(x^2 - 60x + 900) + 1,800 \\ &= -2(x - 30)^2 + 1,800 \end{aligned}$$

จะได้ $a = -2$, $h = 30$ และ $k = 1,800$

เนื่องจาก $a < 0$ นั่นคือ กราฟของฟังก์ชัน A จะคว่ำลงและมีจุดยอดที่จุด $(30, 1800)$

ดังนั้น พื้นที่ที่มากที่สุดที่จะล้อมรั้วได้เป็น 1,800 ตารางเมตร

14. พื้นที่ 30 ไร่ เท่ากับ 48,000 ตารางเมตร

ให้ x แทนความกว้างของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

y แทนความยาวของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $xy = 48,000$ นั่นคือ $y = \frac{48,000}{x}$

ค่าใช้จ่ายในการล้อมรั้วคือ $2x(1,200) + 2y(1,000)$

$$= 2,400x + 2,000y$$

$$= 2,400x + 2,000\left(\frac{48,000}{x}\right)$$

$$= 2,400\left(x + \frac{40,000}{x}\right)$$

$$= 2,400\left[\left((\sqrt{x})^2 - 400 + \left(\frac{200}{\sqrt{x}}\right)^2\right) + 400\right]$$

$$= 2,400\left[\left((\sqrt{x})^2 - 2(\sqrt{x})\left(\frac{200}{\sqrt{x}}\right) + \left(\frac{200}{\sqrt{x}}\right)^2\right) + 400\right]$$

$$= 2,400\left[\left(\sqrt{x} - \frac{200}{\sqrt{x}}\right)^2 + 400\right]$$

$$\text{ให้ } f(x) = 2,400 \left(\left(\sqrt{x} - \frac{200}{\sqrt{x}} \right)^2 + 400 \right)$$

$$\text{จะได้ } f(x) \text{ มีค่าต่ำสุด เมื่อ } \sqrt{x} - \frac{200}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\text{นั่นคือ } x = 200 \text{ และ } y = 240$$

ดังนั้น จะต้องล้อมรั้วให้มีความกว้าง 200 เมตร และยาว 240 เมตร จึงจะเสีย

ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดและค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดเป็น 960,000 บาท

15. 1) ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์

เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จะได้ $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

จากจุดเยือกแข็งของน้ำบริสุทธิ์ คือ 0°C หรือ 32°F จะได้ $f(0) = 32$

แทน x ด้วย 0 ใน $f(x) = ax + b$ จะได้

$$f(0) = a(0) + b = b$$

เนื่องจาก $f(0) = 32$ จะได้ $b = 32$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = ax + 32$$

จากจุดเดือดของน้ำบริสุทธิ์ คือ 100°C หรือ 212°F จะได้ $f(100) = 212$

แทน x ด้วย 100 ใน $f(x) = ax + 32$ จะได้

$$\text{จะได้ } f(100) = a(100) + 32 = 100a + 32$$

$$\text{เนื่องจาก } f(100) = 212 \text{ จะได้ } 100a + 32 = 212 \text{ นั่นคือ } a = \frac{9}{5}$$

$$\text{จะได้ว่า } f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์ เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่

มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส คือ $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$

- 2) ให้ $g(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส

เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์

เนื่องจาก $g(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จะได้ $g(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

จากจุดเยือกแข็งของน้ำบริสุทธิ์ คือ 0°C หรือ 32°F จะได้ $g(32) = 0$

แทน x ด้วย 32 ใน $g(x) = ax + b$ จะได้

$$g(32) = 32a + b$$

เนื่องจาก $g(32) = 0$ จะได้ $0 = 32a + b$ นั่นคือ $b = -32a$

ดังนั้น $g(x) = ax - 32a = a(x - 32)$

จากจุดเดือดของน้ำบริสุทธิ์ คือ 100°C หรือ 212°F จะได้ $g(212) = 100$

แทน x ด้วย 212 ใน $g(x) = a(x - 32)$ จะได้

$$g(212) = a(212 - 32) = 180a$$

เนื่องจาก $g(212) = 100$ จะได้ $180a = 100$ นั่นคือ $a = \frac{5}{9}$

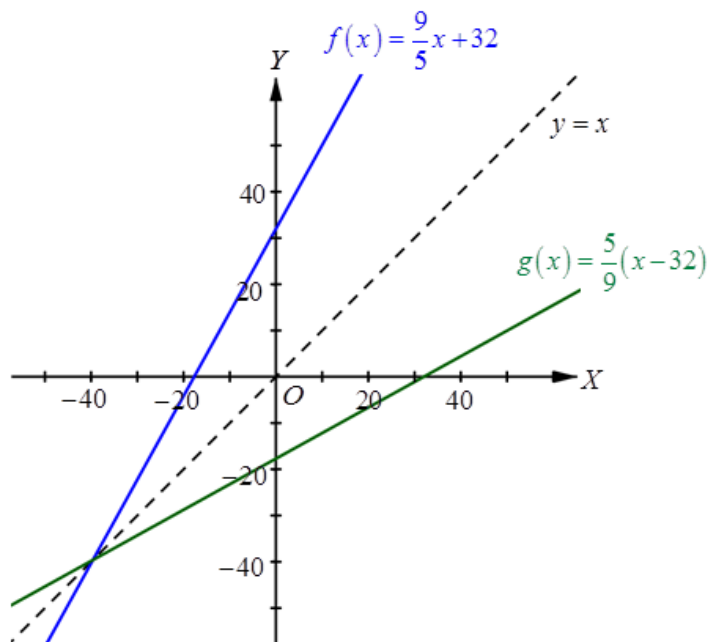
จะได้ว่า $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่

มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์ คือ $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$

3) จาก $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ และ $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$

เขียนกราฟได้ดังนี้



จะเห็นว่า กราฟของ f และ g เป็นภาพสะท้อนของกันและกัน โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นเส้นสะท้อน

- 4) ถ้าวัดอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์ได้ 117°F

นั่นคือ แทน x ด้วย 117 ใน $g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ จะได้

$$g(117) = \frac{5}{9}(117 - 32) \approx 47.22$$

ดังนั้น ถ้าอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์วัดได้ 117°F จะคิดเป็น 47.22°C โดยประมาณ

- 5) ถ้าวัดอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์ได้ 30°C

นั่นคือ แทน x ด้วย 30 ใน $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ จะได้

$$f(30) = \frac{9}{5}(30) + 32 = 86$$

ดังนั้น ถ้าอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์วัดได้ 30°C จะคิดเป็น 86°F

16. 1) ให้ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดออก (นิ้ว)

และ $V(x)$ แทนปริมาตรของกล่อง

จากกล่องที่พับมีความยาว $15 - 2x$ นิ้ว ความกว้าง $10 - 2x$ นิ้ว และสูง x นิ้ว

จะได้ $V(x) = (10 - 2x)(15 - 2x)x$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงความจุของกล่อง เมื่อ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ที่ถูกตัดออก คือ $V(x) = (10 - 2x)(15 - 2x)x$

- 2) เนื่องจาก กล่องกว้าง $10 - 2x$ นิ้ว และยาว $15 - 2x$ นิ้ว

จะได้ $10 - 2x > 0$ และ $15 - 2x > 0$

นั่นคือ $x < 5$ และ $x < \frac{15}{2}$

นั่นคือ $0 < x < 5$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน $V(x)$ คือ $\{x \mid 0 < x < 5\}$

3) เนื่องจาก โดเมนของ $V(x)$ คือ $\{x \mid 0 < x < 5\}$ และ x เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\text{จะได้ } V(1) = (10 - 2(1))(15 - 2(1))(1) = 104$$

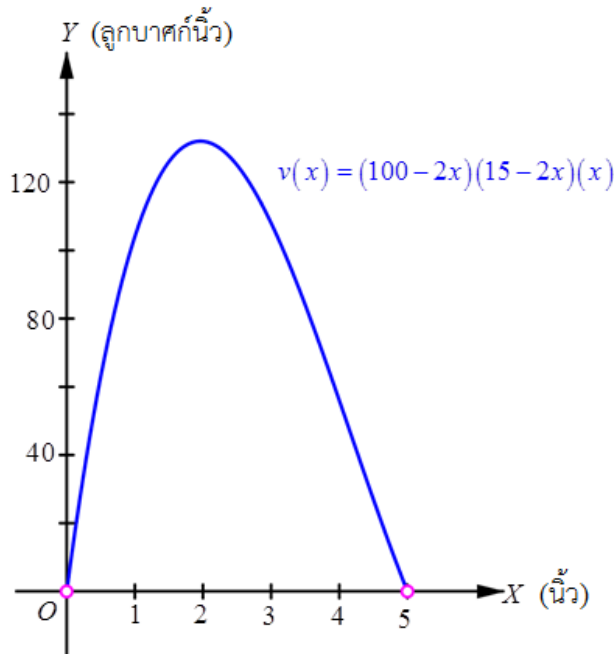
$$V(2) = (10 - 2(2))(15 - 2(2))(2) = 132$$

$$V(3) = (10 - 2(3))(15 - 2(3))(3) = 108$$

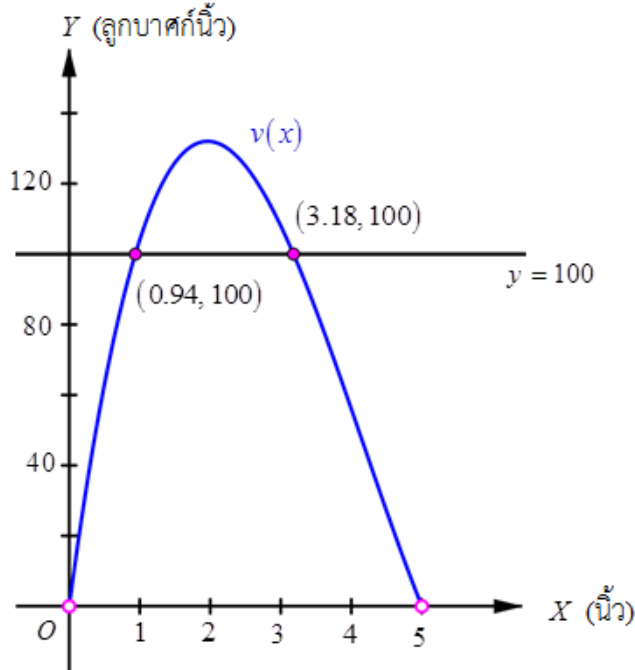
$$V(4) = (10 - 2(4))(15 - 2(4))(4) = 56$$

ดังนั้น กล่องจะมีความจุมากที่สุด เมื่อ x เป็น 2 และมีความจุ 132 ลูกบาศก์นิ้ว

4) เขียนกราฟของฟังก์ชัน $V(x)$ ได้ดังนี้



- 5) ในการหาค่า x ที่ทำให้กล่องมีปริมาตรเท่ากับ 100 ลูกบาศก์นิ้ว สามารถทำได้โดยเขียนเส้นตรง $y=100$ ลงในกราฟข้อ 4) จะได้จุดตัด ดังรูป

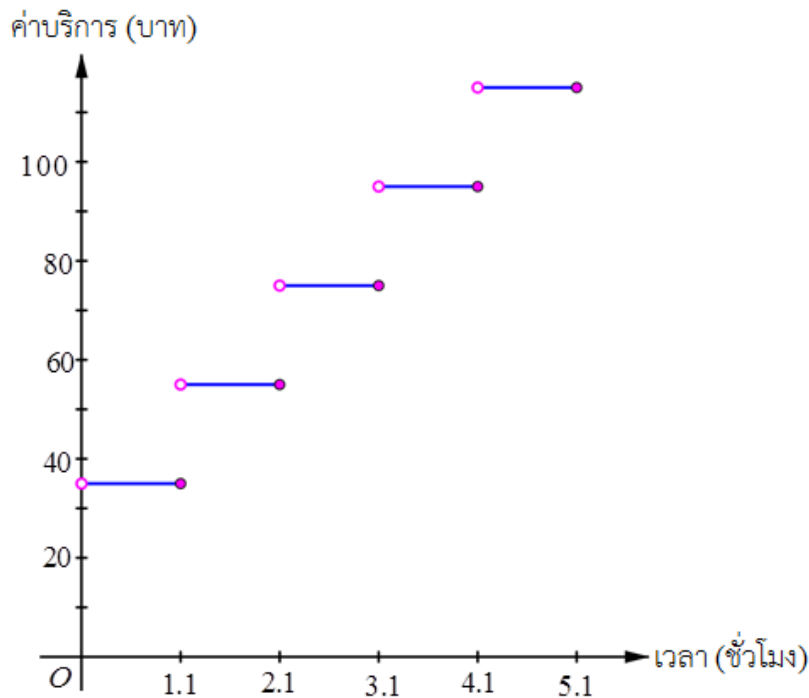


ดังนั้น กล่องจะมีความจุ 100 ลูกบาศก์นิ้ว เมื่อด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวประมาณ 0.94 นิ้ว หรือ 3.18 นิ้ว

17. เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนระยะเวลาที่จอด และ $f(x)$ แทนค่าบริการ จอดรถในสนามบินแห่งนี้ ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 35 & ; 0 < x \leq 1.1 \\ 55 & ; 1.1 < x \leq 2.1 \\ 75 & ; 2.1 < x \leq 3.1 \\ 95 & ; 3.1 < x \leq 4.1 \\ 115 & ; 4.1 < x \leq 5.1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

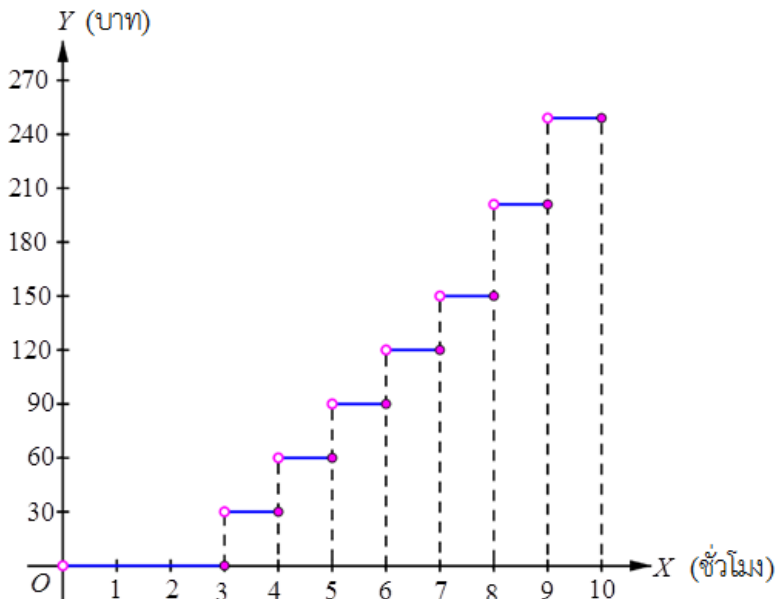
เขียนกราฟได้ดังนี้



18. เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนระยะเวลาในการจอดรถที่อาคารจอดรถแห่งนี้ ในหน่วยชั่วโมง และ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการจอดรถของอาคารจอดรถแห่งนี้ในหน่วยบาท ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 < x \leq 3 \\ 30 & ; 3 < x \leq 4 \\ 60 & ; 4 < x \leq 5 \\ 90 & ; 5 < x \leq 6 \\ 120 & ; 6 < x \leq 7 \\ 150 & ; 7 < x \leq 8 \\ 200 & ; 8 < x \leq 9 \\ 250 & ; 9 < x \leq 10 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

เขียนกราฟได้ดังนี้



19. เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนระยะทาง และ $f(x)$ แทนค่าโดยสาร ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 35 & ; 0 < x < 1.01 \\ 38 & ; 1.01 \leq x < 1.11 \\ 41 & ; 1.11 \leq x < 1.21 \\ 44 & ; 1.21 \leq x < 1.31 \\ 47 & ; 1.31 \leq x < 1.41 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

20. ในที่นี้ $x = 6$

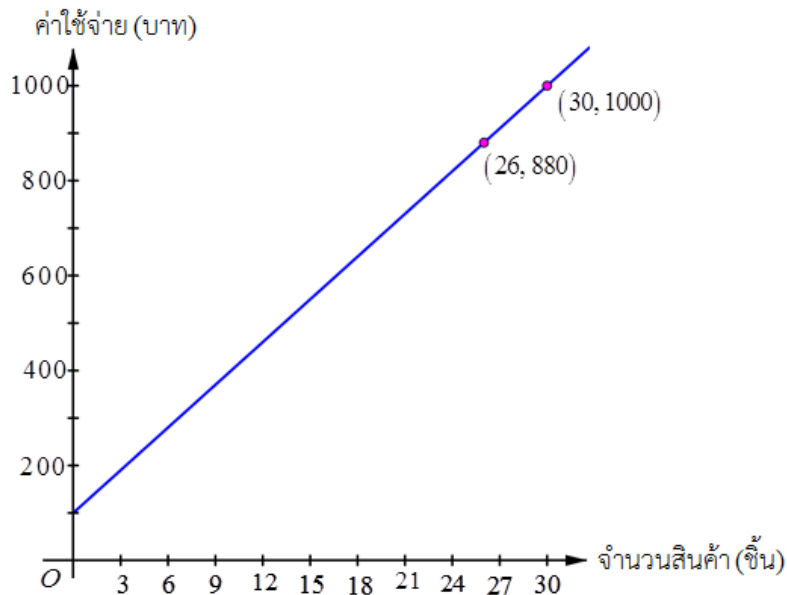
จะได้จำนวนประชากรใน พ.ศ. 2565 คือ $86(1.021)^6 \approx 97.42$ ล้านคน

21. ในที่นี้ $x = 12$

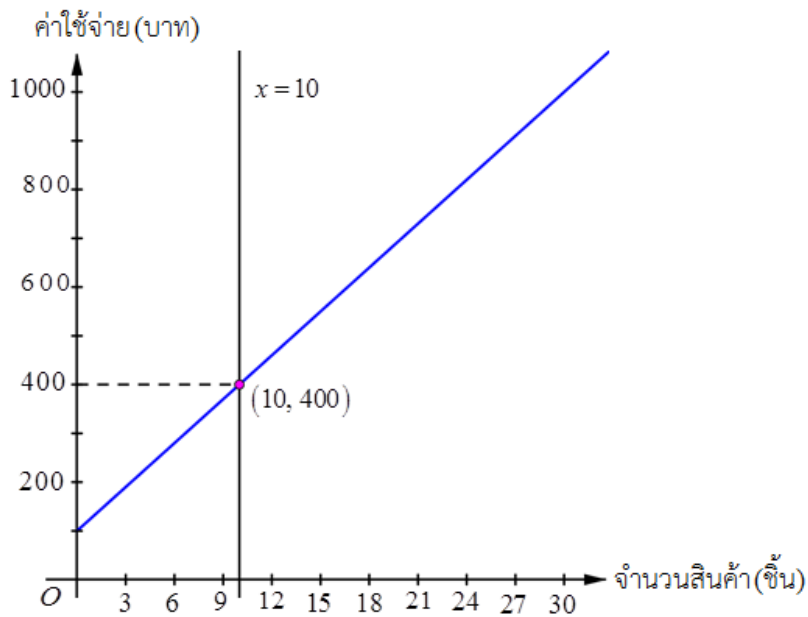
จะได้จำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป 12 ชั่วโมง คือ

$$25,000(1.125)^{\frac{12}{3}} = 25,000(1.125)^4 \approx 40,045 \text{ เซลล์}$$

22. 1) ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสินค้าที่ซื้อและค่าใช้จ่ายทั้งหมดมีกราฟเป็นเส้นตรง เพราะสินค้าทุกชิ้นในร้านมีราคาเท่ากัน อัตราการเพิ่มของค่าใช้จ่ายจึงเพิ่มตามจำนวนสินค้าที่ซื้อเพิ่มมากขึ้นเป็นอัตราคงที่
- 2) จากโจทย์ จะได้จุด $(26, 880)$ และ $(30, 1000)$ อยู่บนกราฟเส้นตรง ซึ่งจะได้กราฟมีลักษณะดังรูป



- 3) ในการหาค่าใช้จ่ายทั้งหมด เมื่อซื้อสินค้า 10 ชิ้น
สามารถทำได้โดย เขียนเส้นตรง $x=10$ ลงในกราฟข้อ 2) จะได้จุดตัดดังรูป



ดังนั้น เมื่อซื้อสินค้า 10 ชิ้น จะเสียค่าใช้จ่ายทั้งหมด 400 บาท

- 4) เนื่องจากซื้อสินค้า 26 ชิ้น มีค่าใช้จ่ายทั้งหมด 880 บาท โดยมีค่าส่งสินค้า 100 บาท
นั่นคือ ค่าสินค้า 26 ชิ้นที่ไม่รวมค่าส่งเป็นเงิน 780 บาท

$$\text{ดังนั้น สินค้าราคาชิ้นละ } \frac{780}{26} = 30 \text{ บาท}$$

- 5) ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงค่าใช้จ่ายทั้งหมด เมื่อซื้อสินค้า x ชิ้น

จากสินค้าราคาชิ้นละ 30 บาท และคิดค่าส่งสินค้าแต่ละครั้ง 100 บาท

$$\text{จะได้ } f(x) = 30x + 100$$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงค่าใช้จ่ายทั้งหมด คือ $f(x) = 30x + 100$ เมื่อซื้อสินค้า x ชิ้น

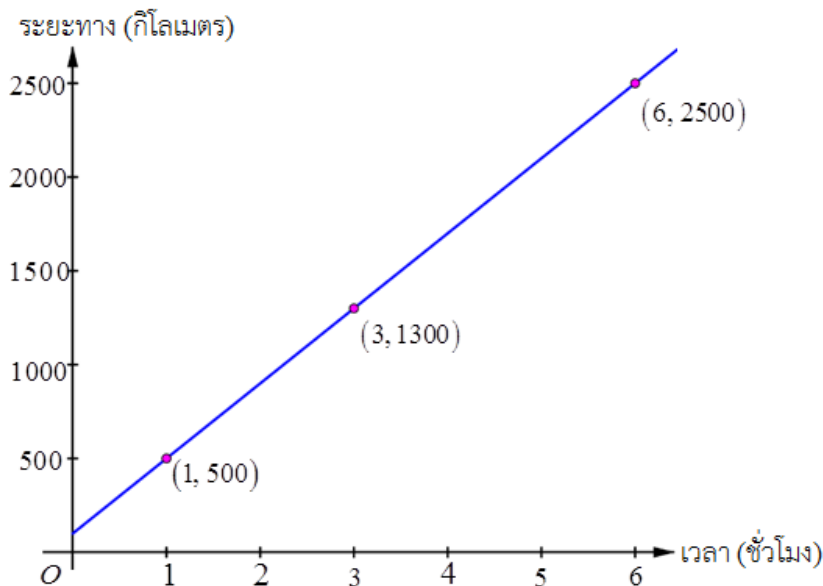
- 6) ถ้ามีเงิน 3,000 บาท แสดงว่า $f(x) = 3,000$

$$\text{จะได้ } 3,000 = 30x + 100$$

$$x \approx 96.67$$

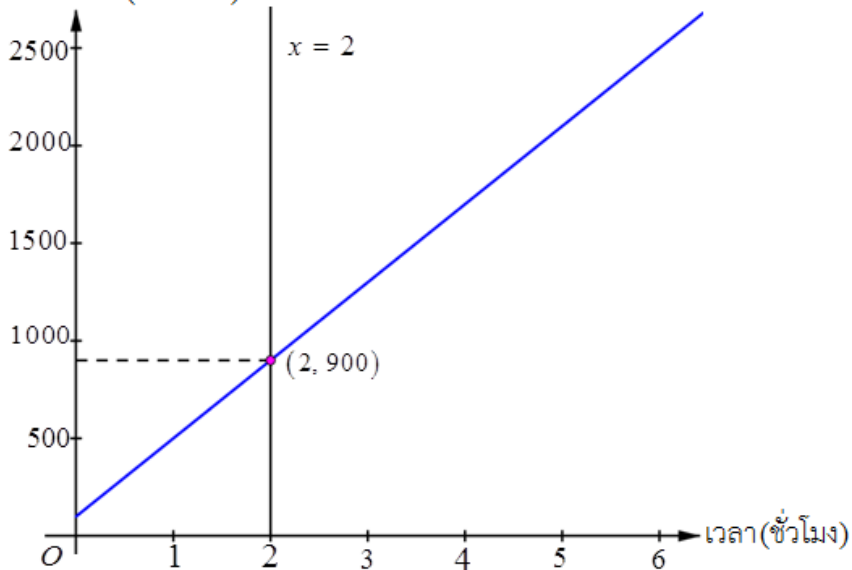
นั่นคือ ถ้ามีเงิน 3,000 บาท จะซื้อสินค้าได้มากที่สุด 96 ชิ้น

23. 1) จากโจทย์ จะได้จุด $(1, 500)$, $(3, 1300)$ และ $(6, 2500)$ อยู่บนกราฟ
ซึ่งสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและระยะทางที่เครื่องบินลำนี้บินได้มีกราฟเป็น
เส้นตรง เพราะเครื่องบินลำนี้บินด้วยอัตราเร็วคงที่

- 2) ในการหาระยะทางที่เครื่องบินลำนี้บินได้ เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง สามารถทำได้โดย เขียนเส้นตรง $x = 2$ ลงในกราฟข้อ 1) จะได้จุดตัดดังรูป ระยะทาง (กิโลเมตร)



ดังนั้น เมื่อเครื่องบินบินด้วยอัตราเร็วคงที่เป็นเวลา 2 ชั่วโมง จะบินได้ระยะทาง 900 กิโลเมตร

- 3) ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงระยะทางที่เครื่องบินลำนี้บินได้ เมื่อบินด้วยอัตราเร็วคงที่เป็นเวลา x ชั่วโมง

จาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จะได้ $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

จากเครื่องบินบินด้วยอัตราเร็วคงที่เป็นเวลา 1 และ 3 ชั่วโมง จะบินได้ระยะทาง 500 และ 1,300 กิโลเมตร ตามลำดับ

แทน x ด้วย 1 ใน $f(x)$ จะได้ $f(1) = a(1) + b = a + b$

จาก $f(1) = 500$ จะได้

$$500 = a + b \quad \text{----- (1)}$$

และแทน x ด้วย 3 ใน $f(x)$ จะได้ $f(3) = a(3) + b = 3a + b$

จาก $f(3) = 1,300$ จะได้

$$1,300 = 3a + b \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $a = 400$ และ $b = 100$

จะได้ $f(x) = 400x + 100$

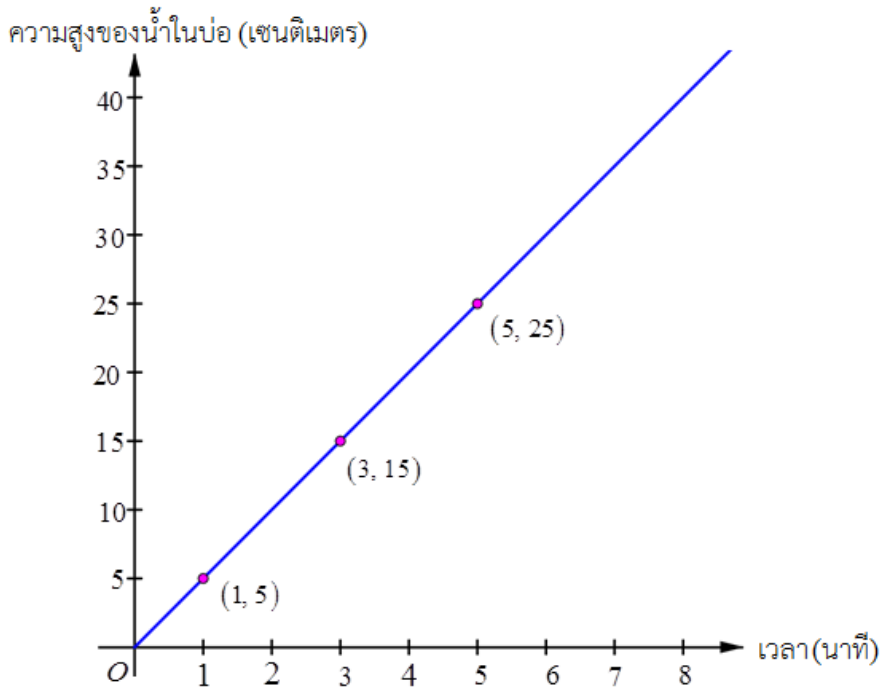
ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงระยะทางที่เครื่องบินลำนี้บินได้ คือ $f(x) = 400x + 100$

เมื่อบินด้วยอัตราเร็วคงที่เป็นเวลา x ชั่วโมง

- 4) ระยะทางทั้งหมดก่อนที่เครื่องบินจะบินด้วยอัตราเร็วคงที่ คือ 100 กิโลเมตร

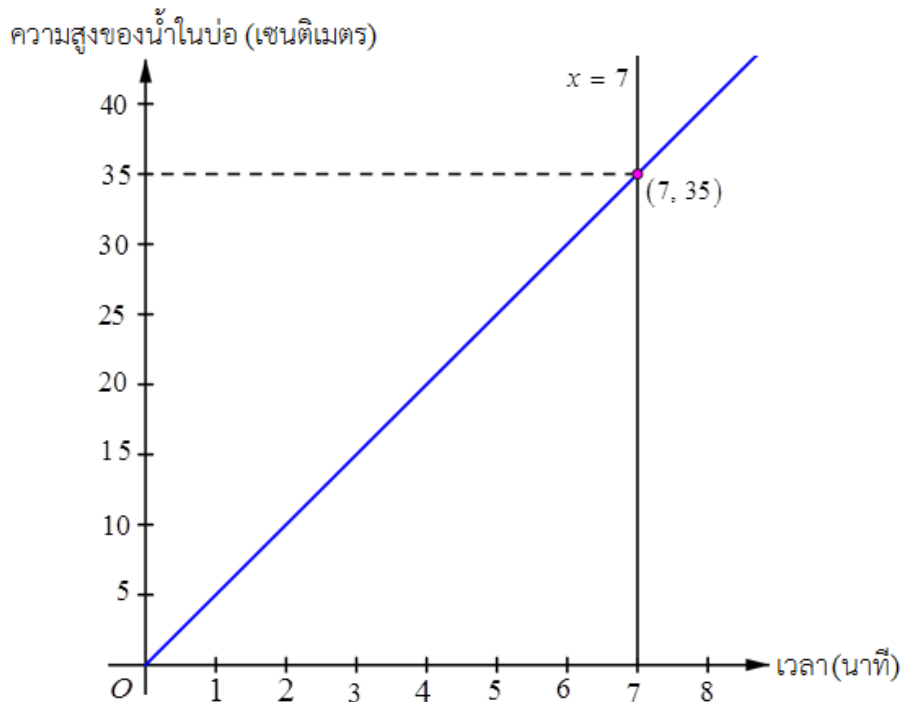
24. 1) จากโจทย์ จะได้จุด $(1, 5)$, $(3, 15)$ และ $(5, 25)$ อยู่บนกราฟ

ซึ่งสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและความสูงของระดับน้ำในบ่อเป็นกราฟเส้นตรง เพราะ ภาณุเปิดน้ำใส่บ่อด้วยอัตราเร็วคงที่

- 2) ในการหาความสูงของระดับน้ำในบ่อ เมื่อเปิดน้ำด้วยอัตราเร็วคงที่ 7 นาที สามารถทำได้โดย เขียนเส้นตรง $x = 7$ ลงในกราฟข้อ 1) จะได้จุดตัดดังรูป



ดังนั้น ถ้าเปิดน้ำด้วยอัตราเร็วคงที่เป็นเวลา 7 นาที ความสูงของระดับน้ำในบ่อสูง 35 เซนติเมตร

- 3) ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงความสูงของระดับน้ำในบ่อ เมื่อเปิดน้ำด้วยอัตราเร็วคงที่เป็นเวลา x นาที

จะได้ $f(x) = 5x$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงความสูงของระดับน้ำในบ่อ คือ $f(x) = 5x$ เมื่อเปิดน้ำด้วยอัตราเร็วคงที่เป็นเวลา x นาที

- 4) เมื่อเปิดน้ำด้วยอัตราเร็วคงที่เป็นเวลา 23 นาที

จะได้ ความสูงของระดับน้ำในบ่อเป็น $5(23) = 115$ เซนติเมตร

ดังนั้น น้ำไม่ล้นบ่อ และระดับน้ำอยู่ต่ำกว่าขอบบ่อ 15 เซนติเมตร

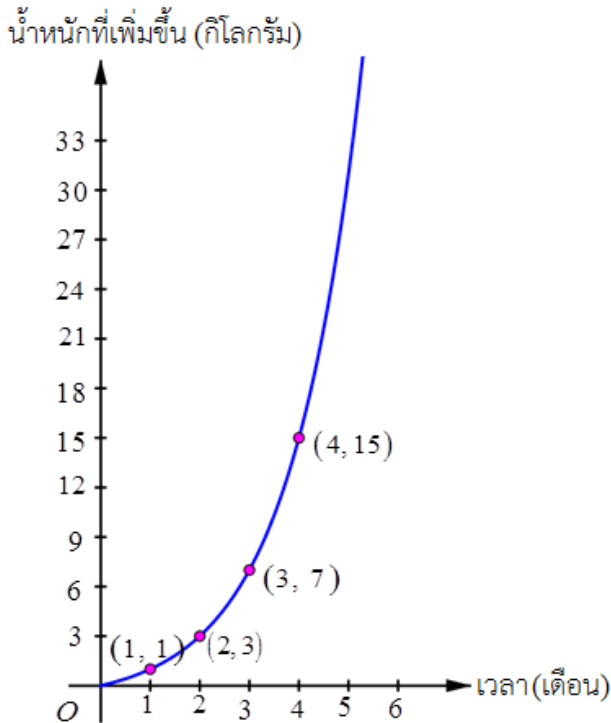
- 5) ถ้าน้ำเต็มบ่อ แสดงว่า $f(x) = 130$

จะได้ $5x = 130$

$x = 26$

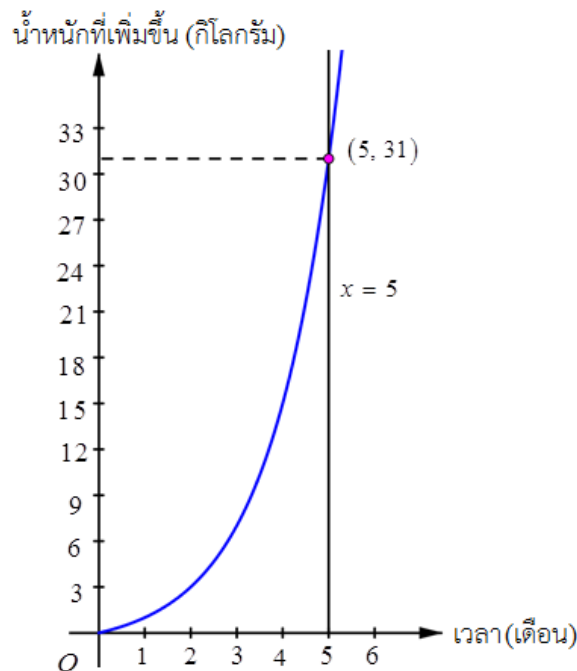
ดังนั้น ต้องเปิดน้ำด้วยอัตราเร็วคงที่เป็นเวลา 26 นาที น้ำจึงจะเต็มบ่อ

25. 1) จากโจทย์ จะได้จุด $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 7)$ และ $(4, 15)$ อยู่บนกราฟ
ซึ่งสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปและน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นมีกราฟใกล้เคียงกับกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล การเพิ่มขึ้นในช่วงแรกน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นมีอัตราการเพิ่มขึ้นอย่างช้า ๆ แต่เมื่อเวลาผ่านไปน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นมีอัตราการเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว

- 2) ในการหาน้ำหนักที่เพิ่มขึ้น เมื่อเวลาผ่านไป 5 เดือน
สามารถทำได้โดย เขียนเส้นตรง $x = 5$ ลงในกราฟข้อ 1) จะได้จุดตัดดังรูป



ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 5 เดือน น้ำหนักของเพรียวจะเพิ่มขึ้น 31 กิโลกรัม

- 3) ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นของเพรียว เมื่อเวลาผ่านไป x เดือน
จะได้ว่า $f(x) = 2^x - 1$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นของเพรียว คือ $f(x) = 2^x - 1$ เมื่อเวลาผ่านไป x เดือน

- 4) เมื่อเวลาผ่านไป 7 เดือน น้ำหนักของเพรียวจะเพิ่มขึ้น $2^7 - 1 = 127$ กิโลกรัม
ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 7 เดือน เพรียวจะหนัก 167 กิโลกรัม

- 5) น้ำหนักของเพรียวจะมากกว่า 100 กิโลกรัม เมื่อน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นของเพรียวมากกว่า 60 กิโลกรัม นั่นคือ $f(x) \geq 60$

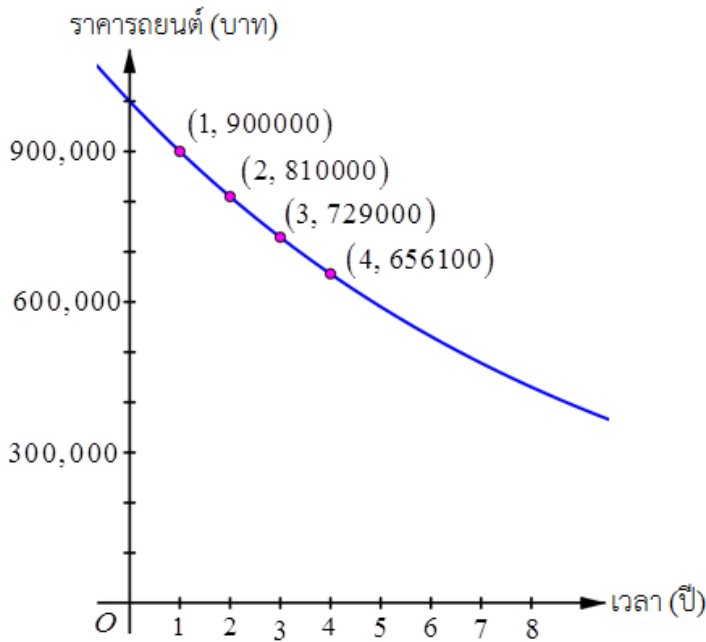
$$\text{จะได้ } 2^x - 1 \geq 60$$

$$2^x \geq 61$$

เนื่องจาก $2^5 = 32$ และ $2^6 = 64$

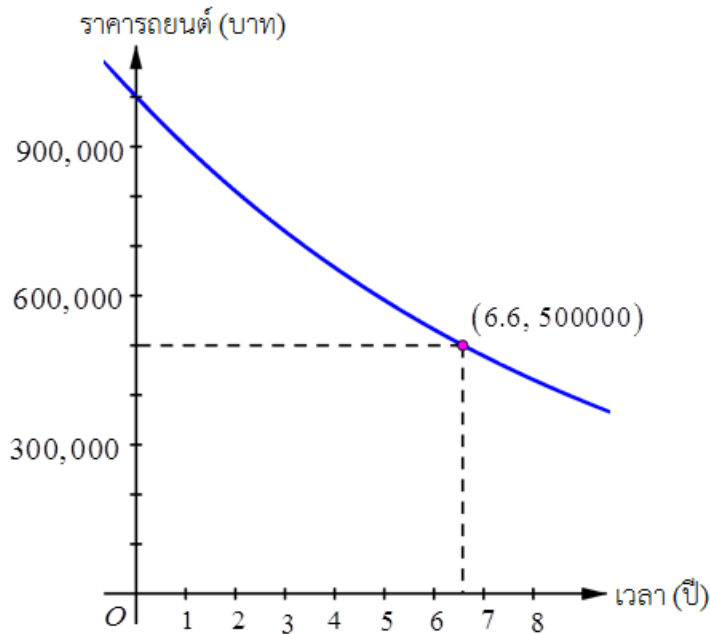
ดังนั้น น้ำหนักของเพรียวจะมากกว่า 100 กิโลกรัม เมื่อเวลาผ่านไป 6 เดือน

26. 1) จากโจทย์ จะได้จุด $(1, 900000)$, $(2, 810000)$, $(3, 729000)$ และ $(4, 656100)$
อยู่บนกราฟ ซึ่งสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ผ่านไปและราคารถยนต์มีกราฟใกล้เคียงกับกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เพราะ ในช่วงแรกราคารถยนต์ลดลงอย่างรวดเร็ว แต่เมื่อเวลาผ่านไปราคารถยนต์ลดลงด้วยอัตราที่ลดลง

- 2) ในการหาเวลาที่ผ่านไป เมื่อราคาของรถยนต์เหลือน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของราคาที่ซื้อมา สามารถทำได้โดย เขียนเส้นตรง $y = 500,000$ ลงในกราฟข้อ 1) จะได้จุดตัดดังรูป



ดังนั้น ราคาของรถยนต์จะน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของราคาที่ซื้อมา เมื่อเวลาผ่านไป 7 ปี

- 3) ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงราคาของรถยนต์ เมื่อเวลาผ่านไป x ปี

จะได้ $f(x) = 1,000,000(0.9)^x$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงราคาของรถยนต์ คือ $f(x) = 1,000,000(0.9)^x$ เมื่อเวลาผ่านไป x ปี

- 4) แทน x ด้วย 7 ใน $f(x) = 1,000,000(0.9)^x$ ได้

$$f(7) = 1,000,000(0.9)^7 \approx 478,296.90$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 7 ปี ราคาของรถยนต์จะเหลือประมาณ 478,296.90 บาท

- 5) ถ้าต้องการให้ราคาของรถยนต์น้อยกว่า 300,000 บาท

นั่นคือ $f(x) < 300,000$

จะได้ $1,000,000(0.9)^x < 300,000$

$$(0.9)^x < 0.3$$

เนื่องจาก $(0.9)^{11} \approx 0.3138$ และ $(0.9)^{12} \approx 0.2824$

ดังนั้น ราคาของรถยนต์จะน้อยกว่า 300,000 บาท เมื่อเวลาผ่านไป 12 ปี

27. 1) ณ เวลา 07:00 น.

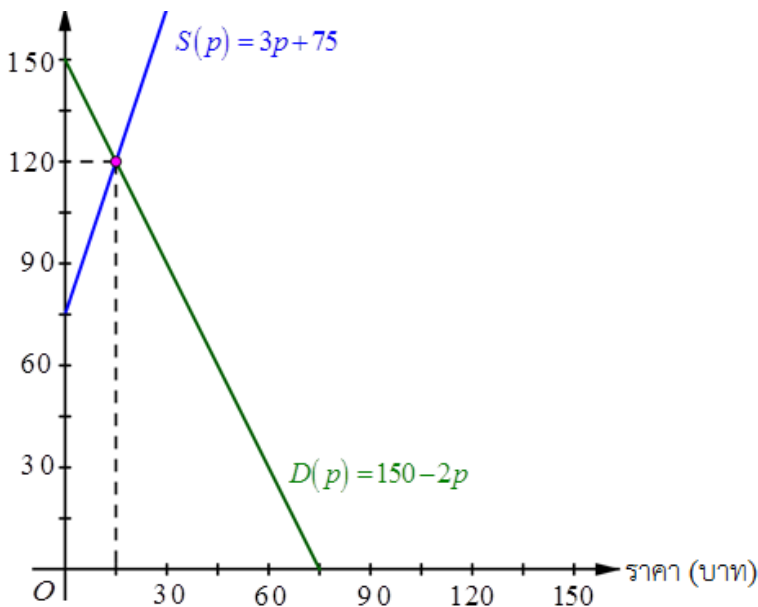
มีผู้ใช้บริการศูนย์ออกกำลังกาย A จำนวน 84 คน

มีผู้ใช้บริการศูนย์ออกกำลังกาย B จำนวน 108 คน

และมีผู้ใช้บริการศูนย์ออกกำลังกาย C จำนวน 100 คน

- 2) ศูนย์ออกกำลังกาย A และ B มีผู้ใช้บริการเท่ากัน ในเวลา 09:00 น. และ 19:00 น. โดย ณ เวลา 09:00 น. มีผู้ใช้บริการ 96 คน และเวลา 19:00 น. มีผู้ใช้บริการ 36 คน
- 3) ศูนย์ออกกำลังกาย B มีผู้ใช้บริการมากที่สุด ณ เวลา 07:00 น.
- 4) ณ เวลา 09:00 น. ศูนย์ออกกำลังกาย C มีจำนวนผู้ใช้บริการน้อยกว่าศูนย์ออกกำลังกาย A และ B อยู่ $96 - 40 = 56$ คน
- 5) ศูนย์ออกกำลังกาย A มีผู้ใช้บริการ ณ เวลา 07:00 น. จำนวน 84 คน และเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ จนมากที่สุด ในเวลา 11:00 น. และหลังจากนั้นผู้ใช้บริการมีจำนวนลดลงจนถึงเวลา 21:00 น. จึงไม่มีผู้ใช้บริการ
ศูนย์ออกกำลังกาย B มีผู้ใช้บริการ ณ เวลา 07:00 น. จำนวน 108 คน และจำนวนผู้ใช้บริการลดลงจนถึงเวลา 21:00 น. ด้วยอัตราคงที่ โดย ณ เวลา 21:00 น. มีผู้ใช้บริการจำนวน 24 คน
ศูนย์ออกกำลังกาย C มีผู้ใช้บริการ ณ เวลา 07:00 น. จำนวน 100 คน และจำนวนผู้ใช้บริการลดลงอย่างรวดเร็วจนถึงเวลา 14.00 น. และหลังจากนั้นผู้ใช้บริการมีจำนวนคงที่จนถึงเวลา 21.00 น.

28. 1) เขียนกราฟของฟังก์ชันอุปสงค์ $D(p)$ และฟังก์ชันอุปทาน $S(p)$ ได้ดังนี้
 ปริมาณมันสำปะหลัง (กิโลกรัม)



จากกราฟ จะเห็นว่าจุดที่กราฟของฟังก์ชันอุปสงค์ตัดกับกราฟของฟังก์ชันอุปทาน คือ จุดดุลยภาพ

- 2) เนื่องจากราคาดุลยภาพจะเกิดขึ้นเมื่ออุปสงค์เท่ากับอุปทาน

นั่นคือ $D(p) = S(p)$

จะได้ $150 - 2p = 3p + 75$

$$75 = 5p$$

$$p = 15$$

ดังนั้น ราคาดุลยภาพ คือ 15 บาทต่อกิโลกรัม

- 3) จากกราฟ เมื่อพิจารณาราคาขายที่น้อยกว่า 15 บาทต่อกิโลกรัม

จะได้ว่าอุปทานน้อยกว่าอุปสงค์

นั่นคือ ปริมาณความต้องการขายมันสำปะหลังน้อยกว่าปริมาณความต้องการซื้อมันสำปะหลัง

ดังนั้น ถ้าผู้ค้ามันสำปะหลังตั้งราคาต่ำกว่าราคาดุลยภาพ จะทำให้มันสำปะหลังไม่เพียงพอต่อการซื้อ

- 4) จากกราฟ เมื่อพิจารณาราคาขายที่มากกว่า 15 บาทต่อกิโลกรัม

จะได้ว่าอุปทานมากกว่าอุปสงค์

นั่นคือ ปริมาณความต้องการขายมันสำปะหลังมากกว่าปริมาณความต้องการซื้อ

ดังนั้น ถ้าตั้งราคาขายสูงกว่าราคาดุลยภาพจะทำให้มีมันสำปะหลังเหลือจากการขาย

บทที่ 3 ลำดับและอนุกรม

แบบฝึกหัด 3.1.1

1. 1) แทน n ใน $a_n = 2n + 5$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = 2(1) + 5 = 7$$

$$a_2 = 2(2) + 5 = 9$$

$$a_3 = 2(3) + 5 = 11$$

$$a_4 = 2(4) + 5 = 13$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ 7, 9, 11 และ 13

- 2) แทน n ใน $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ และ $\frac{1}{16}$

- 3) แทน n ใน $a_n = (-2)^n$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = (-2)^1 = -2$$

$$a_2 = (-2)^2 = 4$$

$$a_3 = (-2)^3 = -8$$

$$a_4 = (-2)^4 = 16$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ -2, 4, -8 และ 16

- 4) แทน n ใน $a_n = \frac{n+1}{n}$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ และ $\frac{5}{4}$

- 5) แทน n ใน $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = \frac{1+(-1)^1}{1} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$a_2 = \frac{1+(-1)^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$a_3 = \frac{1+(-1)^3}{3} = \frac{1-1}{3} = 0$$

$$a_4 = \frac{1+(-1)^4}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $0, 1, 0$ และ $\frac{1}{2}$

- 6) แทน n ใน $a_n = \frac{2^n}{3^n}$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = \frac{2^1}{3^1} = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$a_3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

$$a_4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}$ และ $\frac{16}{81}$

- 7) แทน n ใน $a_n = (n-1)(n+1)$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = (1-1)(1+1) = 0(2) = 0$$

$$a_2 = (2-1)(2+1) = 1(3) = 3$$

$$a_3 = (3-1)(3+1) = 2(4) = 8$$

$$a_4 = (4-1)(4+1) = 3(5) = 15$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ 0, 3, 8 และ 15

- 8) แทน n ใน $a_n = n(n-1)(n-2)$ ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้ สี่พจน์แรกของลำดับดังนี้

$$a_1 = 1(1-1)(1-2) = 1(0)(-1) = 0$$

$$a_2 = 2(2-1)(2-2) = 2(1)(0) = 0$$

$$a_3 = 3(3-1)(3-2) = 3(2)(1) = 6$$

$$a_4 = 4(4-1)(4-2) = 4(3)(2) = 24$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ 0, 0, 6 และ 24

2. เนื่องจากจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 และ 7 ลงตัว คือ จำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 14 ลงตัว ซึ่งเขียนเป็นลำดับได้ดังนี้ $a_n = 14n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น เจ็ดพจน์แรกของลำดับของจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 2 และ 7 ลงตัว โดยเรียงจากน้อยไปมาก คือ 14, 28, 42, 56, 70, 84 และ 98

แบบฝึกหัด 3.1.2

1. 1) จาก $a_1 = 2$ และ $d = 4$ จะได้

$$a_2 = a_1 + d = 2 + 4 = 6$$

$$a_3 = a_2 + d = 6 + 4 = 10$$

$$a_4 = a_3 + d = 10 + 4 = 14$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 2, 6, 10 และ 14

- 2) จาก $a_1 = 3$ และ $d = 5$ จะได้

$$a_2 = a_1 + d = 3 + 5 = 8$$

$$a_3 = a_2 + d = 8 + 5 = 13$$

$$a_4 = a_3 + d = 13 + 5 = 18$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 3, 8, 13 และ 18

- 3) จาก $a_1 = -3$ และ $d = 3$ จะได้

$$a_2 = a_1 + d = -3 + 3 = 0$$

$$a_3 = a_2 + d = 0 + 3 = 3$$

$$a_4 = a_3 + d = 3 + 3 = 6$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $-3, 0, 3$ และ 6

- 4) จาก $a_1 = -4$ และ $d = 2$ จะได้

$$a_2 = a_1 + d = -4 + 2 = -2$$

$$a_3 = a_2 + d = -2 + 2 = 0$$

$$a_4 = a_3 + d = 0 + 2 = 2$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $-4, -2, 0$ และ 2

- 5) จาก $a_1 = 5$ และ $d = -2$ จะได้

$$a_2 = a_1 + d = 5 + (-2) = 3$$

$$a_3 = a_2 + d = 3 + (-2) = 1$$

$$a_4 = a_3 + d = 1 + (-2) = -1$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $5, 3, 1$ และ -1

- 6) จาก $a_1 = -3$ และ $d = -4$ จะได้

$$a_2 = a_1 + d = (-3) + (-4) = -7$$

$$a_3 = a_2 + d = (-7) + (-4) = -11$$

$$a_4 = a_3 + d = (-11) + (-4) = -15$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $-3, -7, -11$ และ -15

- 7) จาก $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $d = \frac{1}{2}$ จะได้

$$a_2 = a_1 + d = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$a_3 = a_2 + d = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = a_3 + d = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ และ 2

8) จาก $a_1 = \frac{5}{2}$ และ $d = -\frac{3}{2}$ จะได้

$$a_2 = a_1 + d = \frac{5}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = 1$$

$$a_3 = a_2 + d = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$a_4 = a_3 + d = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) = -2$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $\frac{5}{2}, 1, -\frac{1}{2}$ และ -2

2. 1) จาก $a_1 = 4$, $d = 3$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_3 &= 4 + (3-1)(3) \\ &= 4 + (2)(3) \\ &= 10 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_3 = 10$

2) จาก $a_1 = 7$, $d = -3$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_{12} &= 7 + (12-1)(-3) \\ &= 7 + (11)(-3) \\ &= -26 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_{12} = -26$

3) จาก $a_1 = \frac{4}{5}$, $d = -1$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_{20} &= \frac{4}{5} + (20-1)(-1) \\ &= \frac{4}{5} + (19)(-1) \\ &= -\frac{91}{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_{20} = -\frac{91}{5}$

4) จาก $a_1 = 4$, $d = \frac{1}{2}$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$a_{11} = 4 + (11-1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 4 + (10)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 9 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_{11} = 9$

3. 1) จากลำดับเลขคณิต 11, 13, 15, 17, 19, ...

จะได้ $d = 13 - 11 = 2$

และ $a_1 = 11$

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_n &= 11 + (n-1)(2) \\ &= 11 + 2n - 2 \\ &= 9 + 2n \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $9 + 2n$ หรือ $a_n = 9 + 2n$

- 2) จากลำดับเลขคณิต 7, 10, 13, 16, 19, ...

จะได้ $d = 10 - 7 = 3$

และ $a_1 = 7$

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_n &= 7 + (n-1)(3) \\ &= 7 + 3n - 3 \\ &= 4 + 3n \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $4 + 3n$ หรือ $a_n = 4 + 3n$

- 3) จากลำดับเลขคณิต 2, -1, -4, -7, -10, ...

จะได้ $d = -1 - 2 = -3$

และ $a_1 = 2$

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_n &= 2 + (n-1)(-3) \\ &= 2 - 3n + 3 \\ &= 5 - 3n \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $5 - 3n$ หรือ $a_n = 5 - 3n$

- 4) จากลำดับเลขคณิต 4, 2, 0, -2, -4, ...

จะได้ $d = 2 - 4 = -2$

และ $a_1 = 4$

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_n &= 4 + (n-1)(-2) \\ &= 4 - 2n + 2 \\ &= 6 - 2n\end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $6 - 2n$ หรือ $a_n = 6 - 2n$

- 5) จากลำดับเลขคณิต $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

$$\text{จะได้ } d = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{และ } a_1 = 0$$

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_n &= 0 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 0 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n\end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$ หรือ $a_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$

- 6) จากลำดับเลขคณิต $\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$

$$\text{จะได้ } d = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{และ } a_1 = \frac{3}{2}$$

พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_n &= \frac{3}{2} + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}n\end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $1 + \frac{1}{2}n$ หรือ $a_n = 1 + \frac{1}{2}n$

4. 1) จาก $a_1 = 13$ และ $a_2 = 25$

จะได้ $d = 25 - 13 = 12$

นั่นคือ $a_3 = a_2 + d = 25 + 12 = 37$

$$a_4 = a_3 + d = 37 + 12 = 49$$

$$a_5 = a_4 + d = 49 + 12 = 61$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ 37, 49 และ 61 ตามลำดับ

- 2) จาก $a_1 = 18$, $a_3 = 11$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $11 = 18 + (3-1)d$

$$d = -\frac{7}{2}$$

นั่นคือ $a_2 = a_1 + d = 18 + \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{29}{2}$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{2}$$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{15}{2} + \left(-\frac{7}{2}\right) = 4$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{29}{2}$, $\frac{15}{2}$ และ 4 ตามลำดับ

- 3) จาก $a_1 = 13$, $a_5 = 33$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $33 = 13 + (5-1)d$

$$d = 5$$

นั่นคือ $a_2 = a_1 + d = 13 + 5 = 18$

$$a_3 = a_2 + d = 18 + 5 = 23$$

$$a_4 = a_3 + d = 23 + 5 = 28$$

$$a_6 = a_5 + d = 33 + 5 = 38$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ 18, 23, 28 และ 38 ตามลำดับ

- 4) จาก $a_3 = 100$, $a_6 = 142$ และ $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$100 = a_1 + (3-1)d \quad \text{----- (1)}$$

$$142 = a_1 + (6-1)d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 14$ และ $a_1 = 72$

นั่นคือ $a_2 = a_1 + d = 72 + 14 = 86$

$$a_4 = a_3 + d = 100 + 14 = 114$$

$$a_5 = a_4 + d = 114 + 14 = 128$$

$$a_7 = a_6 + d = 142 + 14 = 156$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ 72, 86, 114, 128 และ 156 ตามลำดับ

5. จากลำดับเลขคณิต 3, 8, 13, 18, 23, ...

จะได้ $d = 8 - 3 = 5$

และ $a_1 = 3$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_{15} &= 3 + (15-1)(5) \\ &= 3 + (14)(5) \\ &= 73 \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ 15 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 73

6. จากพจน์ที่ n คือ $a_n = -n - 3$

จะได้ $a_{20} = -20 - 3 = -23$

และ $a_{50} = -50 - 3 = -53$

ดังนั้น พจน์ที่ 20 คือ -23 และพจน์ที่ 50 คือ -53

7. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$12 = a_1 + (6-1)d \quad \text{-----}(1)$$

$$16 = a_1 + (10-1)d \quad \text{-----}(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 1$ และ $a_1 = 7$

ดังนั้น พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 7

8. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$20 = a_1 + (3-1)d \quad \text{-----}(1)$$

$$32 = a_1 + (7-1)d \quad \text{-----}(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 3$ และ $a_1 = 14$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } a_{25} &= 14 + (25-1)(3) \\ &= 14 + (24)(3) \\ &= 86 \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ 25 คือ 86

9. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$16 = a_1 + (2-1)d \quad \text{-----}(1)$$

$$116 = a_1 + (12-1)d \quad \text{-----}(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d=10$ และ $a_1=6$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } a_n &= 6 + (n-1)(10) \\ &= 6 + 10n - 10 \\ &= -4 + 10n \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_n = -4 + 10n$ และ $d=10$

10. ลำดับเลขคณิตที่กำหนดให้มี $a_1 = -1$ และ $d = -6 - (-1) = -5$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } -176 = -1 + (n-1)(-5)$$

$$n = 36$$

ดังนั้น -176 เป็นพจน์ที่ 36 ของลำดับเลขคณิตนี้

11. ให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 39 และ 51 จะได้ 39, a , 51 เป็นลำดับเลขคณิต

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } a - 39 &= 51 - a \\ 2a &= 90 \\ a &= 45 \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ระหว่าง 39 และ 51 คือ 45

12. จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 100 ซึ่งหารด้วย 13 ลงตัว คือ 104

เนื่องจาก 1,000 หารด้วย 13 ได้ผลหาร 76 เหลือเศษ 12

ดังนั้น จำนวนนับที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 1,000 ซึ่งหารด้วย 13 ลงตัว คือ $1,000 - 12 = 988$

จะได้ว่า ลำดับของจำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000 ซึ่งหารด้วย 13 ลงตัว เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 104 ผลต่างร่วมเป็น 13 และพจน์ที่ n เป็น 988

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } 988 = 104 + (n-1)(13)$$

$$988 = 91 + 13n$$

$$13n = 897$$

$$n = 69$$

ดังนั้น จำนวนนับที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000 มีจำนวนที่หารด้วย 13 ลงตัว ทั้งหมด 69 จำนวน

13. เนื่องจาก $a, 6a+2, 8a+1$ เป็นสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad (6a+2) - a &= (8a+1) - (6a+2) \\ 5a+2 &= 2a-1 \\ 3a &= -3 \\ a &= -1\end{aligned}$$

นั่นคือ สามพจน์แรก คือ $-1, -4, -7$ จะได้ $a_1 = -1$ และ $d = -4 - (-1) = -3$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned}a_n &= -1 + (n-1)(-3) \\ &= -1 - 3n + 3 \\ &= 2 - 3n\end{aligned}$$

ดังนั้น $a = -1$ และพจน์ทั่วไปคือ $2 - 3n$ หรือ $a_n = 2 - 3n$

14. เขียนลำดับเลขคณิตแทนเงินเดือนของสมศักดิ์ที่ได้รับในแต่ละปี ได้เป็น

$$25000, 26000, 27000, \dots, a_7$$

ลำดับที่ได้เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 25,000 และผลต่างร่วมเป็น 1,000

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad a_7 &= 25,000 + (7-1)(1,000) \\ &= 25,000 + (6)(1,000) \\ &= 31,000\end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อสมศักดิ์ทำงานได้ 6 ปี จะได้รับเงินเดือน 31,000 บาท

15. เขียนลำดับแทนราคาของรถยนต์ที่บริษัทจะรับซื้อคืนในราคาต่ำกว่าราคาที่ซื้อจาก

$$\text{บริษัท ได้เป็น } 100000, 170000, 240000, \dots, a_5$$

ลำดับที่ได้เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น 100,000 และผลต่างร่วมเป็น 70,000

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad a_5 &= 100,000 + (5-1)(70,000) \\ &= 100,000 + (4)(70,000) \\ &= 380,000\end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อใช้รถยนต์ไปแล้ว 5 ปี บริษัทจะรับซื้อรถยนต์คืนในราคาต่ำกว่าราคาที่ซื้อ

จากบริษัท 380,000 บาท

แบบฝึกหัด 3.1.3

1.
 - 1) อัตราส่วนร่วม $r = \frac{4}{2} = 2$
 - 2) อัตราส่วนร่วม $r = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
 - 3) อัตราส่วนร่วม $r = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}$
 - 4) อัตราส่วนร่วม $r = \frac{-0.8}{-8} = \frac{1}{10}$
 - 5) อัตราส่วนร่วม $r = \frac{1}{-1} = -1$
 - 6) อัตราส่วนร่วม $r = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$
 - 7) อัตราส่วนร่วม $r = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$
 - 8) อัตราส่วนร่วม $r = \frac{\frac{5a}{2}}{5} = \frac{a}{2}$ เมื่อ $a \neq 0$
2.
 - 1) จากลำดับเรขาคณิต 1, 7, 49, 343, ...
 จะได้ $a_1 = 1$ และ $r = \frac{7}{1} = 7$
 พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$
 จะได้

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 r^{5-1} = 1 \times 7^4 = 7^4 \\ a_6 &= a_1 r^{6-1} = 1 \times 7^5 = 7^5 \\ a_7 &= a_1 r^{7-1} = 1 \times 7^6 = 7^6 \end{aligned}$$
 ดังนั้น สามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $7^4, 7^5$ และ 7^6
 - 2) จากลำดับเรขาคณิต -1, 2, -4, 8, ...
 จะได้ $a_1 = -1$ และ $r = \frac{2}{-1} = -2$
 พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\text{จะได้ } a_5 = a_1 r^{5-1} = (-1) \times (-2)^4 = -16$$

$$a_6 = a_1 r^{6-1} = (-1) \times (-2)^5 = 32$$

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = (-1) \times (-2)^6 = -64$$

ดังนั้น สามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $-16, 32$ และ -64

3) จากลำดับเรขาคณิต $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

$$\text{จะได้ } a_1 = 3 \text{ และ } r = \frac{1}{3}$$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\text{จะได้ } a_5 = a_1 r^{5-1} = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^4 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$a_6 = a_1 r^{6-1} = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^5 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 3 \left(\frac{1}{3} \right)^6 = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$$

ดังนั้น สามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$ และ $\frac{1}{243}$

3. จากลำดับเรขาคณิต $2, 4, 8, 16, \dots$

$$\text{จะได้ } a_1 = 2 \text{ และ } r = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } a_9 = 2 \times (2)^{9-1}$$

$$= 2 \times 2^8$$

$$= 2^9$$

$$= 512$$

ดังนั้น พจน์ที่ 9 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 512

4. จากลำดับเรขาคณิต $2, -10, 50, -250, \dots$

จะได้ $a_1 = 2$ และ $r = \frac{-10}{2} = -5$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้
$$\begin{aligned} a_{11} &= 2 \times (-5)^{11-1} \\ &= 2 \times (-5)^{10} \\ &= 2(5^{10}) \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ 11 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $2(5^{10})$

5. จากลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$

จะได้ $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $r = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้
$$\begin{aligned} a_8 &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 \\ &= \frac{1}{2(3^7)} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{1}{2(3^7)}$

6. 1) จากลำดับเรขาคณิต $1, 3, 9, \dots$

จะได้ $a_1 = 1$ และ $r = \frac{3}{1} = 3$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= 1(3)^{n-1} \\ &= 3^{n-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 3^{n-1}

- 2) จากลำดับเรขาคณิต 25, 5, 1, ...

จะได้ $a_1 = 25$ และ $r = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= 25 \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} \\ &= 5^2 \times 5^{1-n} \\ &= 5^{3-n} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 5^{3-n}

- 3) จากลำดับเรขาคณิต 1, -1, 1, -1, ...

จะได้ $a_1 = 1$ และ $r = \frac{-1}{1} = -1$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= 1(-1)^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $(-1)^{n-1}$

- 4) จากลำดับเรขาคณิต -2, 4, -8, ...

จะได้ $a_1 = -2$ และ $r = \frac{4}{-2} = -2$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= (-2)(-2)^{n-1} \\ &= (-2)^n \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $(-2)^n$

- 5) จากลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots$ เมื่อ $x \neq 0$

จะได้ $a_1 = \frac{1}{x}$ และ $r = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)^n \\ &= \frac{1}{x^n} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{1}{x^n}$ เมื่อ $x \neq 0$

- 6) จากลำดับเรขาคณิต 1, 0.3, 0.09, 0.027, ...

จะได้ $a_1 = 1$ และ $r = \frac{0.3}{1} = 0.3$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= 1(0.3)^{n-1} \\ &= (0.3)^{n-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $(0.3)^{n-1}$

- 7) จากลำดับเรขาคณิต -8, -0.8, -0.08, -0.008, ...

จะได้ $a_1 = -8$ และ $r = \frac{-0.8}{-8} = \frac{1}{10}$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= (-8) \left(\frac{1}{10} \right)^{n-1} \\ &= -80 \left(\frac{1}{10} \right)^n \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $-80 \left(\frac{1}{10} \right)^n$

8) จากลำดับเรขาคณิต $2, 2\sqrt{3}, 6, \dots$

$$\text{จะได้ } a_1 = 2 \text{ และ } r = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= 2(\sqrt{3})^{n-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $2(\sqrt{3})^{n-1}$

7. จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\text{ให้ } a_5 = \frac{32}{2} = 16 \text{ และ } r = 2 \text{ จะได้}$$

$$16 = a_1 (2)^{5-1}$$

$$16 = a_1 (2)^4$$

$$a_1 = 1$$

ดังนั้น พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 1

8. จาก $a_3 = 12$ และ $a_6 = 96$

$$\text{จะได้ } 12 = a_1 r^{3-1} \quad \text{----- (1)}$$

$$96 = a_1 r^{6-1} \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $r^3 = 8$ นั่นคือ $r = 2$

ดังนั้น อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ 2

9. จากลำดับเรขาคณิต $2, -6, 18, \dots$

$$\text{จะได้ } a_1 = 2 \text{ และ } r = \frac{-6}{2} = -3$$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้

$$162 = 2(-3)^{n-1}$$

$$81 = (-3)^{n-1}$$

$$(-3)^4 = (-3)^{n-1}$$

$$n-1 = 4$$

$$n = 5$$

ดังนั้น 162 เป็นพจน์ที่ 5 ของลำดับเรขาคณิตนี้

10. 1) จาก $a_1 = 4$ และ $a_2 = 1$ จะได้ $r = \frac{1}{4}$

นั่นคือ $a_3 = a_2 r = 1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

$$a_4 = a_3 r = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

$$a_5 = a_4 r = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64}$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ และ $\frac{1}{64}$ ตามลำดับ

2) จาก $a_1 = 2, a_3 = \frac{2}{9}$ และพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\frac{2}{9} = 2(r)^{3-1}$

$$\frac{2}{9} = 2r^2$$

$$r^2 = \frac{1}{9}$$

นั่นคือ $r = \frac{1}{3}$ หรือ $r = -\frac{1}{3}$

จะได้ $a_2 = a_1 r = 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ หรือ $a_2 = a_1 r = 2\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

$$a_4 = a_3 r = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27} \quad \text{หรือ} \quad a_4 = a_3 r = \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{27}$$

$$a_5 = a_4 r = \frac{2}{27}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{81} \quad \text{หรือ} \quad a_5 = a_4 r = \left(-\frac{2}{27}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{81}$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{2}{3}, \frac{2}{27}$ และ $\frac{2}{81}$ ตามลำดับ

หรือ $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{27}$ และ $\frac{2}{81}$ ตามลำดับ

3) จาก $a_1 = \frac{3}{7}, a_5 = \frac{3}{343}$ และพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\frac{3}{343} = \frac{3}{7}(r)^{5-1}$

$$\frac{3}{343} = \frac{3}{7}r^4$$

$$r^4 = \frac{1}{49}$$

นั่นคือ $r = \frac{1}{\sqrt{7}}$ หรือ $r = -\frac{1}{\sqrt{7}}$

จะได้ $a_2 = a_1 r = \frac{3}{7} \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = \frac{3}{7\sqrt{7}}$ หรือ $a_2 = a_1 r = \frac{3}{7} \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = -\frac{3}{7\sqrt{7}}$

$a_3 = a_2 r = \frac{3}{7\sqrt{7}} \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = \frac{3}{49}$ หรือ $a_3 = a_2 r = \left(-\frac{3}{7\sqrt{7}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = \frac{3}{49}$

$a_4 = a_3 r = \frac{3}{49} \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = \frac{3}{49\sqrt{7}}$ หรือ $a_4 = a_3 r = \frac{3}{49} \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = -\frac{3}{49\sqrt{7}}$

$a_6 = a_5 r = \frac{3}{343} \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = \frac{3}{343\sqrt{7}}$ หรือ $a_6 = a_5 r = \frac{3}{343} \left(-\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = -\frac{3}{343\sqrt{7}}$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{3}{7\sqrt{7}}, \frac{3}{49}, \frac{3}{49\sqrt{7}}$ และ $\frac{3}{343\sqrt{7}}$ ตามลำดับ

หรือ $-\frac{3}{7\sqrt{7}}, \frac{3}{49}, -\frac{3}{49\sqrt{7}}$ และ $-\frac{3}{343\sqrt{7}}$ ตามลำดับ

4) จาก $a_3 = 1$ และ $a_6 = \frac{8}{27}$ จะได้

$$1 = a_1 r^{3-1} \quad \text{----- (1)}$$

$$\frac{8}{27} = a_1 r^{6-1} \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $r^3 = \frac{8}{27}$ นั่นคือ $r = \frac{2}{3}$

จาก (1) จะได้ $a_1 = \frac{9}{4}$

นั่นคือ $a_2 = a_1 r = \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{3}{2}$

$$a_4 = a_3 r = 1 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$a_5 = a_4 r = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{9}$$

$$a_7 = a_6 r = \frac{8}{27} \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{16}{81}$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}$ และ $\frac{16}{81}$ ตามลำดับ

11. 1) ให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 5 และ 20 จะได้ 5, a , 20 เป็นลำดับเรขาคณิต

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ} \quad \frac{a}{5} &= \frac{20}{a} \\ a^2 &= 100\end{aligned}$$

จะได้ $a=10$ หรือ $a=-10$

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ระหว่าง 5 และ 20 คือ 10 หรือ -10

- 2) ให้ a เป็นพจน์ที่อยู่ระหว่าง 8 และ 12 จะได้ 8, a , 12 เป็นลำดับเรขาคณิต

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ} \quad \frac{a}{8} &= \frac{12}{a} \\ a^2 &= 96\end{aligned}$$

จะได้ $a=4\sqrt{6}$ หรือ $a=-4\sqrt{6}$

ดังนั้น พจน์ที่อยู่ระหว่าง 8 และ 12 คือ $4\sqrt{6}$ หรือ $-4\sqrt{6}$

12. จากสามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต คือ $a+3, a+20, a+105$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{a+20}{a+3} &= \frac{a+105}{a+20} \\ (a+20)(a+20) &= (a+3)(a+105) \\ a^2 + 40a + 400 &= a^2 + 108a + 315 \\ 68a &= 85 \\ a &= \frac{85}{68}\end{aligned}$$

จะได้สามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{17}{4}, \frac{85}{4}$ และ $\frac{425}{4}$

$$\text{นั่นคือ } a_1 = \frac{17}{4} \text{ และ } r = \frac{\frac{85}{4}}{\frac{17}{4}} = 5$$

จะได้ พจน์ทั่วไป คือ

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= \frac{17}{4} (5)^{n-1}\end{aligned}$$

ดังนั้น $a = \frac{5}{4}$ และ พจน์ทั่วไป คือ $a_n = \frac{17}{4} (5)^{n-1}$

13. ใน พ.ศ. 2550 ประชากรในอำเภอหนึ่งมี 60,000 คน

เนื่องจากประชากรในเมืองนี้เพิ่มขึ้นปีละ 2% จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\text{เมื่อครบ 1 ปี} \quad \text{จะมีประชากร} &= 60,000 + 60,000(0.02) \\ &= 60,000(1 + 0.02) \\ &= 60,000(1.02) \text{ คน}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อครบ 2 ปี} \quad \text{จะมีประชากร} &= 60,000(1.02) + 60,000(1.02)(0.02) \\ &= 60,000(1.02)(1 + 0.02) \\ &= 60,000(1.02)(1.02) \\ &= 60,000(1.02)^2 \text{ คน}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า จำนวนประชากรในแต่ละปี เมื่อเขียนเรียงลำดับ จะเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี 1.02 เป็นอัตราส่วนร่วม ดังนี้ $60000, 60000(1.02), 60000(1.02)^2, \dots$

โดยที่ $a_1 = 60,000$ และ $r = 1.02$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= 60,000(1.02)^{n-1}\end{aligned}$$

ใน พ.ศ. 2565 จะได้ $n = 16$

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ} \quad a_{16} &= 60,000(1.02)^{16-1} \\ &= 60,000(1.02)^{15} \\ &\approx 80,752\end{aligned}$$

ดังนั้น สูตรทั่วไปของจำนวนประชากรในแต่ละปี คือ $60,000(1.02)^{n-1}$ และจำนวนประชากรใน พ.ศ. 2565 มีประมาณ 80,752 คน

14. ถ้าเริ่มต้นลูกบอลสูงจากพื้น 2 เมตร

เมื่อลูกบอลกระทบพื้นครั้งที่ 1 แล้ว

$$\text{จะกระดอนขึ้นสูง} = 2 - 2(0.08) = 2(1 - 0.08) = 2(0.92) \text{ เมตร}$$

เมื่อลูกบอลกระทบพื้นครั้งที่ 2 แล้ว

$$\begin{aligned}\text{จะกระดอนขึ้นสูง} &2(0.92) - 2(0.92)(0.08) \\ &= 2(0.92)(1 - 0.08) \\ &= 2(0.92)^2 \text{ เมตร}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า ความสูงของลูกบอลจากพื้น เมื่อเขียนเรียงเป็นลำดับ จะเป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี 0.92 เป็นอัตราส่วนร่วม ดังนี้ $2(0.92), 2(0.92)^2, \dots$

โดยที่ $a_1 = 2(0.92)$ และ $r = 0.92$

พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= 2(0.92)(0.92)^{n-1} \\ &= 2(0.92)^n \end{aligned}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงความสูงของลูกบอล คือ $f(n) = 2(0.92)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนครั้งที่ลูกบอลกระทบพื้น

แบบฝึกหัด 3.2.1

1. 1) จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad S_4 &= \frac{4}{2}(2(3) + (4-1)(2)) \\ &= 24 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 4 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 24

2) จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad S_7 &= \frac{7}{2}(2(5) + (7-1)(4)) \\ &= 119 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 119

3) จาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad S_9 &= \frac{9}{2}(2(-3) + (9-1)(5)) \\ &= 153 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 9 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 153

$$4) \text{ จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{11} &= \frac{11}{2}(2(-7) + (11-1)(3)) \\ &= 88 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 11 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 88

$$5) \text{ จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{14} &= \frac{14}{2}(2(-5) + (14-1)(-2)) \\ &= -252 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 14 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ -252

2. 1) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 5$ และ $d = 2$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{50} &= \frac{50}{2}(2(5) + (50-1)(2)) \\ &= 2,700 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 50 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 2,700

- 2) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 0$ และ $d = 2$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{30} &= \frac{30}{2}(2(0) + (30-1)(2)) \\ &= 870 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 30 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 870

- 3) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = -2$ และ $d = 5$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{60} &= \frac{60}{2}(2(-2) + (60-1)(5)) \\ &= 8,730 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 60 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 8,730

- 4) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 5$ และ $d = -3$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{75} &= \frac{75}{2}(2(5) + (75-1)(-3)) \\ &= -7,950\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 75 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ $-7,950$

- 5) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = \frac{1}{2}$ และ $d = \frac{1}{2}$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{50} &= \frac{50}{2}\left(2\left(\frac{1}{2}\right) + (50-1)\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1,275}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 50 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ $\frac{1,275}{2}$

3. 1) จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 6$, $d = 3$ และ $a_n = 99$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } 99 &= 6 + (n-1)(3) \\ 99 &= 6 + 3n - 3 \\ n &= 32\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{32} &= \frac{32}{2}(6 + 99) \\ &= 1,680\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกทั้ง 32 พจน์ของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 1,680

- 2) จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = -7$, $d = -3$ และ $a_n = -109$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } -109 &= -7 + (n-1)(-3) \\ -109 &= -7 - 3n + 3 \\ n &= 35\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{35} &= \frac{35}{2}(-7 + (-109)) \\ &= -2,030\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกทั้ง 35 พจน์ของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ $-2,030$

3) จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = -7$, $d = 3$ และ $a_n = 131$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } 131 &= -7 + (n-1)(3) \\ 131 &= -7 + 3n - 3 \\ n &= 47\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{47} &= \frac{47}{2}(-7 + 131) \\ &= 2,914\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกทั้ง 47 พจน์ของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ $2,914$

4. ให้ $a_1 = 6$, $d = 4$ และ $a_n = 26$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } 26 &= 6 + (n-1)(4) \\ 26 &= 6 + 4n - 4 \\ n &= 6\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_6 &= \frac{6}{2}(6 + 26) \\ &= 96\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกทั้ง 6 พจน์ของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 96

5. ลำดับของจำนวนคี่บวก 100 จำนวนแรก คือ ลำดับเลขคณิต $1, 3, 5, 7, \dots$ ที่มี

$$a_1 = 1, d = 2 \text{ และ } n = 100$$

ให้ S_{100} แทนผลบวกของจำนวนคี่บวก 100 จำนวนแรก

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{100} &= \frac{100}{2}(2(1) + (100-1)(2)) \\ &= 10,000\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคี่บวก 100 จำนวนแรก คือ 10,000

6. ลำดับของจำนวนเต็มบวกยี่สิบจำนวนแรกที่เป็นพหุคูณของ 3 คือ ลำดับเลขคณิต 3, 6, 9, 12, ... ที่มี $a_1 = 3$, $d = 3$ และ $n = 20$

ให้ S_{20} แทนผลบวกของจำนวนเต็มบวกยี่สิบจำนวนแรกที่เป็นพหุคูณของ 3

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{20} &= \frac{20}{2}(2(3) + (20-1)(3)) \\ &= 630\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนเต็มบวกยี่สิบจำนวนแรกที่เป็นพหุคูณของ 3 คือ 630

7. เนื่องจาก $17 + 19 + 21 + \dots + 379$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1 = 17$, $d = 2$ และ $a_n = 379$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } 379 &= 17 + (n-1)(2) \\ 379 &= 17 + 2n - 2 \\ n &= 182\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{182} &= \frac{182}{2}(17 + 379) \\ &= 36,036\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคี่ตั้งแต่ 17 ถึง 379 คือ 36,036

8. ให้ $a_{10} = 20$ และ $a_5 = 10$

$$\text{จะได้ } 20 = a_1 + (10-1)d \quad \text{----- (1)}$$

$$10 = a_1 + (5-1)d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 2$ และ $a_1 = 2$

ผลบวกของพจน์ที่ 8 ถึงพจน์ที่ 15 คือ $S_{15} - S_7$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_7 &= \frac{7}{2}(2(2) + (7-1)(2)) \\ &= 56\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } S_{15} &= \frac{15}{2}(2(2) + (15-1)(2)) \\ &= 240\end{aligned}$$

นั่นคือ $S_{15} - S_7 = 240 - 56 = 184$

ดังนั้น ผลบวกของพจน์ที่ 8 ถึงพจน์ที่ 15 ของอนุกรมเลขคณิตนี้ คือ 184

9. ลำดับของจำนวนเงินออมในแต่ละวัน คือ ลำดับเลขคณิต 1, 2, 3, ... ที่มี $a_1 = 1$, $d = 1$ และ $n = 30$

ให้ S_n แทนจำนวนเงินออมทั้งหมดในเวลา 30 วัน

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{30} &= \frac{30}{2}(2(1) + (30-1)(1)) \\ &= 465\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าหักออมจนครบ 30 วัน หักทิมจะมีเงินออมทั้งหมด 465 บาท

10. เนื่องจากจัดวางไม้ชั้นที่ 2 ให้แนวกึ่งกลางของไม้แต่ละแผ่นในชั้นนี้อยู่ตรงกับรอยต่อของไม้แต่ละคู่ในชั้นแรก

จะได้ ชั้นที่ 2 มีไม้ 29 แผ่น

ถ้าทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ว่า จำนวนแผ่นไม้ที่อยู่ชั้นบนจะน้อยกว่าจำนวนแผ่นไม้ที่อยู่ชั้นล่างในลำดับติดกันอยู่ 1 แผ่น นั่นคือ ลำดับของจำนวนแผ่นไม้ในแต่ละชั้น คือ ลำดับเลขคณิต 30, 29, 28, ..., 5 ที่มี $a_1 = 30$, $d = -1$ และ $a_n = 5$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } 5 &= 30 + (n-1)(-1) \\ 5 &= 30 - n + 1 \\ n &= 26\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{26} &= \frac{26}{2}(30 + 5) \\ &= 455\end{aligned}$$

ดังนั้น กองไม้นี้มี 26 ชั้น และมีจำนวนแผ่นไม้ทั้งหมด 455 แผ่น

แบบฝึกหัด 3.2.2

1. 1) จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_4 &= \frac{3(1-2^4)}{1-2} \\ &= \frac{3(2^4-1)}{2-1} \\ &= 45\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 4 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 45

2) จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_7 &= \frac{5(1-4^7)}{1-4} \\ &= \frac{5(4^7-1)}{4-1} \\ &= \frac{5}{3}(4^7-1)\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{5}{3}(4^7-1)$

3) จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_9 &= \frac{(-3)(1-5^9)}{1-5} \\ &= \frac{(-3)(5^9-1)}{5-1} \\ &= -\frac{3}{4}(5^9-1)\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 9 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $-\frac{3}{4}(5^9-1)$

$$4) \text{ จาก } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{11} &= \frac{(-7)(1-3^{11})}{1-3} \\ &= \frac{(-7)(3^{11}-1)}{3-1} \\ &= -\frac{7}{2}(3^{11}-1) \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 11 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $-\frac{7}{2}(3^{11}-1)$

$$5) \text{ จาก } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{14} &= \frac{(-5)(1-(-2)^{14})}{1-(-2)} \\ &= \frac{5}{3}(2^{14}-1) \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 14 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{5}{3}(2^{14}-1)$

2. 1) อนุกรมเรขาคณิตที่กำหนดให้มี $a_1 = 2$ และ $r = 3$

$$\begin{aligned} \text{แทน } n \text{ ด้วย 9 ใน } S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ จะได้} \\ S_9 &= \frac{2(1-3^9)}{1-3} \\ &= \frac{2(3^9-1)}{3-1} \\ &= 3^9-1 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 9 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 3^9-1

- 2) อนุกรมเรขาคณิตที่กำหนดให้มี $a_1 = 9$ และ $r = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย 8 ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ จะได้}$$

$$\begin{aligned}
 S_8 &= \frac{9\left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^8\right)}{1 - \frac{4}{3}} \\
 &= \frac{9\left(\left(\frac{4}{3}\right)^8 - 1\right)}{\frac{4}{3} - 1} \\
 &= \frac{9\left(\left(\frac{4}{3}\right)^8 - 1\right)}{\frac{1}{3}} \\
 &= 27\left(\left(\frac{4}{3}\right)^8 - 1\right)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $27\left(\left(\frac{4}{3}\right)^8 - 1\right)$

- 3) อนุกรมเรขาคณิตที่กำหนดให้มี $a_1 = \frac{2}{3}$ และ $r = \frac{2}{3}$

แทน n ด้วย 10 ใน $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ จะได้

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= \frac{\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{2}{3}} \\
 &= 2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $2\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)$

3. 1) อนุกรมที่กำหนดให้ มี $a_1 = 9$, $r = 3$ และ $a_n = 729$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } 729 = 9(3^{n-1})$$

$$81 = 3^{n-1}$$

$$3^4 = 3^{n-1}$$

$$\text{นั่นคือ } n-1 = 4$$

$$n = 5$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย 5 ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ จะได้}$$

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{9(1-3^5)}{1-3} \\ &= \frac{9(3^5-1)}{3-1} \\ &= \frac{9}{2}(243-1) \\ &= 1,089 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 1,089

- 2) อนุกรมที่กำหนดให้ มี $a_1 = 4$, $r = \frac{1}{2}$ และ $a_n = \frac{1}{512}$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } \frac{1}{512} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{2^{11}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{นั่นคือ } n-1 = 11$$

$$n = 12$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย 12 ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \text{ จะได้}$$

$$S_{12} = \frac{4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right)$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ $8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right)$

- 3) อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 1$, $r = -2$ และ $a_n = 256$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $256 = 1(-2)^{n-1}$

$$(-2)^8 = (-2)^{n-1}$$

นั่นคือ $n-1 = 8$

$$n = 9$$

แทน n ด้วย 9 ใน $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ จะได้

$$S_9 = \frac{1(1-(-2)^9)}{1-(-2)}$$

$$= \frac{1}{3}(1+512)$$

$$= 171$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตนี้ คือ 171

4. จำนวนเงินที่มังกรตั้งใจจะออมในแต่ละวัน เขียนเป็นลำดับเรขาคณิต ดังนี้ 1, 2, 4, 8, ...

จากลำดับเรขาคณิตที่ได้มี $a_1 = 1$ และ $r = 2$

หาจำนวนเงินทั้งหมดที่มังกรออมไว้ 15 วัน ได้ โดยแทน n ด้วย 15 ใน $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ $S_{15} = \frac{1(1-2^{15})}{1-2}$

$$= \frac{1(2^{15}-1)}{2-1}$$

$$\begin{aligned} S_{15} &= 2^{15} - 1 \\ &= 32,767 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อครบ 15 วัน มังกรจะมีเงินออมทั้งหมด 32,767 บาท

$$\begin{aligned} 5. \text{ เมื่อครบไตรมาสที่ 2 เขาจะทำยอดขายได้ } & 300,000 + 300,000(0.03) \\ &= 300,000(1 + 0.03) \\ &= 300,000(1.03) \text{ บาท} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อครบไตรมาสที่ 3 เขาจะทำยอดขายได้ } & 300,000(1.03) + 300,000(1.03)(0.03) \\ &= 300,000(1.03)(1 + 0.03) \\ &= 300,000(1.03)^2 \text{ บาท} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ยอดขายที่ผู้จัดการคนนี้ตั้งใจที่จะทำในทุกๆ ไตรมาส เป็นลำดับเรขาคณิต $300000, 300000(1.03), 300000(1.03)^2, \dots$ ที่มี $a_1 = 300,000$ และ $r = 1.03$

จากพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_n &= 300,000(1.03)^{n-1} \\ &= 300,000(1.03)^{n-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $a_n = 300,000(1.03)^{n-1}$

1) ในที่นี้ $n=9$ จะได้

$$\begin{aligned} a_9 &= 300,000(1.03)^8 \\ &\approx 380,031.02 \end{aligned}$$

ดังนั้น ไตรมาสแรกของปีที่ 3 เขาควรจะทำยอดขายได้ประมาณ 380,031.02 บาท

2) หาจำนวนยอดขายรวมเมื่อครบสองปี โดยการแทน n ด้วย 8 ใน

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \\ \text{จะได้ } S_8 &= \frac{300000(1-1.03^8)}{1-1.03} \\ &= \frac{300000(1.03^8 - 1)}{1.03 - 1} \\ &\approx 2,667,700.81 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อครบสองปี เขาควรจะทำยอดขายรวมจากวันที่เขาวางแผนได้ประมาณ 2,667,700.81 บาท

6. วิธีที่ 1 เริ่มต้นถังใบหนึ่งมีน้ำ 5,832 ลิตร

$$\begin{aligned}\text{เมื่อครบวันที่ 1 จะเหลือน้ำในถัง } & 5,832 - \frac{1}{3}(5,832) \\ &= 5,832 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= 5,832 \left(\frac{2}{3}\right) \text{ ลิตร}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อครบวันที่ 2 จะเหลือน้ำในถัง } & (5,832) \left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}(5,832) \left(\frac{2}{3}\right) \\ &= (5,832) \left(\frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= (5,832) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ ลิตร}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{เมื่อครบวันที่ 3 จะเหลือน้ำในถัง } & (5,832) \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}(5,832) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= (5,832) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= (5,832) \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ ลิตร}\end{aligned}$$

พิจารณาลำดับ $5832\left(\frac{2}{3}\right), 5832\left(\frac{2}{3}\right)^2, 5832\left(\frac{2}{3}\right)^3, \dots$ พบว่า ลำดับดังกล่าว

เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 5,832\left(\frac{2}{3}\right)$ และ $r = \frac{2}{3}$

แทน n ด้วย 6 ใน $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_6 &= 5,832 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{6-1} \\ &= 5,832 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \\ &= 512\end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อครบ 6 วัน จะมีน้ำเหลืออยู่ในถัง 512 ลิตร

วิธีที่ 2 พิจารณาลำดับ $\frac{1}{3}(5832), \frac{1}{3}(5832)\left(\frac{2}{3}\right), \frac{1}{3}(5832)\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ซึ่งแทนน้ำที่ใช้ไป
เมื่อครบวันที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี
 $a_1 = \frac{1}{3}(5,832)$ และ $r = \frac{2}{3}$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย 6 ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_6 = \frac{\frac{1}{3}(5,832)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)}{1-\frac{2}{3}} = 5,320$$

นั่นคือ เมื่อครบ 6 วัน ใช้น้ำไปทั้งหมด 5,320 ลิตร

ดังนั้น เมื่อครบ 6 วัน จะมีน้ำเหลืออยู่ในถัง $5,832 - 5,320 = 512$ ลิตร

7. เมื่อครบ 1 ปี รถยนต์คันนี้จะมีมูลค่าลดลง $\frac{20}{100}(1,000,000) = 200,000$ บาท

นั่นคือ มูลค่ารถยนต์จะเหลือ 800,000 บาท

เมื่อครบ 2 ปี รถยนต์คันนี้จะมีมูลค่าลดลง $\frac{20}{100}(800,000) = 160,000$ บาท

นั่นคือ มูลค่ารถยนต์จะเหลือ 640,000 บาท

เมื่อครบ 3 ปี รถยนต์คันนี้จะมีมูลค่าลดลง $\frac{20}{100}(640,000) = 128,000$ บาท

นั่นคือ มูลค่ารถยนต์จะเหลือ 512,000 บาท

จะเห็นว่า มูลค่ารถยนต์ที่ลดลงในปีที่ 1, 2, 3, ... เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 200,000$

$$\text{และ } r = \frac{4}{5}$$

นั่นคือ มูลค่ารถยนต์ที่ลดลงเมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี คือ S_5

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย 5 ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_5 = \frac{200,000\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^5\right)}{1-\frac{4}{5}} = 672,320$$

ดังนั้น เมื่อครบห้าปีรถยนต์คันนี้จะมีมูลค่า $1,000,000 - 672,320 = 327,680$ บาท

แบบฝึกหัด 3.3

1. 1) ในที่นี้ $P = 100000, k = 1, n = 10$ และ $r = 0.04$
 จะได้จำนวนเงินรวม คือ $100,000(1+0.04)^{10}$ หรือประมาณ 148,024.43 บาท
 ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 10 ปี จะมีเงินรวมประมาณ 148,024.43 บาท
 2) ให้จำนวนเงินรวมเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่าของเงินต้น จะได้

$$300,000 = 100,000(1+0.04)^n$$

$$(1.04)^n = 3$$
 เนื่องจาก $(1.04)^{28} \approx 2.9987$ และ $(1.04)^{29} \approx 3.1187$
 จะได้ว่า ต้องฝากครบ 29 ปี จะทำให้มีเงินเพิ่มขึ้นเป็นอย่างน้อยสามเท่าของเงินต้น
2. 1) ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ครั้งสุดท้ายครั้งเดียว
 จะได้ จำนวนเงินในบัญชี เมื่อครบปีที่ n คือ

$$100,000 + \frac{3}{100}(100,000)n = 100,000 + 3,000n \text{ บาท}$$
 2) ถ้าธนาคารนำดอกเบี้ยเข้าบัญชีเงินฝากทุก ๆ ปี
 จะได้ จำนวนเงินบัญชีเมื่อครบปีที่ n คือ $100,000(1+0.03)^n = 100,000(1.03)^n$ บาท
3. ในที่นี้ $P = 100000, k = 4, n = 10$ และ $r = 0.04$
 จะได้จำนวนเงินรวม คือ $100,000\left(1 + \frac{0.04}{4}\right)^{40}$ หรือประมาณ 148,886.37 บาท
 ดังนั้น เมื่อฝากครบ 10 ปี จะมีเงินรวมประมาณ 148,886.37 บาท
4. ในที่นี้ $P = 100000, k = 1$ และ $n = 10$ และมีเงินรวม 141,060 บาท จะได้

$$100,000(1+r)^{10} = 141,060$$

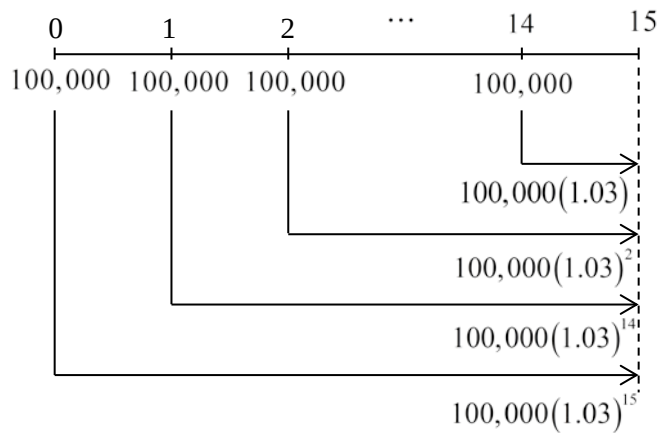
$$(1+r)^{10} = 1.4106$$

$$1+r = \sqrt[10]{1.4106}$$

$$r = \sqrt[10]{1.4106} - 1$$

$$r \approx 0.035$$
 ดังนั้น ธนาคารแห่งนี้ให้อัตราดอกเบี้ยประมาณ 3.5% ต่อปี

5.



เมื่อฝากเงินครบ 15 ปี

เงินฝากในครั้งแรกจะมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $100,000(1.03)^{15}$ บาท

เงินฝากในครั้งที่สองจะมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $100,000(1.03)^{14}$ บาท

เงินฝากในครั้งที่สามจะมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $100,000(1.03)^{13}$ บาท

⋮

และเงินฝากในครั้งสุดท้าย จะมีมูลค่าในอนาคตเท่ากับ $100,000(1.03)$ บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 15 จะได้รับเงินรวม

$100,000(1.03)^{15} + 100,000(1.03)^{14} + 100,000(1.03)^{13} + \cdots + 100,000(1.03)$ หรือ

$100,000(1.03) + 100,000(1.03)^2 + \cdots + 100,000(1.03)^{15}$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 15 พจน์ พจน์แรก คือ $100,000(1.03)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.03

จะได้ เงินรวม คือ $\frac{100,000(1.03)[1 - (1.03)^{15}]}{1 - 1.03}$ หรือประมาณ 1,915,688.13 บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 15 ปี จะมีเงินรวมประมาณ 1,915,688.13 บาท

6. 1) ในที่นี้ $S = 1000000$, $r = 0.04$, $n = 20$ และ $k = 1$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม 1,000,000 บาท คือ

$$P = 1000000(1 + 0.04)^{-20}$$

$$= 456,386.95 \text{ บาท}$$

ดังนั้น ราษฎร์ต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อย 456,386.95 บาท

2) ให้ P เป็นเงินฝาก

เมื่อครบ 1 ปี จะมีเงินรวม $P + P(0.04) = P(1.04)$ บาท

และฝากเงินเพิ่มอีก 2,000 บาท นั่นคือ จะมีเงินรวม $2,000 + P(1.04)$ บาท

เมื่อครบ 2 ปี จะมีเงินรวม $2,000 + P(1.04) + (2,000 + P(1.04))(0.04)$

$$= 2,000(1.04) + P(1.04)^2$$

และฝากเงินเพิ่มอีก 2,000 บาท นั่นคือ จะมีเงินรวม $2,000 + 2,000(1.04) + P(1.04)^2$ บาท

เมื่อครบ 3 ปี จะมีเงินรวม

$$2,000 + 2,000(1.04) + P(1.04)^2 + (2,000 + 2,000(1.04) + P(1.04)^2)(0.04)$$

$$= 2,000(1.04) + 2,000(1.04)^2 + P(1.04)^3 \text{ บาท}$$

นั่นคือ เมื่อสิ้นปีที่ 20 จะมีเงินรวม

$$2,000(1.04) + 2,000(1.04)^2 + \dots + 2,000(1.04)^{19} + P(1.04)^{20} \text{ บาท}$$

พิจารณอนุกรม $2,000(1.04) + 2,000(1.04)^2 + \dots + 2,000(1.04)^{19}$ ซึ่งเป็นอนุกรม

เรขาคณิตที่มี 19 พจน์ พจน์แรก คือ $2,000(1.04)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.04

จะได้ ผลบวกของอนุกรมนี้ เท่ากับ $\frac{2,000(1.04)(1 - (1.04)^{19})}{1 - 1.04}$

นั่นคือ เมื่อสิ้นปีที่ 20 มีเงินรวม $\frac{2,000(1.04)(1 - (1.04)^{19})}{1 - 1.04} + P(1.04)^{20}$ บาท

จะได้ $1,000,000 = \frac{2,000(1.04)(1 - (1.04)^{19})}{1 - 1.04} + P(1.04)^{20}$

$$P = 430,119.07 \text{ บาท}$$

ดังนั้น รัตติต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อย 430,119.07 บาท

7. เนื่องจากอนันต์มีกำหนดชำระหนี้ 2 งวด ดังนั้น จะต้องหามูลค่าปัจจุบันของเงินแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน

งวดที่ 1 ในที่นี้ $S = 12682.42$, $k = 4$, $n = 3$ และ $r = 0.08$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงิน 12,682.42 บาท คือ

$$12,682.42 \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{-12} \text{ หรือประมาณ } 10,000 \text{ บาท}$$

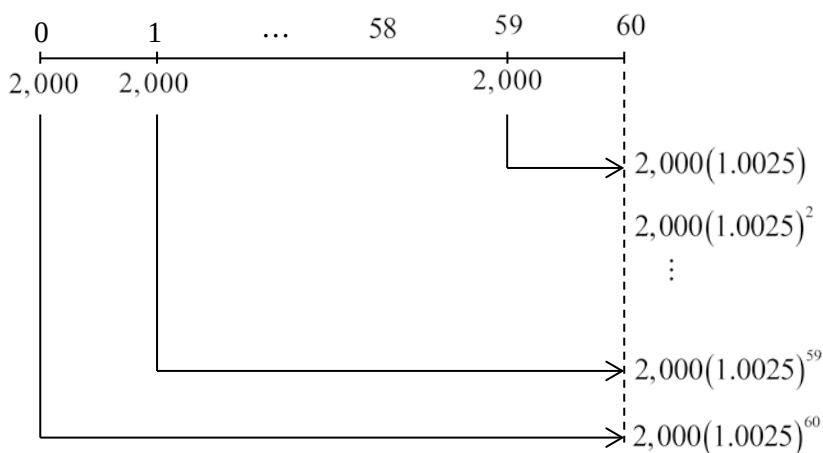
งวดที่ 2 ในที่นี้ $S = 26115.36$, $k = 4$, $n = 7$ และ $r = 0.08$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงิน 26,115.36 บาท คือ

$$26,115.36 \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{-28} \text{ หรือประมาณ } 15,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น อนันต์กู้เงินจากวิเชียรประมาณ $10,000 + 15,000 = 25,000$ บาท

8.



สุตาฝากเงินตอนต้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 5 ปี

ในที่นี้ $R = 2000$, $i = \frac{3}{12} = 0.25$, $n = 60$ และ $r = \frac{0.25}{100} = 0.0025$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 5 เงินรวมของสุตา คือ

$$2,000(1.0025) + 2,000(1.0025)^2 + \dots + 2,000(1.0025)^{60}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 60 พจน์ พจน์แรก คือ $2,000(1.0025)$

และอัตราส่วนร่วม คือ 1.0025

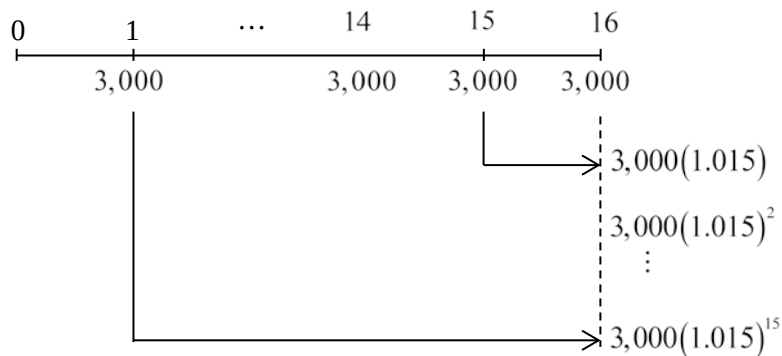
จะได้ เงินรวม คือ

$$\frac{2,000(1.0025)(1 - (1.0025)^{60})}{1 - 1.0025} = \frac{2,000(1.0025)((1.0025)^{60} - 1)}{1.0025 - 1} \text{ หรือ}$$

ประมาณ 129,616.66 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 5 สุตาจะได้เงินรวมประมาณ 129,616.66 บาท

9.



ทอแสงฝากเงินตอนสิ้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 4 ปี

ในที่นี้ $R = 3000$, $i = \frac{6}{4} = 1.5$, $n = 16$ และ $r = \frac{1.5}{100} = 0.015$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 4 เงินรวมของทอแสง คือ

$$3,000 + 3,000(1.015) + 3,000(1.015)^2 + \cdots + 3,000(1.015)^{15}$$

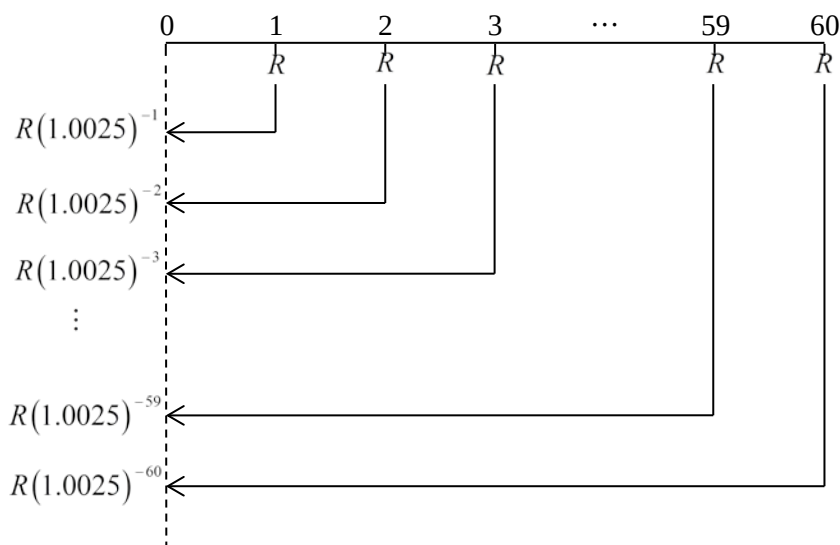
ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 16 พจน์ พจน์แรก คือ 3,000 และอัตราส่วนร่วม 1.015

จะได้ เงินรวม คือ $\frac{3,000(1 - (1.015)^{16})}{1 - 1.015} = \frac{3,000((1.015)^{16} - 1)}{1.015 - 1}$ หรือ

ประมาณ 53,797.11 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 4 ทอแสงจะได้เงินรวมประมาณ 53,797.11 บาท

10.



ให้ R แทนค่างวดที่ไ้เบเตยต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

ในที่นี้ $i = \frac{3}{12} = 0.25$ และ $r = \frac{0.25}{100} = 0.0025$

เนื่องจากไ้เบเตยจ่ายเงินดวรน้ 200,000 บาท ทำให้เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 500,000 บาท โดยไ้เบเตยจะผ่อนชำระทุกเดือนเป็นเวลา 60 เดือน จะต้องหามูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน

เนื่องจาก มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1, 2, ..., 60 คือ

$$R(1.0025)^{-1}, R(1.0025)^{-2}, \dots, R(1.0025)^{-60}$$

ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด คือ

$$R(1.0025)^{-1} + R(1.0025)^{-2} + \dots + R(1.0025)^{-60}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 60 พจน์ พจน์แรก คือ $R(1.0025)^{-1}$ และอัตราส่วนร่วมคือ $(1.0025)^{-1}$

จะได้ ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งหกสิบงวด คือ $\frac{R(1.0025)^{-1}(1 - (1.0025)^{-60})}{1 - (1.0025)^{-1}}$

เนื่องจากไ้เบเตยเหลือเงินที่ต้องชำระอีก 500,000 บาท จะได้ว่า

$$500,000 = \frac{R(1.0025)^{-1}(1-(1.0025)^{-60})}{1-(1.0025)^{-1}}$$

$$R = \frac{500,000(1-(1.0025)^{-1})}{(1.0025)^{-1}(1-(1.0025)^{-60})}$$

$$\approx 8,984.35$$

ดังนั้น ใบเตยจะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 8,984.35 บาท

11. วังระฝากเงินตอนต้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 4 ปี

ในที่นี้ $R=10000$, $i=\frac{3.6}{12}=0.3$, $n=48$ และ $r=\frac{0.3}{100}=0.003$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 4 เงินรวมของวังระ คือ

$$10,000(1.003)+10,000(1.003)^2+\cdots+10,000(1.003)^{48}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 48 พจน์ พจน์แรก คือ $10,000(1.003)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.003

จะได้ เงินรวม คือ
$$\frac{10,000(1.003)(1-(1.003)^{48})}{1-1.003} = \frac{10,000(1.003)((1.003)^{48}-1)}{1.003-1}$$

หรือประมาณ 516,996.95 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 4 วังระจะได้เงินรวมประมาณ 516,996.95 บาท

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. 1) จาก $a_1=-4$ และ $d=-5$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_8 &= -4+(8-1)(-5) \\ &= -4-35 \\ &= -39\end{aligned}$$

- 2) จาก $a_1=-5$ และ $d=2$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_9 &= -5+(9-1)(2) \\ &= -5+16 \\ &= 11\end{aligned}$$

3) จาก $a_1 = -\frac{1}{2}$ และ $d = -2$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_{15} &= -\frac{1}{2} + (15-1)(-2) \\ &= -\frac{1}{2} - 28 \\ &= -\frac{57}{2}\end{aligned}$$

4) จาก $a_1 = \frac{4}{3}$ และ $d = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_{15} &= \frac{4}{3} + (15-1)\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} \\ &= 6\end{aligned}$$

2. 1) จากลำดับ $-2, 4, 10, \dots$

จะได้ $d = 4 - (-2) = 6$ และ $a_1 = -2$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_n &= -2 + (n-1)(6) \\ &= -2 + 6n - 6 \\ &= 6n - 8\end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $6n - 8$

2) จากลำดับ $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \dots$

จะได้ $d = \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ และ $a_1 = -\frac{1}{6}$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_n &= -\frac{1}{6} + (n-1)\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}n - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $\frac{1}{3}n - \frac{1}{2}$

- 3) จากลำดับ $11, \frac{27}{2}, 16, \dots$

จะได้ $d = \frac{27}{2} - 11 = \frac{5}{2}$ และ $a_1 = 11$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad a_n &= 11 + (n-1)\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= 11 + \frac{5}{2}n - \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{2}n + \frac{17}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $\frac{5}{2}n + \frac{17}{2}$

- 4) จากลำดับ $19.74, 22.54, 25.34, \dots$

จะได้ $d = 22.54 - 19.74 = 2.8$ และ $a_1 = 19.74$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad a_n &= 19.74 + (n-1)(2.8) \\ &= 19.74 + 2.8n - 2.8 \\ &= 2.8n + 16.94 \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $2.8n + 16.94$

- 5) จากลำดับ $x, x+2, x+4, \dots$

จะได้ $d = (x+2) - x = 2$ และ $a_1 = x$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad a_n &= x + (n-1)(2) \\ &= x + 2n - 2 \\ &= 2n + x - 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $2n + x - 2$

6) จากลำดับ $3a + 2b, 2a + 4b, a + 6b, \dots$

จะได้ $d = (2a + 4b) - (3a + 2b) = -a + 2b$ และ $a_1 = 3a + 2b$

เนื่องจากพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_n &= 3a + 2b + (n-1)(-a + 2b) \\ &= 3a + 2b + (-a + 2b)n + a - 2b \\ &= 4a + (-a + 2b)n\end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $4a + (-a + 2b)n$

3. จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\text{จะได้ } 5 = a_1 + (7-1)d \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{และ } 10 = a_1 + (12-1)d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = 1$ และ $a_1 = -1$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } a_{100} &= -1 + (100-1)(1) \\ &= -1 + 99 \\ &= 98\end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ 100 ของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 98

4. จาก $p, 5p, 6p+9$ เป็นสามพจน์ในลำดับเลขคณิต จะได้ว่า

$$5p - p = (6p+9) - 5p$$

$$4p = p + 9$$

$$p = 3$$

นั่นคือ สามพจน์นี้ คือ 3, 15, 27 ซึ่งมี $d = 12$

และถ้าให้ 3, 15 และ 27 เป็นสามพจน์แรกของลำดับนี้

จะได้สี่พจน์ถัดไป คือ

$$a_4 = a_3 + d = 27 + 12 = 39$$

$$a_5 = a_4 + d = 39 + 12 = 51$$

$$a_6 = a_5 + d = 51 + 12 = 63$$

$$a_7 = a_6 + d = 63 + 12 = 75$$

ดังนั้น $p = 3$ และสี่พจน์ถัดไปของลำดับนี้คือ 39, 51, 63 และ 75

5. จากสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ 20, 16 และ 12

จะได้ $a_1 = 20$ และ $d = 16 - 20 = -4$

จากพจน์ที่ n ของลำดับเลขคณิต คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $-96 = 20 + (n-1)(-4)$

$$-96 = 20 - 4n + 4$$

$$4n = 120$$

$$n = 30$$

ดังนั้น -96 เป็นพจน์ที่ 30 ของลำดับนี้

6. ให้ $a_1 = 5$ และ $a_7 = 29$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $29 = 5 + (7-1)d$

นั่นคือ $29 = 5 + 6d$

$$d = 4$$

ดังนั้น a, b, c, d และ e คือ 9, 13, 17, 21 และ 25 ตามลำดับ

7. วิธีที่ 1 ให้ $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d$ เป็นสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต

จะได้ $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 12$

$$3a_1 + 3d = 12$$

$$a_1 + d = 4 \quad \text{----- (1)}$$

และ $a_1^3 + (a_1 + d)^3 + (a_1 + 2d)^3 = 408$

จาก (1) จะได้ $(4-d)^3 + 4^3 + (4+d)^3 = 408$

$$(64 - 3(4^2)d + 3(4)d^2 - d^3) + 4^3 + (64 + 3(4^2)d + 3(4)d^2 + d^3) = 408$$

$$64 + 12d^2 + 64 + 64 + 12d^2 = 408$$

$$24d^2 = 216$$

$$d^2 = 9$$

นั่นคือ $d = 3$ และ $d = -3$

จาก (1) ถ้า $d = 3$ จะได้ $a_1 = 1$

จะได้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ $a_n = 1 + (n-1)(3) = 3n - 2$

ถ้า $d = -3$ จะได้ $a_1 = 7$

จะได้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ $a_n = 7 + (n-1)(-3) = -3n + 10$

- วิธีที่ 2 ให้ $a-d, a, a+d$ เป็นสามพจน์แรกของลำดับเลขคณิต

$$\text{จะได้} \quad (a-d) + a + (a+d) = 12$$

$$3a = 12$$

$$a = 4$$

$$\text{และ} \quad (a-d)^3 + a^3 + (a+d)^3 = 408$$

$$\text{นั่นคือ} \quad (4-d)^3 + 4^3 + (4+d)^3 = 408$$

$$(64 - 3(4^2)d + 3(4)d^2 - d^3) + 4^3 + (64 + 3(4^2)d + 3(4)d^2 + d^3) = 408$$

$$64 + 12d^2 + 64 + 64 + 12d^2 = 408$$

$$24d^2 = 216$$

$$d^2 = 9$$

$$\text{นั่นคือ} \quad d = 3 \text{ และ } d = -3$$

$$\text{ถ้า } d = 3 \text{ จะได้ } a_1 = a - d = 4 - 3 = 1$$

$$\text{จะได้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ } a_n = 1 + (n-1)(3) = 3n - 2$$

$$\text{ถ้า } d = -3 \text{ จะได้ } a_1 = a - d = 4 - (-3) = 7$$

$$\text{จะได้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ } a_n = 7 + (n-1)(-3) = -3n + 10$$

8. เนื่องจากจำนวนแผ่นไม้ที่อยู่ชั้นบนจะน้อยกว่าจำนวนแผ่นไม้ที่อยู่ชั้นล่างในลำดับติดกันอยู่ 1 แผ่น นั่นคือ ลำดับของจำนวนแผ่นไม้ในแต่ละชั้น คือ ลำดับเลขคณิต

$$52, 51, 50, \dots, 7 \text{ ที่มี } a_1 = 52, a_n = 7 \text{ และ } d = -1$$

$$\text{จะได้} \quad 7 = 52 + (n-1)(-1)$$

$$7 = 52 - n + 1$$

$$n = 46$$

นั่นคือ กองไม้กองนี้มี 46 ชั้น

ดังนั้น กองไม้สูง $46 \times 3 = 138$ เซนติเมตร หรือ 1.38 เมตร

9. 1) จากลำดับเรขาคณิต $-3, -6, -12, \dots$

$$\text{จะได้} \quad a_1 = -3 \text{ และ } r = \frac{-6}{-3} = 2$$

จากพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้

$$a_n = -3(2)^{n-1}$$

$$= -\frac{3}{2}(2^n)$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $-\frac{3}{2}(2^n)$

- 2) จากลำดับเรขาคณิต $10, -5, \frac{5}{2}, \dots$

จะได้ $a_1 = 10$ และ $r = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$

จากพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ $a_n = 10 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $10 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

- 3) จากลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{25}{4}, \dots$

จะได้ $a_1 = \frac{1}{4}$ และ $r = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 5$

จากพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ $a_n = \frac{1}{4}(5^{n-1})$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{1}{4}(5^{n-1})$

- 4) จากลำดับเรขาคณิต $\frac{5}{6}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \dots$

จะได้ $a_1 = \frac{5}{6}$ และ $r = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{6}} = 2$

จากพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ $a_n = \frac{5}{6}(2^{n-1})$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{5}{6}(2^{n-1})$

- 5) จากลำดับเรขาคณิต $-\frac{2}{9}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{32}, \dots$

จะได้ $a_1 = -\frac{2}{9}$ และ $r = \frac{\frac{1}{12}}{-\frac{2}{9}} = -\frac{3}{8}$

จากพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ $a_n = -\frac{2}{9} \left(-\frac{3}{8}\right)^{n-1}$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $-\frac{2}{9}\left(-\frac{3}{8}\right)^{n-1}$

6) จากลำดับเรขาคณิต $ab^3, a^2b^2, a^3b, \dots$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

$$\text{จะได้ } a_1 = ab^3 \text{ และ } r = \frac{a^2b^2}{ab^3} = \frac{a}{b}$$

$$\text{จากพจน์ที่ } n \text{ ของลำดับเรขาคณิต คือ } a_n = a_1 r^{n-1} \text{ จะได้ } a_n = ab^3 \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} = a^n b^{4-n}$$

ดังนั้น พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $a^n b^{4-n}$

10. จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จากลำดับเรขาคณิต $-162, 54, -18, 6, \dots$

$$\text{จะได้ } a_1 = -162 \text{ และ } r = \frac{54}{-162} = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_{12} &= -162 \left(-\frac{1}{3}\right)^{12-1} \\ &= -162 \left(-\frac{1}{3}\right)^{11} \\ &= \frac{2}{2,187} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ 12 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{2}{2,187}$

11. จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จากลำดับเรขาคณิต $1, \frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^3}{8}, \dots$ เมื่อ $a \neq 0$

$$\text{จะได้ } a_1 = 1 \text{ และ } r = \frac{\frac{a}{2}}{1} = \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_{10} &= 1 \left(\frac{a}{2}\right)^{10-1} \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^9 \\ &= \frac{a^9}{512} \end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{a^9}{512}$

12. วิธีที่ 1 จาก $a_2 = \frac{8}{3}$

จะได้ $\frac{8}{3} = a_1 r^{2-1}$ ----- (1)

และจาก $a_5 = \frac{64}{81}$

จะได้ $\frac{64}{81} = a_1 r^{5-1}$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\frac{8}{27} = r^3$$

$$r = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{2}{3}$

วิธีที่ 2 จาก $a_5 = a_1 r^4$

$$= (a_1 r) r^3$$

$$= a_2 r^3$$

จะได้ $\frac{64}{81} = \left(\frac{8}{3}\right) r^3$

นั่นคือ $r^3 = \frac{8}{27}$

$$r = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตนี้ คือ $\frac{2}{3}$

13. จากลำดับเรขาคณิต 7, -21, 63, -189, ...

จะได้ $a_1 = 7$ และ $r = \frac{-21}{7} = -3$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้

$$5,103 = 7(-3)^{n-1}$$

$$729 = (-3)^{n-1}$$

$$(-3)^6 = (-3)^{n-1}$$

นั่นคือ

$$n-1 = 6$$

$$n = 7$$

ดังนั้น 5,103 เป็นพจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิตนี้

14. 1) จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $-1,215 = -15r^{5-1}$

$$r^4 = 81$$

นั่นคือ $r=3$ และ $r=-3$

ดังนั้น เมื่ออัตราส่วนร่วมเป็น 3 จะได้ a, b และ c คือ $-45, -135$ และ -405 ตามลำดับ

และเมื่ออัตราส่วนร่วมเป็น -3 จะได้ a, b และ c คือ $45, -135$ และ 405 ตามลำดับ

2) จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\frac{27}{64} = \frac{4}{3} r^{5-1}$

$$r^4 = \frac{81}{256}$$

นั่นคือ $r = \frac{3}{4}$ และ $r = -\frac{3}{4}$

ดังนั้น เมื่ออัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{3}{4}$ จะได้ a, b และ c คือ $1, \frac{3}{4}$ และ $\frac{9}{16}$ ตามลำดับ

และเมื่ออัตราส่วนร่วมเป็น $-\frac{3}{4}$ จะได้ a, b และ c คือ $-1, \frac{3}{4}$ และ $-\frac{9}{16}$ ตามลำดับ

15. ให้ a เป็นจำนวนที่ต้องการ

จะได้ $5+a, 22+a$ และ $107+a$ เป็นลำดับเรขาคณิต

นั่นคือ $\frac{22+a}{5+a} = \frac{107+a}{22+a}$

$$(22+a)(22+a) = (107+a)(5+a)$$

$$484 + 44a + a^2 = 535 + 112a + a^2$$

$$68a = -51$$

$$a = -\frac{51}{68}$$

ดังนั้น จำนวนที่ต้องการ คือ $-\frac{51}{68}$

16. วิธีที่ 1 ให้ $a_1, a_1 r$ และ $a_1 r^2$ เป็นสามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต

$$\text{จะได้ว่า } a_1 + a_1r + a_1r^2 = -3 \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{และ } (a_1)(a_1r)(a_1r^2) = 8 \quad \text{----- (2)}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก (2) จะได้ } a_1^3 r^3 &= 8 \\ a_1 r &= 2 \end{aligned}$$

จาก (1) จะได้

$$a_1 + 2 + a_1r^2 = -3$$

$$a_1 + a_1r^2 = -5$$

$$\frac{2}{r} + \left(\frac{2}{r}\right)r^2 = -5$$

$$2 + 2r^2 = -5r$$

$$2r^2 + 5r + 2 = 0$$

$$(2r+1)(r+2) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } r = -\frac{1}{2} \text{ หรือ } r = -2$$

ถ้า $r = -\frac{1}{2}$ จะได้ $a_1 = -4$ และพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ

$$\begin{aligned} a_n &= -4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} \end{aligned}$$

ถ้า $r = -2$ จะได้ $a_1 = -1$ และพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ

$$\begin{aligned} a_n &= -1(-2)^{n-1} \\ &= -(-2)^{n-1} \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ให้ $\frac{a}{r}, a, ar$ เป็นสามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต

$$\text{จะได้ว่า } \frac{a}{r} + a + ar = -3 \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{และ } \left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = 8 \quad \text{----- (2)}$$

$$\text{จาก (2) จะได้ } a^3 = 8$$

นั่นคือ $a = 2$

แทน a ด้วย 2 ใน (1) จะได้

$$\frac{2}{r} + 2 + 2r = -3$$

$$2 + 2r + 2r^2 = -3r$$

$$2r^2 + 5r + 2 = 0$$

$$(2r+1)(r+2) = 0$$

นั่นคือ $r = -\frac{1}{2}$ หรือ $r = -2$

ถ้า $r = -\frac{1}{2}$ จะได้ $a_1 = \frac{a}{r} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4$ และพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ

$$\begin{aligned} a_n &= -4 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ &= - \left(-\frac{1}{2} \right)^{-2} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ &= - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-3} \end{aligned}$$

ถ้า $r = -2$ จะได้ $a_1 = \frac{a}{r} = \frac{2}{-2} = -1$ และพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ คือ

$$\begin{aligned} a_n &= -1(-2)^{n-1} \\ &= -(-2)^{n-1} \end{aligned}$$

17. เนื่องจากปีที่เริ่มต้นการรณรงค์มีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว 100,000 ถุง

ในปีที่ 1 จำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วจะลดลง 5% จะมีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว

$$100,000 - \frac{5}{100}(100,000) = \frac{95}{100}(100,000) \text{ ถุง}$$

ในปีที่ 2 จำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วจะลดลง 5% จะมีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว

$$\frac{95}{100}(100,000) - \frac{5}{100} \left(\frac{95}{100}(100,000) \right) = \left(\frac{95}{100} \right)^2 (100,000) \text{ ถุง}$$

ในปีที่ 3 จำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วจะลดลง 5% จะมีจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว

$$\left(\frac{95}{100} \right)^2 (100,000) - \frac{5}{100} \left(\left(\frac{95}{100} \right)^2 (100,000) \right) = \left(\frac{95}{100} \right)^3 (100,000) \text{ ถุง}$$

จะเห็นว่าจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้ว ในปีที่ 1, 2, 3, ..., n คือลำดับเรขาคณิต

$$\frac{95}{100}(100000), \left(\frac{95}{100}\right)^2(100000), \left(\frac{95}{100}\right)^3(100000), \dots, a_n \text{ ที่มี } a_1 = \frac{95}{100}(100000)$$

$$\text{และ } r = \frac{95}{100}$$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

ให้ a_n แทนจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้ในปีที่ n

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_n &= \frac{95}{100}(100,000)\left(\frac{95}{100}\right)^{n-1} \\ &= (100,000)\left(\frac{95}{100}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{และ } a_{10} = (100,000)\left(\frac{95}{100}\right)^{10} \text{ หรือประมาณ } 59,873.69$$

ดังนั้น สูตรการคำนวณจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วในแต่ละปี คือ $a_n = (100,000)\left(\frac{95}{100}\right)^n$

และจำนวนถุงพลาสติกที่ใช้แล้วในปีที่ 10 มีประมาณ 59,874 ถุง

18. 1) เป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วมเป็น 2
- 2) เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น -1
- 3) เป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วมเป็น -2
- 4) เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{1}{3}$
- 5) ไม่เป็นทั้งลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

$$19. 1) \text{ เนื่องจาก } d = \frac{27}{2} - 11 = 16 - \frac{27}{2} = \frac{5}{2}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต ที่มี $a_1 = 11$ และ $d = \frac{5}{2}$

$$\text{จะได้ } a_4 = a_3 + d = 16 + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{37}{2} + \frac{5}{2} = 21$$

$$a_6 = a_5 + d = 21 + \frac{5}{2} = \frac{47}{2}$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{37}{2}$, 21 และ $\frac{47}{2}$ ตามลำดับ

เนื่องจาก $\frac{\frac{27}{11}}{\frac{2}{22}} = \frac{27}{22}$ และ $\frac{\frac{16}{27}}{\frac{2}{27}} = \frac{32}{27}$ ซึ่ง $\frac{27}{22} \neq \frac{32}{27}$

ดังนั้น ลำดับนี้ไม่เป็นลำดับเรขาคณิต

2) เนื่องจาก $\frac{11}{7} - \frac{7}{11} = \frac{72}{77}$

ถ้าลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต จะต้องได้ว่า $a_4 = \frac{265}{77}$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } a_4 &= \frac{7}{11} + (4-1)\left(\frac{72}{77}\right) \\ &= \frac{7}{11} + \frac{216}{77} \\ &= \frac{265}{77} \end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต ที่มี $a_1 = \frac{7}{11}$ และ $d = \frac{72}{77}$

จะได้ $a_3 = a_2 + d = \frac{11}{7} + \frac{72}{77} = \frac{193}{77}$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{265}{77} + \frac{72}{77} = \frac{337}{77}$$

$$a_6 = a_5 + d = \frac{337}{77} + \frac{72}{77} = \frac{409}{77}$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{193}{77}, \frac{337}{77}$ และ $\frac{409}{77}$ ตามลำดับ

ถ้าลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $r = \frac{\frac{11}{7}}{\frac{7}{11}} = \frac{121}{49}$ และ $a_4 = \frac{265}{77}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\text{จะได้ว่า } a_4 = \frac{7}{11} \left(\frac{121}{49}\right)^{4-1}$$

$$a_4 = \frac{7}{11} \left(\frac{11}{7}\right)^6$$

$$= \left(\frac{11}{7}\right)^5$$

นั่นคือ $a_4 \neq \frac{265}{77}$

ดังนั้น ลำดับนี้ไม่เป็นลำดับเรขาคณิต

3) เนื่องจาก $r = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 6$ และ $r = \frac{2}{3}$

$$\text{จะได้ } a_4 = a_3 r = \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{9}$$

$$a_5 = a_4 r = \left(\frac{16}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27}$$

$$a_6 = a_5 r = \left(\frac{32}{27}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{64}{81}$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{16}{9}$, $\frac{32}{27}$ และ $\frac{64}{81}$ ตามลำดับ

เนื่องจาก $4 - 6 = -2$ แต่ $\frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$

ดังนั้น ลำดับนี้ไม่เป็นลำดับเลขคณิต

4) เนื่องจาก $\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{6}} = -2$

ถ้าลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต จะต้องได้ว่า $a_4 = -\frac{20}{3}$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\text{จะได้ว่า } a_4 = \frac{5}{6}(-2)^{4-1}$$

$$= \frac{5}{6}(-8)$$

$$a_4 = -\frac{20}{3}$$

ดังนั้น ลำดับนี้เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี $a_1 = \frac{5}{6}$ และ $r = -2$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad a_3 &= a_2 r = -\frac{5}{3}(-2) = \frac{10}{3} \\ a_5 &= a_4 r = -\frac{20}{3}(-2) = \frac{40}{3} \\ a_6 &= a_5 r = \frac{40}{3}(-2) = -\frac{80}{3}\end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $\frac{10}{3}, \frac{40}{3}$ และ $-\frac{80}{3}$ ตามลำดับ

ถ้าลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต จะต้องได้ว่า $d = -\frac{5}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\text{และได้ว่า} \quad a_3 &= a_2 + d = -\frac{5}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{25}{6} \\ a_4 &= a_3 + d = -\frac{25}{6} - \frac{5}{2} = -\frac{20}{3} \\ a_5 &= a_4 + d = -\frac{20}{3} - \frac{5}{2} = -\frac{55}{6} \\ a_6 &= a_5 + d = -\frac{55}{6} - \frac{5}{2} = -\frac{35}{3}\end{aligned}$$

ดังนั้น พจน์ที่ขาดหายไป คือ $-\frac{25}{6}, -\frac{55}{6}$ และ $-\frac{35}{3}$ ตามลำดับ

20. ให้สามพจน์แรกของลำดับเลขคณิตเป็น $10, 10+d$ และ $10+2d$

และสามพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตเป็น $10, 10r$ และ $10r^2$

เนื่องจากสองลำดับนี้มีพจน์ที่สองเท่ากัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}10+d &= 10r \\ d &= 10r-10 \quad \text{----- (1)}\end{aligned}$$

และเนื่องจากพจน์ที่สามของลำดับเรขาคณิตมากกว่าพจน์ที่สามของลำดับเลขคณิตอยู่ 2.5

จะได้ว่า $10r^2 - (10+2d) = 2.5$

จาก (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}10r^2 - (10+2(10r-10)) &= 2.5 \\ 10r^2 - (10+20r-20) &= 2.5 \\ 10r^2 - 20r + 10 &= 2.5 \\ 10r^2 - 20r + \frac{15}{2} &= 0 \\ 4r^2 - 8r + 3 &= 0\end{aligned}$$

$$(2r-3)(2r-1) = 0$$

จะได้ว่า $r = \frac{3}{2}$ และ $r = \frac{1}{2}$

ถ้า $r = \frac{3}{2}$ จะได้ $d = 5$

พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $10 + (n-1)(5)$ หรือ $5n + 5$

พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ $10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

ถ้า $r = \frac{1}{2}$ จะได้ $d = -5$

พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $10 + (n-1)(-5)$ หรือ $-5n + 15$

พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ $10\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

21. 1) พิจารณาบริษัท A

เนื่องจากบริษัท A ให้เงินเดือนเริ่มต้น 20,000 บาท และแต่ละปีจะขึ้นเงินเดือน

ให้ 1,500 บาท จะได้ลำดับของเงินเดือน คือ 20000, 21500, 23000, ... ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิต ที่มี $a_1 = 20,000$ และ $d = 1,500$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} a_n &= 20,000 + (n-1)(1,500) \\ &= 1,500n + 18,500 \end{aligned}$$

พิจารณาบริษัท B

เนื่องจากบริษัท B ให้เงินเดือนเริ่มต้น 20,000 บาท และแต่ละปีจะขึ้นเงินเดือน

ให้ 5% จะได้ลำดับของเงินเดือน คือ 20000, 21000, 22050, ... ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 20,000$ และ $r = 1.05$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $a_n = 20,000(1.05)^{n-1}$

ดังนั้น ลำดับแทนเงินเดือนตำแหน่งเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของบริษัท A และบริษัท B คือ $1,500n + 18,500$ และ $20,000(1.05)^{n-1}$ ตามลำดับ

2) เงินเดือนในปีที่ 10 คือพจน์ที่ 10 ของลำดับ

ในบริษัท A จะได้
$$\begin{aligned} a_{10} &= 1,500(10) + 18,500 \\ &= 33,500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ในบริษัท B จะได้ } a_{10} &= 20,000(1.05)^{10-1} \\ &= 20,000(1.05)^9 \\ &\approx 31,026\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลต่างของเงินเดือนในปีที่ 10 ของเจ้าหน้าที่ฝ่ายทรัพยากรบุคคลของทั้งสองบริษัท ประมาณ $33,500 - 31,026 = 2,474$ บาท

22. จากอนุกรมเลขคณิต $19 + 23 + 27 + \dots + 999$

จะได้ $a_1 = 19, d = 4$ และ $a_n = 999$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } 999 &= 19 + (n-1)(4) \\ 999 &= 19 + 4n - 4 \\ n &= 246\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ } S_{246} &= \frac{246}{2}(19 + 999) \\ &= 125,214\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 19 + 23 + 27 + \dots + 999 = 125,214$$

23. 1) จากลำดับเลขคณิต $2, 6, 10, 14, \dots$

จะได้ $a_1 = 2$ และ $d = 4$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{40} &= \frac{40}{2}(2(2) + (40-1)(4)) \\ &= 3,200\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 40 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ 3,200

- 2) จากลำดับเลขคณิต $20, 17, 14, 11, \dots$

จะได้ $a_1 = 20$ และ $d = -3$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{70} &= \frac{70}{2}(2(20) + (70-1)(-3)) \\ &= -5,845\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 70 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ -5,845

3) จากลำดับเลขคณิต $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \dots$

$$\text{จะได้ } a_1 = -\frac{1}{3} \text{ และ } d = \frac{2}{3}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{100} &= \frac{100}{2} \left(2 \left(-\frac{1}{3} \right) + (100-1) \left(\frac{2}{3} \right) \right) \\ &= \frac{9,800}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 100 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ คือ $\frac{9,800}{3}$

24. ลำดับของจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว ตั้งแต่ 9 ถึง 357 คือ 14, 21, 28, ..., 357 ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิต ที่มี $a_1 = 14, d = 7$ และ $a_n = 357$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } 357 = 14 + (n-1)(7)$$

$$357 = 14 + 7n - 7$$

$$n = 50$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\text{จะได้ } S_{50} = \frac{50}{2}(14 + 357)$$

$$= 9,275$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนที่ 7 หารลงตัว ตั้งแต่ 9 ถึง 357 คือ 9,275

25. จาก $a_4 = 11$ และ $a_9 = -4$

$$\text{จะได้ } 11 = a_1 + (4-1)d \quad \text{----- (1)}$$

$$-4 = a_1 + (9-1)d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = -3$ และ $a_1 = 20$

$$\text{จาก } a_{12} + a_{13} + \dots + a_{25} = S_{25} - S_{11}$$

$$\text{และ } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{25} &= \frac{25}{2}(2(20) + (25-1)(-3)) \\ &= -400 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } S_{11} &= \frac{11}{2}(2(20) + (11-1)(-3)) \\ &= 55\end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } S_{25} - S_{11} = -400 - 55 = -455$$

ดังนั้น ผลบวกของพจน์ที่ 12 ถึงพจน์ที่ 25 คือ -455

26. จาก $a_4 = 20$ และ $a_9 = 10$

$$\text{จะได้ } 20 = a_1 + (4-1)d \quad \text{----- (1)}$$

$$10 = a_1 + (9-1)d \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $d = -2$ และ $a_1 = 26$

$$\text{จาก } a_7 + a_8 + \cdots + a_{17} = S_{17} - S_6$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{17} &= \frac{17}{2}(2(26) + (17-1)(-2)) \\ &= 170\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } S_6 &= \frac{6}{2}(2(26) + (6-1)(-2)) \\ &= 126\end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } S_{17} - S_6 = 170 - 126 = 44$$

ดังนั้น ผลบวกของพจน์ที่ 7 ถึงพจน์ที่ 17 คือ 44

27. ลำดับของเงินเดือนของยงยุทธในแต่ละปี คือ ลำดับเลขคณิต 17500, 18700, 19900, ...

$$\text{ที่มี } a_1 = 17500, d = 1200$$

ดังนั้น เงินเดือนของยงยุทธใน พ.ศ. 2590 คือ a_{31}

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_{31} &= 17,500 + (31-1)(1,200) \\ &= 53,500\end{aligned}$$

และเงินรวมทั้งหมดที่เขาได้รับ คือ $12(S_{31})$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } 12(S_{31}) &= 12\left(\frac{31}{2}(17,500 + 53,500)\right) \\ &= 13,206,000\end{aligned}$$

ดังนั้น เงินเดือนของยงยุทธใน พ.ศ. 2590 คือ 53,500 บาท และเงินรวมทั้งหมดที่เขา

ได้รับคือ 13,206,000 บาท

28. 1) ลำดับของจำนวนเก้าอี้แต่ละแถวในโรงละคร คือ ลำดับเลขคณิต 12, 14, 16, ...

ที่มี $a_1 = 12, d = 2$

ดังนั้น จำนวนเก้าอี้ทั้งหมดใน 20 แถว ของโรงละคร คือ S_{20}

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{20} &= \frac{20}{2}(2(12) + (20-1)(2)) \\ &= 620\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าต้องการจัดเก้าอี้ไว้ทั้งหมด 20 แถว จะมีเก้าอี้ทั้งหมด 620 ตัว

- 2) จากข้อ 1) ถ้าจัดเก้าอี้ 20 แถว จะมีเก้าอี้ทั้งหมด 620 ตัว แต่ต้องการจัดเก้าอี้เพียง 600 ตัว ดังนั้น จะพิจารณาว่า ถ้ามีเก้าอี้ 19 แถว จะมีเก้าอี้ทั้งหมด S_{19} ตัว

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{19} &= \frac{19}{2}(2(12) + (19-1)(2)) \\ &= 570\end{aligned}$$

นั่นคือ ต้องเพิ่มเก้าอี้ในแถวสุดท้ายอีก 30 ตัว จึงจะมีเก้าอี้ครบ 600 ตัว

ดังนั้น จะต้องจัดเก้าอี้ทั้งหมด 20 แถว และในแถวสุดท้ายมีเก้าอี้ 30 ตัว

29. 1) ระยะห่างในการนำลูกปิงปองจากจุดวางตะกร้าไปใส่ในขามใบที่ 1 เท่ากับ 5 เมตร
 2) ระยะห่างในการนำลูกปิงปองจากจุดวางตะกร้าไปใส่ในขามใบที่ 2 เท่ากับ $5 + 3 = 8$ เมตร
 3) ระยะห่างในการนำลูกปิงปองจากจุดวางตะกร้าไปใส่ในขามใบที่ 3 เท่ากับ $5 + 3 + 3 = 11$ เมตร
 4) เนื่องจากระยะห่างในการนำลูกปิงปองจากจุดวางตะกร้าไปใส่ในขามใบที่ 1, 2, 3, ... เป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 5$ และ $d = 3$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_n &= 5 + (n-1)(3) \\ a_n &= 5 + 3n - 3 \\ &= 3n + 2\end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะห่างในการนำลูกปิงปองจากจุดวางตะกร้าไปใส่ในขามใบที่ n เท่ากับ

$3n + 2$ เมตร

- 5) ให้การแข่งขันนี้มีขาม n ใบ

จากข้อ 4) จะได้ว่า $23 = 3n + 2$
 $n = 7$

ดังนั้น จำนวนขามทั้งหมด เท่ากับ 7 ใบ

- 6) 6.1) ถ้าผู้เข้าแข่งขันไม่ทำลูกปิงปองตกเลย
 จะได้ระยะทางจากจุดเริ่มต้นจนถึงสิ้นสุดการแข่งขัน คือ $2S_7$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_7 &= \frac{7}{2}(2(5) + (7-1)(3)) \\ &= 98\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าผู้เข้าแข่งขันไม่ทำลูกปิงปองตกเลย จะได้ ระยะทางจาก
 จุดเริ่มต้นจนถึงสิ้นสุดการแข่งขัน คือ $2(98) = 196$ เมตร

- 6.2) ถ้าผู้เข้าแข่งขันทำลูกปิงปองตกกระหว่างที่นำลูกปิงปองไปใส่ในขามใบที่ 4 โดย
 ทำตกห่างจากตะกร้า 3 เมตร จะได้ว่า ระยะทางที่เพิ่มขึ้นเป็น $3 + 3 = 6$ เมตร
 ดังนั้น ถ้าผู้เข้าแข่งขันทำลูกปิงปองตกกระหว่างที่นำลูกปิงปองไปใส่ใน
 ขามใบที่ 4 โดยทำตกห่างจากตะกร้า 3 เมตร จะได้ระยะทางทั้งหมด คือ
 $196 + 6 = 202$ เมตร

30. ปริมาตรของอิฐชั้นล่างสุดที่มีความสูงเท่ากับบันไดขั้นที่ 1 คือ

$$1 \times 0.25 \times (0.35 \times 15) = 1.3125 \text{ ลูกบาศก์เมตร}$$

ปริมาตรของอิฐชั้นที่สองที่มีความสูงเท่ากับบันไดขั้นที่ 2 คือ

$$1 \times 0.25 \times (0.35 \times 14) = 1.225 \text{ ลูกบาศก์เมตร}$$

ปริมาตรของอิฐชั้นที่สามที่มีความสูงเท่ากับบันไดขั้นที่ 3 คือ

$$1 \times 0.25 \times (0.35 \times 13) = 1.1375 \text{ ลูกบาศก์เมตร}$$

จะเห็นว่า ลำดับของปริมาตรอิฐที่ใช้สร้างบันไดนี้ คือ ลำดับเลขคณิต

$1.3125, 1.225, 1.1375, \dots, 0.0875$ ที่มี $a_1 = 1.3125, d = -0.0875$ และ $n = 15$

นั่นคือ ปริมาตรของอิฐที่ใช้สร้างบันไดนี้ คือ S_{15}

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{15} &= \frac{15}{2}(2(1.3125) + (15-1)(-0.0875)) \\ &= 10.5\end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของอิฐที่ใช้สร้างบันไดแห่งนี้ คือ 10.5 ลูกบาศก์เมตร

31. จากอนุกรมเรขาคณิต $6+18+54+\cdots+1,458$

จะได้ $a_1=6, r=3$ และ $a_n=1,458$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\text{จะได้ } 1,458 = 6(3)^{n-1}$$

$$243 = (3)^{n-1}$$

$$3^5 = (3)^{n-1}$$

$$\text{นั่นคือ } n-1 = 5$$

$$\text{จะได้ } n = 6$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 6 \text{ ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_6 = \frac{6(1-3^6)}{1-3}$$

$$= \frac{6(3^6-1)}{3-1}$$

$$= 2,184$$

$$\text{ดังนั้น } 6+18+54+\cdots+1,458=2,184$$

32. 1) จากลำดับเรขาคณิต $1, 4, 16, 64, \dots$

จะได้ $a_1=1$ และ $r=4$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 30 \text{ ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_{30} = \frac{1(1-4^{30})}{1-4}$$

$$= \frac{1(4^{30}-1)}{4-1}$$

$$= \frac{1}{3}(4^{30}-1)$$

2) จากลำดับเรขาคณิต $-\frac{3}{32}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \dots$

จะได้ $a_1 = -\frac{3}{32}$ และ $r = -2$

แทน n ด้วย 43 ใน $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้
$$S_{43} = \frac{-\frac{3}{32}(1-(-2)^{43})}{1-(-2)}$$

$$= \frac{(-2)^{43}-1}{32}$$

3) จากลำดับเรขาคณิต $\frac{27}{32}, \frac{9}{16}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \dots$

จะได้ $a_1 = \frac{27}{32}$ และ $r = \frac{2}{3}$

แทน n ด้วย 28 ใน $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้
$$S_{28} = \frac{\frac{27}{32}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{28}\right)}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{81}{32}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{28}\right)$$

33. จาก $-4 = a_1 r^{5-1}$ ----- (1)

และ $\frac{1}{2} = a_1 r^{8-1}$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $r = -\frac{1}{2}$ และ $a_1 = -64$

เนื่องจาก $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_9 = S_9 - S_1 = S_9 - a_1$

จาก
$$S_9 = \frac{-64\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= -\frac{171}{4}$$

จะได้ $S_9 - a_1 = -\frac{171}{4} - (-64) = \frac{85}{4}$

ดังนั้น ผลบวกของพจน์ที่ 2 ถึงพจน์ที่ 9 คือ $\frac{85}{4}$

34. จาก $6 = a_1 r^{3-1}$ ----- (1)

และ $24 = a_1 r^{7-1}$ ----- (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $r = \sqrt{2}$ หรือ $r = -\sqrt{2}$ และ $a_1 = 3$

1) เนื่องจาก $a_7 + a_8 + \dots + a_{17} = S_{17} - S_6$

ถ้า $r = \sqrt{2}$ จะได้ $S_{17} = \frac{3(1 - (\sqrt{2})^{17})}{1 - \sqrt{2}} = \frac{3((\sqrt{2})^{17} - 1)}{\sqrt{2} - 1}$

และ $S_6 = \frac{3(1 - (\sqrt{2})^6)}{1 - \sqrt{2}} = \frac{3((\sqrt{2})^6 - 1)}{\sqrt{2} - 1}$

จะได้ $S_{17} - S_6 = \frac{3((\sqrt{2})^{17} - 1)}{\sqrt{2} - 1} - \frac{3((\sqrt{2})^6 - 1)}{\sqrt{2} - 1}$
 $= \frac{3((\sqrt{2})^{17} - 1 - (8 - 1))}{\sqrt{2} - 1}$
 $= \frac{3((\sqrt{2})^{17} - 8)}{\sqrt{2} - 1}$

ถ้า $r = -\sqrt{2}$ จะได้ $S_{17} = \frac{3(1 - (-\sqrt{2})^{17})}{1 - (-\sqrt{2})} = \frac{3(1 + (\sqrt{2})^{17})}{1 + \sqrt{2}}$

และ $S_6 = \frac{3(1 - (-\sqrt{2})^6)}{1 - (-\sqrt{2})} = \frac{3(1 - (\sqrt{2})^6)}{1 + \sqrt{2}}$

จะได้ $S_{17} - S_6 = \frac{3(1 + (\sqrt{2})^{17})}{1 + \sqrt{2}} - \frac{3(1 - (\sqrt{2})^6)}{1 + \sqrt{2}}$
 $S_{17} - S_6 = \frac{3(1 + (\sqrt{2})^{17} - (1 - 8))}{1 + \sqrt{2}}$

$$= \frac{3\left((\sqrt{2})^{17} + 8\right)}{1 + \sqrt{2}}$$

ดังนั้น ถ้า $r = \sqrt{2}$ แล้ว ผลบวกของพจน์ที่ 7 ถึงพจน์ที่ 17 คือ $\frac{3\left((\sqrt{2})^{17} - 8\right)}{\sqrt{2} - 1}$

ถ้า $r = -\sqrt{2}$ แล้ว ผลบวกของพจน์ที่ 7 ถึงพจน์ที่ 17 คือ $\frac{3\left((\sqrt{2})^{17} + 8\right)}{1 + \sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} 2) \text{ จาก } a_3 a_4 \dots a_{26} &= (a_1 r^2)(a_1 r^3) \dots (a_1 r^{25}) \\ &= a_1^{24} (r^{2+3+\dots+25}) \\ &= a_1^{24} \left(r^{\frac{24}{2}(2+25)} \right) \\ &= a_1^{24} (r^{324}) \end{aligned}$$

ถ้า $r = \sqrt{2}$ จะได้

$$\begin{aligned} a_1^{24} (r^{324}) &= 3^{24} (\sqrt{2})^{324} \\ &= 2^{162} 3^{24} \end{aligned}$$

ถ้า $r = -\sqrt{2}$ จะได้

$$\begin{aligned} a_1^{24} (r^{324}) &= 3^{24} (-\sqrt{2})^{324} \\ &= 3^{24} (-1)^{324} (\sqrt{2})^{324} \\ &= 2^{162} 3^{24} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลคูณของพจน์ที่ 3 ถึง พจน์ที่ 26 คือ $2^{162} 3^{24}$

35. วิธีที่ 1

วันแรก วิทยาจะเหลือเงิน $6,561 - \frac{1}{3}(6,561) = 6,561 \left(\frac{2}{3}\right)$ บาท

วันที่สอง วิทยาจะเหลือเงิน $6,561 \left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} \left(6,561 \left(\frac{2}{3}\right)\right) = 6,561 \left(\frac{2}{3}\right)^2$ บาท

วันที่สาม วิทยาจะเหลือเงิน $6,561 \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(6,561 \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 6,561 \left(\frac{2}{3}\right)^3$ บาท

จะเห็นว่า ลำดับของจำนวนเงินที่เหลือในแต่ละวัน คือ ลำดับเรขาคณิต

$$6561\left(\frac{2}{3}\right), 6561\left(\frac{2}{3}\right)^2, 6561\left(\frac{2}{3}\right)^3, \dots, a_8 \text{ ที่มี } a_1 = 6,561\left(\frac{2}{3}\right) \text{ และ } r = \frac{2}{3}$$

นั่นคือ จำนวนเงินที่เหลือในวันที่ 8 คือ a_8

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } a_8 = 6,561\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{8-1} = 256$$

ดังนั้น เมื่อครบ 8 วัน วิทยาจะเหลือเงิน 256 บาท

วิธีที่ 2

ลำดับของจำนวนเงินที่วิทยาใช้ไปในแต่ละวัน คือ ลำดับเรขาคณิต

$$\frac{1}{3}(6,561), \frac{1}{3}\left((6,561)\left(\frac{2}{3}\right)\right), \frac{1}{3}\left((6,561)\left(\frac{2}{3}\right)^2\right), \dots \text{ ที่มี } a_1 = \frac{1}{3}(6,561) \text{ และ } r = \frac{2}{3}$$

นั่นคือ ผลรวมของจำนวนเงินที่วิทยาใช้ไปเมื่อครบ 8 วัน คือ S_8

$$\text{จาก } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_8 = \frac{\frac{1}{3}(6,561)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^8\right)}{1-\frac{2}{3}} = 6,305$$

นั่นคือ วิทยาใช้เงินไป 6,305 บาท

ดังนั้น เมื่อครบ 8 วัน วิทยาจะมีเงินเหลือ $6,561 - 6,305 = 256$ บาท

36. เงินเดือนของวิบูลย์ในแต่ละปี คือ $21000, (21000)(1.09), (21000)(1.09)^2, \dots, a_6$

เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 21000$ และ $r = 1.09$

นั่นคือ เงินเดือนของวิบูลย์ เมื่อขึ้นปีที่ 6 คือ a_6

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } a_6 = 21,000(1.09)^{6-1} \approx 32,311.10$$

และ เงินรวมที่วิบูลย์ได้รับ เมื่อทำงานครบ 15 ปี คือ $12 \times S_{15}$

$$\text{จาก } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_{15} = \frac{21,000(1-(1.09)^{15})}{1-1.09}$$

$$= \frac{21,000((1.09)^{15} - 1)}{1.09 - 1}$$

$$\approx 616,579.24$$

นั่นคือ เมื่อทำงานครบ 15 ปี วิบูลย์ได้รับเงินรวม $12 \times 616,579.24 = 7,398,950.88$ บาท
 ดังนั้น เมื่อขึ้นปีที่ 6 วิบูลย์ได้รับเงินเดือน 32,311.10 บาท และเมื่อทำงานครบ 15 ปี
 เงินรวมที่วิบูลย์ได้รับประมาณ 7,398,950.88 บาท

37. 1) ลำดับของจำนวนคู่ในการแข่งขันแต่ละรอบ คือ ลำดับเรขาคณิต $16, 8, 4, \dots, a_n$

ที่มี $a_1 = 16$ และ $r = \frac{1}{2}$

จะได้ $a_n = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 32\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ดังนั้น ในรอบที่ n มีผู้เข้าแข่งขัน $32\left(\frac{1}{2}\right)^n$ คู่

- 2) เนื่องจากรอบสุดท้ายที่จะได้ผู้ชนะ จะมีการแข่งขันเพียง 1 คู่
 นั่นคือ หา n ที่ทำให้ $a_n = 1$

จะได้ว่า $1 = 32\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

นั่นคือ $n = 5$

ดังนั้น รายการลูกทุ่งเสียงทองมีการแข่งขันทั้งหมด 5 รอบ

- 3) จำนวนคู่ในการแข่งขันทั้งหมด คือ S_5

จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ $S_5 = \frac{16\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 31$

ดังนั้น รายการลูกทุ่งเสียงทองมีการแข่งขันทั้งหมด 31 คู่

38. 1) เนื่องจากอัตราการลดลงของจำนวนแมลงสาบเป็น 17% ต่อวัน

ดังนั้น จำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในวันที่เริ่มโครงการ เท่ากับ $\frac{17}{100}(6,000) = 1,020$ ตัว

- 2) จำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่หลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 1 วัน เท่ากับ

$$6,000 - \frac{17}{100}(6,000) = 6,000\left(\frac{83}{100}\right) = 4,980 \text{ ตัว}$$

- 3) ลำดับของจำนวนแมลงสาบที่ถูกกำจัดในแต่ละวัน คือ ลำดับเรขาคณิต

$$6000\left(\frac{17}{100}\right), 6000\left(\frac{17}{100}\right)\left(\frac{83}{100}\right), 6000\left(\frac{17}{100}\right)\left(\frac{83}{100}\right)^2, \dots \text{ ที่มี } a_1 = 6000\left(\frac{17}{100}\right)$$

$$\text{และ } r = \frac{83}{100}$$

นั่นคือ จำนวนแมลงสาบทั้งหมดที่ถูกกำจัดหลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน คือ S_7

$$\text{จาก } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_7 = \frac{6,000\left(\frac{17}{100}\right)\left(1-\left(\frac{83}{100}\right)^7\right)}{1-\frac{83}{100}} \approx 4,372 \text{ ตัว}$$

ดังนั้น จำนวนแมลงสาบทั้งหมดที่ถูกกำจัดหลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน
ประมาณ 4,372 ตัว

- 4) **วิธีที่ 1** จากข้อ 3) จำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่หลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว
7 วัน ประมาณ $6,000 - 4,372 = 1,628$ ตัว

วิธีที่ 2 ลำดับของจำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่ คือ ลำดับเรขาคณิต

$$6000\left(\frac{83}{100}\right), 6000\left(\frac{83}{100}\right)^2, 6000\left(\frac{83}{100}\right)^3, \dots \text{ ที่มี } a_1 = 6000\left(\frac{83}{100}\right)$$

$$\text{และ } r = \frac{83}{100}$$

นั่นคือ จำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่หลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน คือ a_7

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } a_7 = 6,000\left(\frac{83}{100}\right)\left(\frac{83}{100}\right)^{7-1} \approx 1,628$$

ดังนั้น จำนวนแมลงสาบที่เหลืออยู่หลังจากดำเนินโครงการไปแล้ว 7 วัน
ประมาณ 1,628 ตัว

39. 1) พิจารณาจำนวนวันในการปฏิบัติภารกิจ 25 วัน

แบบที่ 1 จะเสียค่าตอบแทน $25 \times 50,000 = 1,250,000$ บาท

แบบที่ 2

ลำดับของจำนวนเงินที่ต้องจ่ายในแต่ละวันหน่วยเป็นสตางค์ คือ ลำดับเรขาคณิต

5, 10, 20, ... ที่มี $a_1 = 5$ และ $r = 2$

นั่นคือ จำนวนเงินที่ต้องจ่ายในการปฏิบัติภารกิจ 25 วัน คือ S_{25}

$$\text{จาก } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{25} &= \frac{5(1-2^{25})}{1-2} \\ &= \frac{5(2^{25}-1)}{2-1} \\ &= 167,772,155 \end{aligned}$$

นั่นคือ ต้องเสียเงิน 167,772,155 สตางค์ หรือ 1,677,721.55 บาท

จะเห็นว่า ถ้าจำนวนวันมากกว่า 25 วัน ค่าใช้จ่ายแบบที่ 2 จะมากกว่าแบบที่ 1 เสมอ

ดังนั้น เศรษฐีควรเลือกจ่ายค่าตอบแทนแบบที่ 1 จึงจะประหยัดเงินที่สุด

- 2) ถ้าใช้เวลาปฏิบัติภารกิจ 30 วัน

แบบที่ 1 จะเสียค่าตอบแทน $30 \times 50,000 = 1,500,000$ บาท

แบบที่ 2 จะเสียค่าตอบแทน $S_{30} = \frac{5(1-2^{30})}{1-2} = \frac{5(2^{30}-1)}{2-1}$ หรือเท่ากับ

5,368,709,115 สตางค์ หรือ 53,687,091.15 บาท

ดังนั้น ถ้าเลือกจ่ายค่าตอบแทนแบบที่ 1 จะประหยัดเงินกว่าการจ่ายค่าตอบแทน

แบบที่ 2 เป็นจำนวนเงิน 52,187,091.15 บาท

3) พิจารณาจำนวนวันในการปฏิบัติภารกิจ 24 วัน

แบบที่ 1 จะเสียค่าตอบแทน $24 \times 50,000 = 1,200,000$ บาท

แบบที่ 2 จะเสียค่าตอบแทน $S_{24} = \frac{5(1-2^{24})}{1-2} = \frac{5(2^{24}-1)}{2-1}$ หรือเท่ากับ

83,886,075 สตางค์ หรือ 838,860.75 บาท

ดังนั้น ถ้าใช้เวลาปฏิบัติภารกิจไม่ถึง 25 วัน การจ่ายค่าตอบแทนแบบที่ 1 จะไม่ประหยัดกว่าแบบที่ 2

40. 1) $2 + 8 + 32 + \dots + 8,192$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 2, r = 4$ และ $a_n = 8,192$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } 8,192 = 2(4)^{n-1}$$

$$4,096 = 4^{n-1}$$

$$4^6 = 4^{n-1}$$

$$\text{นั่นคือ } n-1 = 6$$

$$n = 7$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย 7 ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_7 = \frac{2(1-4^7)}{1-4}$$

$$= \frac{2(4^7-1)}{4-1}$$

$$= 10,922$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้ คือ 10,922

2) $7 + 14 + 21 + \dots + 98$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1 = 7, d = 7$ และ $a_n = 98$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } 98 = 7 + (n-1)(7)$$

$$98 = 7 + 7n - 7$$

$$n = 14$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย 14 ใน } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\text{จะได้ } S_{14} = \frac{14}{2}(7 + 98) = 735$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้ คือ 735

- 3) $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \cdots + 30$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$ และ $a_n = 30$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } 30 = \frac{1}{2} + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$30 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

$$n = 60$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 60 \text{ ใน } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{60} &= \frac{60}{2}\left(\frac{1}{2} + 30\right) \\ &= 915 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้ คือ 915

- 4) $16 + 8 + 4 + \cdots + \frac{1}{32}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}$ และ $a_n = \frac{1}{32}$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } \frac{1}{32} = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{512} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{นั่นคือ } n-1 = 9$$

$$n = 10$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 10 \text{ ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{10} &= \frac{16\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1,023}{32} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $\frac{1,023}{32}$

- 5) $(-1)+3+(-9)+\cdots+(-729)$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี $a_1 = -1, r = -3$ และ $a_n = -729$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{จะได้ } -729 = (-1)(-3)^{n-1}$$

$$729 = (-3)^{n-1}$$

$$(-3)^6 = (-3)^{n-1}$$

$$\text{นั่นคือ } n-1 = 6$$

$$n = 7$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 7 \text{ ใน } S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{จะได้ } S_7 = \frac{(-1)(1-(-3)^7)}{1-(-3)} = -547$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้ คือ -547

- 6) $-10-6-2+\cdots+90$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี $a_1 = -10, d = 4$ และ $a_n = 90$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ } 90 = -10 + (n-1)(4)$$

$$90 = -10 + 4n - 4$$

$$n = 26$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 26 \text{ ใน } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\text{จะได้ } S_{26} = \frac{26}{2}(-10 + 90) = 1,040$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้ คือ $1,040$

41. ในที่นี้ $P = 5000, k = 4, n = 3$ และ $r = \frac{1.5}{100} = 0.015$

จะได้จำนวนเงินรวม คือ $5,000\left(1 + \frac{0.015}{4}\right)^{12}$ หรือประมาณ 5,229.70 บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 3 ปี จะมีเงินในบัญชี 5,229.70 บาท

42. ในที่นี้ $P = 18600, k = 2, n = 15$ และ $r = \frac{4}{100} = 0.04$

จะได้จำนวนเงินรวม คือ $18,600 \left(1 + \frac{0.04}{2}\right)^{30}$ หรือประมาณ 33,691.33 บาท

ดังนั้น เมื่อฝากเงินครบ 15 ปี จะมีเงินในบัญชีประมาณ 33,691.33 บาท

43. พิจารณา ธนาคาร A

ในที่นี้ $P = 10000000, k = 12, n = 10$ และ $r = \frac{12}{100} = 0.12$

จะได้จำนวนเงินรวม คือ $10,000,000 \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{120}$ หรือประมาณ 33,003,868.95 บาท

พิจารณา ธนาคาร B

ในที่นี้ $P = 10000000, k = 1, n = 10$ และ $r = \frac{12.5}{100} = 0.125$

จะได้จำนวนเงินรวม คือ $10,000,000 (1 + 0.125)^{10}$ หรือประมาณ 32,473,210.25 บาท

ดังนั้น แม่ของสุทัศน์ควรเลือกฝากเงินกับธนาคาร A จึงจะได้เงินรวมมากที่สุด

และเมื่อสิ้นปีที่ 10 จะได้เงินรวมประมาณ 33,003,868.95 บาท

44. ในที่นี้ $P = 100000, k = 2$ และ $n = 10$ จะได้

$$148,595 = 100,000 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{20}$$

$$1.48595 = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{20}$$

นั่นคือ $1 + \frac{r}{2} = \sqrt[20]{1.48595}$

$$r = 2 \left(\sqrt[20]{1.48595} - 1 \right)$$

$$r \approx 0.04$$

ดังนั้น ธนาคารแห่งนี้กำหนดอัตราดอกเบี้ยประมาณ 4% ต่อปี

45. ต้นตระกูลจะต้องชำระดอกเบี้ยให้วิฑูรย์เป็นเงิน $5,000 \times 52 \times 2 = 520,000$ บาท

นั่นคือ เมื่อครบ 2 ปี ต้นตระกูลจะต้องจ่ายเงินให้วิฑูรย์ทั้งหมด 720,000 บาท

ในที่นี้ $P = 200000, k = 52$ และ $n = 2$ จะได้

$$720,000 = 200,000 \left(1 + \frac{r}{52}\right)^{104}$$

$$3.6 = \left(1 + \frac{r}{52}\right)^{104}$$

นั่นคือ

$$1 + \frac{r}{52} = \sqrt[104]{3.6}$$

$$r = 52(\sqrt[104]{3.6} - 1)$$

$$r \approx 1.82$$

ดังนั้น ดอกเบี้ยที่วิทวัสเรียกเก็บสามารถคิดเป็นอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 182 ซึ่งอัตราดอกเบี้ยดังกล่าวไม่เป็นไปตามที่กฎหมายกำหนด

46. ในที่นี้ $S = 250000, k = 1, n = 10$ และ $r = \frac{5}{100} = 0.05$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม 250,000 บาท คือ

$$P = 250,000(1 + 0.05)^{-10} \approx 153,478.31 \text{ บาท}$$

ดังนั้น วิชัยต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อย 153,479 บาท

47. ในที่นี้ $S = 122079.42, k = 4, n = 10$ และ $r = \frac{2}{100} = 0.02$

จะได้ มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม 122,079.42 บาท คือ

$$P = 122,079.42 \left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^{-40} \approx 100,000 \text{ บาท}$$

ดังนั้น วีระต้องฝากเงินไว้ประมาณ 100,000 บาท

48. ฝากเงินตอนต้นงวดทุกเดือนเป็นเงิน 1,000 บาท

ในที่นี้ $R = 1000, i = \frac{2.4}{12} = 0.2$ และ $r = \frac{0.2}{100} = 0.002$

ดังนั้น เงินรวมหลังจากการฝากครั้งที่ n คือ $1,000(1.002) + 1,000(1.002)^2 + \dots + 1,000(1.002)^n$

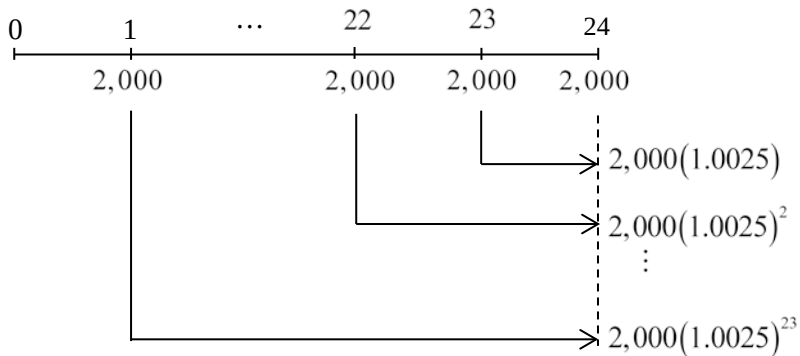
ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี n พจน์ พจน์แรกคือ $1,000(1.002)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.002

จะได้เงินรวม คือ $\frac{1,000(1.002)(1 - (1.002)^n)}{1 - 1.002}$ หรือ $501,000((1.002)^n - 1)$ บาท

ดังนั้น เงินรวมหลังจากฝากครั้งที่ n คือ $501,000((1.002)^n - 1)$ บาท

49. ฝากเงินตอนต้นงวดทุกเดือนทั้งหมด 24 ครั้ง

ในที่นี้ $R = 2000, i = \frac{3}{12} = 0.25, n = 24$ และ $r = \frac{0.25}{100} = 0.0025$



ดังนั้น เมื่อฝากครบ 24 ครั้ง เงินรวมของหมาก คือ

$2,000 + 2,000(1.0025) + 2,000(1.0025)^2 + \dots + 2,000(1.0025)^{23}$ ซึ่งเป็นอนุกรม

เรขาคณิตที่มี 24 พจน์ พจน์แรกคือ 2,000 และอัตราส่วนร่วม คือ 1.0025

จะได้ เงินรวม คือ $\frac{2,000(1 - (1.0025)^{24})}{1 - 1.0025}$ หรือประมาณ 49,405.64 บาท

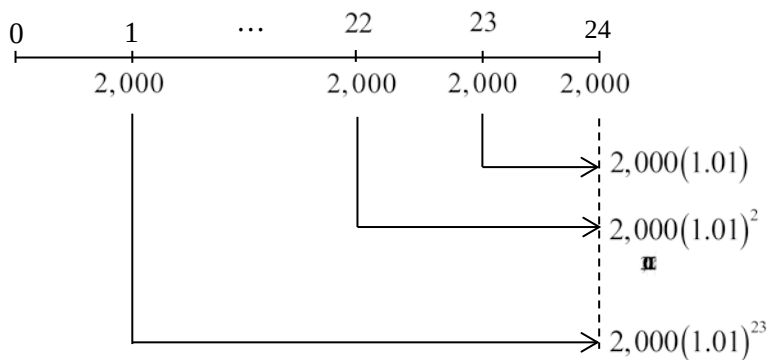
ดังนั้น เมื่อฝากครบ 24 ครั้ง หมากจะมีเงินรวมประมาณ 49,405.64 บาท

50. มะปรางฝากเงินตอนสิ้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

เนื่องจากมะปรางมีรายรับเดือนละ 20,000 บาท และจะออมเงินเดือนละ 10% ของรายรับ

จะได้ว่า มะปรางออมเงินเดือนละ $\frac{10}{100}(20,000) = 2,000$ บาท

ในที่นี้ $R = 2000$, $i = \frac{12}{12} = 1$, $n = 24$ และ $r = \frac{1}{100} = 0.01$



ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 2 ปี เงินออมของมะปราง คือ

$2,000 + 2,000(1.01) + 2,000(1.01)^2 + \dots + 2,000(1.01)^{23}$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ พจน์แรกคือ 2,000 และอัตราส่วนร่วม คือ 1.01

จะได้ เงินออม คือ $\frac{2,000(1 - (1.01)^{24})}{1 - 1.01}$ หรือประมาณ 53,946.93 บาท

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 2 ปี มะปรางจะมีเงินออมประมาณ 53,946.93 บาท

51. ขั้นแรก หาจำนวนเงินที่เหลือในบัญชีของส้มซ่าเมื่อฝากธนาคารครบ 1 ปี

เนื่องจากส้มซ่าได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 1.2 ต่อปี

นั่นคือ ส้มซ่าได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ $\frac{1.2}{12} = 0.1$ ต่อเดือน

ถ้าไม่มีการถอนเงินเลย เมื่อครบ 1 ปี ส้มซ่าจะมีเงินในบัญชีทั้งหมด $100,000(1.001)^{12}$ บาท แต่เมื่อต้นเดือนที่ 1 ส้มซ่าถอนเงินไป 5,000 บาท

ทำให้เมื่อครบ 1 ปี เงินก้อนนี้ที่ถอนไปจะทำให้เงินในบัญชีลดลง $5,000(1.001)^{12}$ บาท

เมื่อต้นเดือนที่ 2 ส้มซ่าถอนเงินไป 5,000 บาท

ทำให้เมื่อครบ 1 ปี เงินก้อนนี้ที่ถอนไปจะทำให้เงินในบัญชีลดลง $5,000(1.001)^{11}$ บาท

เมื่อต้นเดือนที่ 3 ส้มซ่าถอนเงินไป 5,000 บาท

ทำให้เมื่อครบ 1 ปี เงินก้อนนี้ที่ถอนไปจะทำให้เงินในบัญชีลดลง $5,000(1.001)^{10}$ บาท

เป็นเช่นนี้ทุกเดือน จนถึงเดือนที่ 12

นั่นคือ เมื่อครบ 1 ปี ส้มซ่าจะมีเงินเหลือในบัญชี

$$\begin{aligned} & 100,000(1.001)^{12} - (5,000(1.001)^{12} + 5,000(1.001)^{11} + \dots + 5,000(1.001)) \\ &= 100,000(1.001)^{12} - \frac{5,000(1.001)(1.001^{12} - 1)}{1.001 - 1} \\ &= 101,206.62 - 60,391.43 \\ &= 40,815.19 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ต่อไป คำนวณหาดอกเบี้ยที่ส้มซ่าได้รับจากธนาคารเมื่อฝากธนาคารครบ 1 ปี

เนื่องจากส้มซ่าถอนเงินออกจากบัญชีเดือนละ 5,000 บาท เป็นจำนวน 12 เดือน

นั่นคือ เมื่อครบ 1 ปี หากไม่นำดอกเบี้ยจากธนาคารมาคำนวณ ส้มซ่าจะเหลือเงิน

$$100,000 - 12(5,000) = 40,000$$

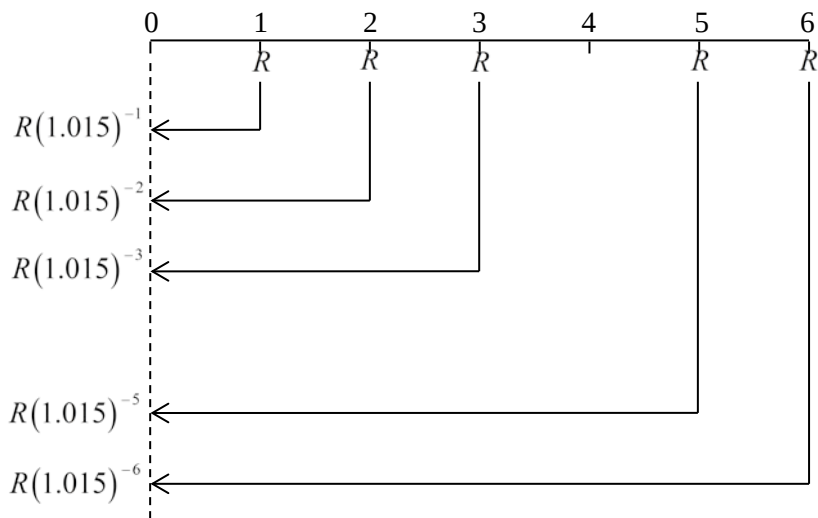
แต่เงินที่เหลือในบัญชีของส้มซ่าเมื่อครบ 1 ปีมีค่าเท่ากับ 40,815.19 บาท

ดังนั้น เมื่อครบ 1 ปี ส้มซ่าจะได้รับดอกเบี้ยจากบัญชีเงินฝากนี้ เท่ากับ

$$40,815.19 - 40,000 = 815.19 \text{ บาท}$$

52. ให้ R แทนค่างวดที่ยอดรักต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

ในที่นี้ $i = \frac{18}{12} = 1.5$ และ $r = 0.015$



ยอดรักจะต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 6 เดือน ดังนั้น จะต้องหามูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน

เนื่องจาก มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1, 2, ..., 6 คือ

$R(1.015)^{-1}, R(1.015)^{-2}, \dots, R(1.015)^{-6}$ ตามลำดับ

นั่นคือ ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งหมด คือ

$R(1.015)^{-1} + R(1.015)^{-2} + \dots + R(1.015)^{-6}$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 6 พจน์

พจน์แรก คือ $R(1.015)^{-1}$ และอัตราส่วนร่วม คือ $(1.015)^{-1}$

ดังนั้น ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งหมด คือ $\frac{R(1.015)^{-1}(1-(1.015)^{-6})}{1-(1.015)^{-1}}$

เนื่องจากยอดรักต้องผ่อนตู้เย็นราคา 30,000 บาท จะได้ว่า

$$30,000 = \frac{R(1.015)^{-1}(1-(1.015)^{-6})}{1-(1.015)^{-1}}$$

$$R = \frac{30,000(1-(1.015)^{-1})}{(1.015)^{-1}(1-(1.015)^{-6})}$$

$$R \approx 5,265.76$$

ดังนั้น ยอดรักจะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 5,265.76 บาท

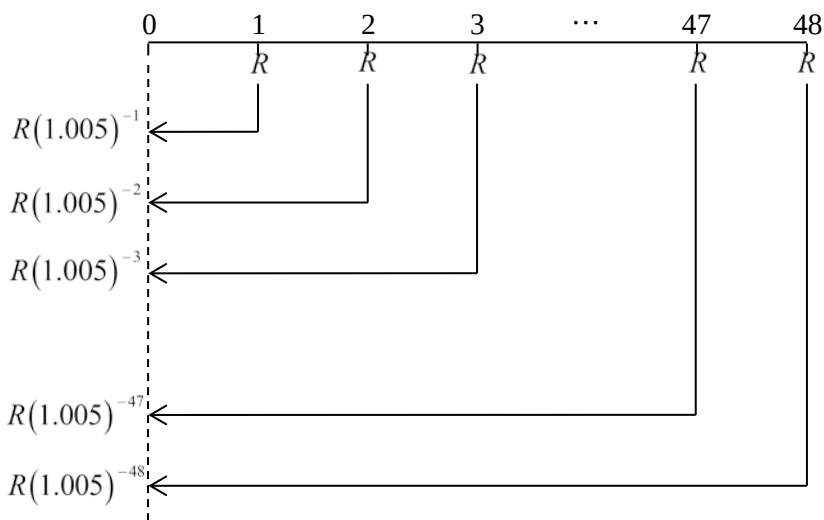
53. ให้ R แทนค่างวดที่น้องค์ต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

ในที่นี้ $i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = 0.005$

เนื่องจากน้องค์จ่ายเงินดาวน์ $\frac{15}{100}(600,000) = 90,000$ บาท ทำให้เหลือเงินที่ต้อง

ชำระอีก 510,000 บาท โดยน้องค์จะต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 4 ปี หรือ 48 เดือน

ดังนั้น จะต้องหามูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน



เนื่องจาก มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1, 2, ..., 48 คือ

$R(1.005)^{-1}, R(1.005)^{-2}, \dots, R(1.005)^{-48}$ ตามลำดับ

นั่นคือ ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้ง 48 งวด คือ

$R(1.005)^{-1} + R(1.005)^{-2} + \dots + R(1.005)^{-48}$ ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 48 พจน์

พจน์แรก คือ $R(1.005)^{-1}$ และอัตราส่วนร่วม คือ $(1.005)^{-1}$

ดังนั้น ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้ง 48 งวด คือ $\frac{R(1.005)^{-1}(1-(1.005)^{-48})}{1-(1.005)^{-1}}$

เนื่องจากน้องค์เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 510,000 บาท จะได้ว่า

$$510,000 = \frac{R(1.005)^{-1}(1-(1.005)^{-48})}{1-(1.005)^{-1}}$$

$$R = \frac{510,000(1 - (1.005)^{-1})}{(1.005)^{-1}(1 - (1.005)^{-48})}$$

$$R \approx 11,977.36$$

นั่นคือ อนาคตจะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 11,977.36 บาท

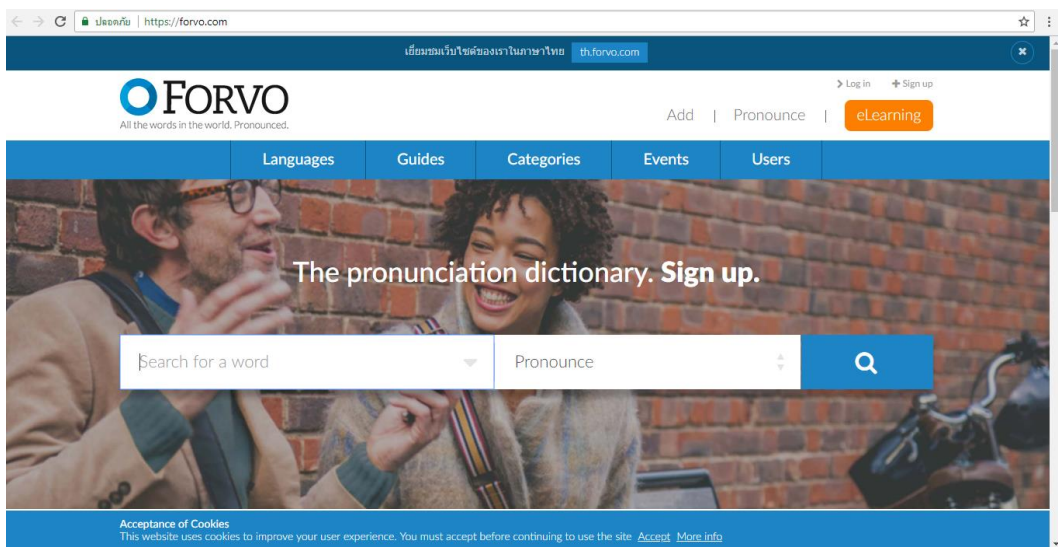
จะได้ว่า อนาคตจะผ่อนชำระทั้ง 48 งวด เป็นเงิน 574,913.28 บาท

นั่นคือ อนาคตเสียดอกเบี้ยทั้งหมด $574,913.28 - 510,000 = 64,913.28$ บาท

ดังนั้น อนาคตจะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 11,977.36 บาท และเสียดอกเบี้ยทั้งหมด 64,913.28 บาท

แหล่งเรียนรู้เพิ่มเติม

forvo.com เป็นเว็บไซต์ที่รวบรวมการออกเสียงคำในภาษาต่าง ๆ ก่อตั้งขึ้นเมื่อ ค.ศ. 2008 โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาการสื่อสารทางการพูด ผ่านการแลกเปลี่ยนการออกเสียงคำในภาษาต่าง ๆ ทั้งจากบุคคลที่เป็นเจ้าของภาษาและบุคคลที่ไม่ใช่เจ้าของภาษา forvo.com ได้รับคัดเลือกจากนิตยสาร Times ให้เป็น 50 เว็บไซต์ที่ดีที่สุดในปี ค.ศ. 2013 (50 best websites of 2013) ปัจจุบันเว็บไซต์นี้เป็นฐานข้อมูลที่รวบรวมการออกเสียงที่ใหญ่ที่สุด มีคลิปเสียงที่แสดงการออกเสียงคำศัพท์ประมาณสี่ล้านคำในภาษาต่าง ๆ มากกว่า 330 ภาษา



ครูอาจใช้เว็บไซต์ forvo.com เพื่อศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการออกเสียงคำศัพท์คณิตศาสตร์หรือชื่อนักคณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษหรือภาษาอื่น ๆ ที่ปรากฏในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้ เช่น finite sequence และ infinite sequence ซึ่งเป็นคำศัพท์คณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษ หรือ Carl Friedrich Gauss ซึ่งเป็นชื่อนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน

บรรณานุกรม

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2524). *คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ ค 012 ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524 ของกระทรวงศึกษาธิการ*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2558). *คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2558). *คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1 ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 ระบบจำนวนจริง*. กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

คณะผู้จัดทำ

คณะที่ปรึกษา

ศ. ดร.ชูกิจ ลิมปิจำนงค์
ดร.ศรเทพ วรรณรัตน์
ดร.วนิดา ธนประโยชน์ศักดิ์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะผู้จัดทำคู่มือครู

นางสาวปฐมภรณ์ อวชัย
นางสาวอัมริสา จันทะศิริ
นายพัฒนชัย รวีวรรณ
นางสาวภิญญดา กลับแก้ว
ดร.ศศิวรรณ เมื่อนันท
ดร.สุธารส นิลรอด
ดร.จิณณวัตร เจตน์จรงกิจ
นายทศธรรม เมขลา
นายเชิดศักดิ์ รักศิริโรจน์

ดร.บุญยงค์ ศรีพลแผ้ว
นางสาวปรารถนา วิริยธรรมเจริญ
นายสุบรรณ ตั้งศรีเสรี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
โรงเรียน ภ.ป.ร. ราชวิทยาลัย ในพระบรมราชูปถัมภ์
จังหวัดนครปฐม
มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี
โรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย จังหวัดนครปฐม
โรงเรียนจันทร์ประดิษฐารามวิทยาคม กรุงเทพฯ

คณะผู้พิจารณาคู่มือครู

นายประสาธ สอ้านวงศ์
รศ. ดร.สมพร สุนันทน์โอภาส
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฏ์
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน
นายสุเทพ กิตติพิทักษ์
ดร.สุพัตรา ผาติวิสันต์
ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

บรรณาธิการ

รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะทำงานฝ่ายเสริมวิชาการ

นางสาวขวัญใจ ภาสพันธุ์

นายณรงค์ฤทธิ์ ฉายา

นายถนอมเกียรติ งานสกุล

นางนงนุช ผลทวี

นางมยุรี สาสิทธิ์

นางสาวศราญลักษณ์ บุตรรัตน์

นายศรัณย์ แสงนิลาวิวัฒน์

ว่าที่ร้อยตรีสามารถ วนาธรัตน์

นางศุภรา ทวรรณกุล

นายสุกิจ สมงาม

นางสุปราณี พ่วงพี

นายชัยรัตน์ สุนทรประพี

ฝ่ายนวัตกรรมเพื่อการเรียนรู้

นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก

โรงเรียนราชวินิตบางเขน กรุงเทพฯ

โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ศูนย์วิจัยและพัฒนาการศึกษา กรุงเทพฯ

โรงเรียนสตรีภูเก็ต จังหวัดภูเก็ต

โรงเรียนทับปุดวิทยา จังหวัดพังงา

โรงเรียนสตรีสิริเกศ จังหวัดศรีสะเกษ

โรงเรียนบางละมุง จังหวัดชลบุรี

โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย เพชรบุรี จังหวัดเพชรบุรี

โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี จังหวัดพิษณุโลก

ข้าราชการบำนาญ

ข้าราชการบำนาญ

ข้าราชการบำนาญ

นักวิชาการอิสระ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี





สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ