คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่

คณิตศาสตร์ ๔

เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

คู่มือครู

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีหน้าที่ในการพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ การประเมินผล การจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกทักษะ กิจกรรม และสื่อการเรียนรู้เพื่อใช้ประกอบการเรียนรู้ในกลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒ นี้ จัดทำตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีเนื้อหาสาระ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน การวิเคราะห์ความสอดคล้องของแบบฝึกหัดท้ายบทกับจุดมุ่งหมายประจำบท ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครูซึ่งเป็นความรู้ที่ครูควรทราบนอกเหนือจากเนื้อหาในหนังสือเรียน ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทพร้อมเฉลย รวมทั้งเฉลยแบบฝึกหัด ซึ่งสอดคล้องกับหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒ ที่ต้องใช้ควบคู่กัน

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ บุคลากรทางการศึกษาและหน่วยงานต่าง ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้

(นางพรพรรณ ไวทยางกูร)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการ ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ สสวท. จึงได้จัดทำคู่มือครูประกอบการใช้หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒ ที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อเป็นแนวทางให้โรงเรียนนำไปจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ เล่ม ๒ นี้ ประกอบด้วยเนื้อหาสาระ ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน การวิเคราะห์ความสอดคล้องของแบบฝึกหัดท้ายบทกับจุดมุ่งหมายประจำบท ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครูซึ่งเป็นความรู้ที่ครูควรทราบนอกเหนือจากเนื้อหาในหนังสือเรียน ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทพร้อมเฉลย รวมทั้งเฉลยแบบฝึกหัด ซึ่งครูผู้สอนสามารถนำไปใช้เป็นแนวทางในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ให้บรรลุจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ โดยสามารถนำไปจัดกิจกรรมการเรียนรู้ได้ตามความเหมาะสมและความพร้อมของโรงเรียน ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ คณาจารย์ นักวิชาการอิสระ รวมทั้งครูผู้สอนนักวิชาการ จากสถาบัน และสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณมา ณ ที่นี้

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์แก่ผู้สอน และผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่าย ที่จะช่วยให้จัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้คู่มือครูเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

แนะนำการใช้คู่มือครู

ในหนังสือเล่มนี้แบ่งเป็น 3 บทตามหนังสือเรียนหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

ตัวชี้วัด

ตัวชี้วัดระบุสิ่งที่นักเรียนพึงรู้และปฏิบัติได้ รวมทั้งคุณลักษณะของผู้เรียนในแต่ละระดับชั้น ซึ่งสะท้อนถึงมาตรฐานการเรียนรู้ มีความเฉพาะเจาะจงและมีความเป็นรูปธรรม นำไปใช้ในการกำหนดเนื้อหา จัดทำหน่วยการเรียนรู้ จัดการเรียนการสอน และเป็นเกณฑ์สำคัญสำหรับการวัดประเมินผลเพื่อตรวจสอบคุณภาพผู้เรียน

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ประเด็นเกี่ยวกับเนื้อหาที่ครูควรเน้นย้ำกับนักเรียน ประเด็นเกี่ยวกับเนื้อหาที่ครูควรระมัดระวัง จุดประสงค์ของตัวอย่างที่นำเสนอในหนังสือเรียน เนื้อหาที่ควรทบทวนก่อนสอนเนื้อหาใหม่ และประเด็นเกี่ยวกับการสอนที่ครูพึงระลึก

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

ประเด็นที่นักเรียนมักเข้าใจผิดเกี่ยวกับเนื้อหา

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

ประเด็นที่ครูควรทราบเกี่ยวกับแบบฝึกหัด เช่น จุดมุ่งหมายของแบบฝึกหัด ประเด็นที่ครูควรให้ความสำคัญในการทำแบบฝึกหัดของนักเรียน เนื้อหาที่ควรทบทวนก่อนทำแบบฝึกหัด

กิจกรรมในคู่มือครู

กิจกรรมที่คู่มือครูเล่มนี้เสนอแนะไว้ให้ครูนำไปใช้ในชั้นเรียน ซึ่งมีทั้งกิจกรรมนำเข้าบทเรียน ที่ใช้เพื่อตรวจสอบความรู้ก่อนหน้าที่จำเป็นสำหรับเนื้อหาใหม่ที่ครูจะสอน และกิจกรรมที่ใช้สำหรับสร้างความคิดรวบยอดในเนื้อหา โดยหลังจากทำกิจกรรมแล้ว ครูควรเชื่อมโยงความคิดรวบยอดที่ต้องการเน้นกับผลที่ได้จากการทำกิจกรรม กิจกรรมเหล่านี้ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง

กิจกรรมในหนังสือเรียน

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creative and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)

เฉลยกิจกรรมในหนังสือเรียน

เฉลยคำตอบหรือตัวอย่างคำตอบของกิจกรรมในหนังสือเรียน

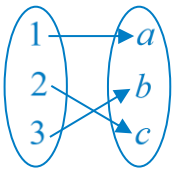
แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน

ตัวอย่างการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน ที่มีขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ซึ่งเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้และพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

สารบัญ บทที่ 1 – 2

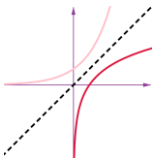
บทที่	เนื้อหา	หน้า

1



ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

2

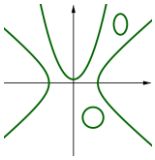


ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

สารบัญ บทที่ 3

บทที่	เนื้อหา	หน้า

3



ภาคตัดกรวย

บทที่ 1

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเป็นเรื่องสำคัญเรื่องหนึ่งในคณิตศาสตร์ เพราะฟังก์ชันมีบทบาทในการศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับสูง เช่น แคลคูลัส พีชคณิตนามธรรม นอกจากนี้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันยังเป็นประโยชน์ในการแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร เนื้อหาเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันที่นำเสนอในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 นี้ มีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนเรียนรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเพื่อเป็นรากฐานสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์ในหัวข้อต่อไป โดยเริ่มจากความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน การใช้ฟังก์ชันในชีวิตจริง กราฟของฟังก์ชัน การดำเนินการของฟังก์ชัน และฟังก์ชันผกผัน ในบทเรียนนี้มุ่งให้นักเรียนบรรลุตัวชี้วัด/ผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง/สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้

ตัวชี้วัด /ผลการเรียนรู้ และสาระการเรียนรู้

ตัวชี้วัด • ใช้ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันอธิบายสถานการณ์ที่กำหนด	**สาระการเรียนรู้แกนกลาง** • ฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชัน (ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันขั้นบันได ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล)
ผลการเรียนรู้ • หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน หาฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน • ใช้สมบัติของฟังก์ชันในการแก้ปัญหา	**สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม** • การบวก การลบ การคูณ การหารฟังก์ชัน • ฟังก์ชันประกอบ • ฟังก์ชันผกผัน

จุดมุ่งหมาย

1. หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์
2. จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน
3. หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน
4. ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด
5. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน
6. หาฟังก์ชันประกอบ
7. หาฟังก์ชันผกผัน
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับสมการและกราฟในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- เซต
- จำนวนจริง

goo.gl/Hu9Stk

1.1 เนื้อหาสาระ

1. ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$ โดยที่ $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$
2. r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

3. ให้ r เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือ เซตของจุดในระนาบที่แสดงคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ r

4. ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

   โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r เขียนแทนด้วย D_r

   เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r เขียนแทนด้วย R_r

   เขียน D_r และ R_r ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข ได้ดังนี้

$$D_r = \{x\in A \mid \text{มี } y\in B \text{ ซึ่ง } (x, y)\in r\}$$

$$R_r = \{y\in B \mid \text{มี } x\in A \text{ ซึ่ง } (x, y)\in r\}$$

5. ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

6. ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งคู่อันดับสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน

   หรือกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ ซึ่งสำหรับ x, y และ z ใด ๆ ถ้า $(x, y)\in f$ และ $(x, z)\in f$ แล้ว $y = z$

   ดังนั้น ถ้ามี x, y และ z โดยที่ $(x, y)\in f$ และ $(x, z)\in f$ แต่ $y \neq z$ จะได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน

7. ในกรณีที่ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน จะเขียน $y = f(x)$ แทน $(x, y)\in f$ และเรียก $f(x)$ ว่าเป็น ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x อ่านว่า เอฟของเอกซ์ หรือ เอฟเอกซ์

8. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น A และ เรนจ์เป็นสับเซตของ B เขียนแทน f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ด้วย $f: A\to B$

9. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น A และเรนจ์เป็น B เขียนแทน f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ด้วย $f: A \xrightarrow[onto]{} B$

10. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งสำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $f(x_1)=f(x_2)$ แล้ว $x_1=x_2$
เขียนแทน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ด้วย $f:A\xrightarrow{1-1}B$

11. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f:A\xrightarrow[onto]{1-1}B$ หมายถึง f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและเป็นฟังก์ชันทั่วถึง

12. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน

    1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A
    ถ้า $x_1<x_2$ แล้ว $f(x_1)<f(x_2)$

    2) f เป็นฟังก์ชันลดบนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A
    ถ้า $x_1<x_2$ แล้ว $f(x_1)>f(x_2)$

13. ฟังก์ชันเชิงเส้น คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x)=ax+b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ในกรณีที่ $a=0$ จะได้ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x)=b$ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันคงตัว

14. ฟังก์ชันกำลังสอง คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x)=ax^2+bx+c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a\neq 0$ เรียกกราฟของฟังก์ชันกำลังสองว่า “พาราโบลา”

15. ฟังก์ชันพหุนาม คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง

16. กราฟของฟังก์ชัน คือ กราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดโดยสมการ $y=f(x)$ ในระบบพิกัดฉาก ซึ่งประกอบด้วยจุดที่มีคู่อันดับเป็น (x,y) โดยที่สมาชิกตัวหน้าคือ x เป็นสมาชิกในโดเมนของฟังก์ชัน และสมาชิกตัวหลังคือ y หรือ $f(x)$ เป็นค่าของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ x

17. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ ผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารของ f และ g เขียนแทนด้วย $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ ตามลำดับ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดโดย

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ (fg)(x) &= f(x)g(x)\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{เมื่อ } g(x)\neq 0\end{aligned}$$

18. โดเมนของ $f+g$, $f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=0\}$

19. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

และกำหนด $g \circ f$ โดย

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \text{สำหรับทุก } x \text{ ใน } D_{g\circ f}$$

20. ให้ f เป็นฟังก์ชัน

f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$

1.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

ความสัมพันธ์

ครูอาจนำเข้าสู่บทเรียนเพื่อให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ โดยใช้กิจกรรมสัตว์เลี้ยงแสนรัก (1) ดังนี้

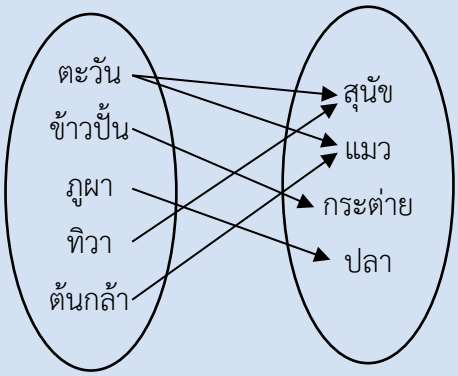
กิจกรรม : สัตว์เลี้ยงแสนรัก (1)

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ครูสุ่มเลือกนักเรียน 5 คน แล้วให้นักเรียนเลือกชนิดสัตว์เลี้ยงกี่ชนิดก็ได้จากที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   สุนัข แมว กระต่าย ปลา

2. ครูกำหนดเซตขึ้นมาสองเซต คือ เซตของชื่อนักเรียน และเซตของชนิดสัตว์เลี้ยงที่นักเรียนเลือก จากนั้นเขียนแสดงชนิดสัตว์เลี้ยงที่นักเรียนเลือกโดยใช้แผนภาพ ตัวอย่างเช่น



3. ครูให้นักเรียนเขียนคู่อันดับแสดงการจับคู่ชื่อนักเรียนกับชนิดสัตว์เลี้ยงที่นักเรียนเลือก โดยให้สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นชื่อนักเรียน และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นชนิดสัตว์เลี้ยงที่นักเรียนเลือก ซึ่งจากตัวอย่างในข้อ 2 จะได้คู่อันดับทั้งหมดคือ (ตะวัน, สุนัข) (ตะวัน, แมว) (ข้าวปั้น, กระต่าย) (ภูผา, ปลา) (ทิวา, สุนัข) (ต้นกล้า, แมว)

4. จากคู่อันดับทั้งหมดที่ได้ในข้อ 3 ครูชี้แนะให้นักเรียนเห็นว่า

- สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในคู่อันดับดังกล่าวมีความเกี่ยวข้องกันบางประการ โดยในสถานการณ์นี้เมื่อกำหนดชื่อของนักเรียน จะทราบว่านักเรียนคนนั้นเลือกสัตว์เลี้ยงชนิดใด จะเรียกเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังมีความเกี่ยวข้องกันบางประการว่าความสัมพันธ์
- สำหรับความสัมพันธ์ที่ได้ในกิจกรรมนี้ โดเมนของความสัมพันธ์ซึ่งเป็นเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ คือ {ตะวัน, ข้าวปั้น, ภูผา, ทิวา, ต้นกล้า} และเรนจ์ของความสัมพันธ์ซึ่งเป็นเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์ คือ {สุนัข, แมว, กระต่าย, ปลา}

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์อาจไม่จำเป็นต้องเขียนแจกแจงสมาชิกของผลคูณคาร์ทีเซียน เช่น การเขียนสมาชิกใน $A \times A$ ในตัวอย่างที่ 2 อาจเกิดความยุ่งยาก เนื่องจากมีสมาชิกทั้งหมด 49 คู่อันดับ แต่สามารถพิจารณาสมาชิกในความสัมพันธ์ r ได้จาก (x, y) ที่ x และ y เป็นสมาชิกของ A และสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด
- ในการหาตัวผกผันของความสัมพันธ์ r ใด ๆ จะต้องคำนึงถึงโดเมนของ r^{-1} ซึ่งเป็นเรนจ์ของความสัมพันธ์ r เช่น ในตัวอย่างที่ 6 เงื่อนไข $x \geq 0$ ของ r^{-1} มาจากเรนจ์ของความสัมพันธ์ r
- เส้นประ $y = x$ บนกราฟของ r และ r^{-1} ที่แสดงในตัวอย่างที่ 5 และ 6 นั้น มีไว้เพื่อแสดงให้เห็นว่ากราฟของ r และ r^{-1} มีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร โดยเส้นประดังกล่าวไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของกราฟ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 1.1

7. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

   3) $n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x - 2\}$

   6) $s = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = |x - 2|\}$

ความสัมพันธ์ในแบบฝึกหัดทั้งสองข้อนี้เป็นความสัมพันธ์บนเซตที่ไม่ใช่เซตของจำนวนจริง แต่เป็นความสัมพันธ์บนเซตของจำนวนเต็ม จะได้ว่าโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ดังกล่าวต้องอยู่บนเซตของจำนวนเต็มด้วย

ฟังก์ชัน

ครูอาจนำเข้าสู่บทเรียนเพื่อให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดเกี่ยวกับฟังก์ชัน โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน โดยใช้กิจกรรมสัตว์เลี้ยงแสนรัก (2) ดังนี้

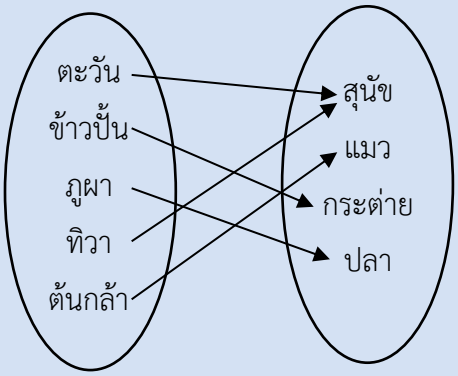
กิจกรรม : สัตว์เลี้ยงแสนรัก (2)

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ครูสุ่มเลือกนักเรียน 5 คน แล้วให้นักเรียนเลือกชนิดสัตว์เลี้ยง <u>1 ชนิดเท่านั้น</u>จากที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   สุนัข แมว กระต่าย ปลา

2. ครูกำหนดเซตขึ้นมาสองเซต คือ เซตของชื่อนักเรียน และเซตของชนิดสัตว์เลี้ยงที่นักเรียนเลือก จากนั้นเขียนแสดงชนิดสัตว์เลี้ยงที่นักเรียนเลือกโดยใช้แผนภาพ ตัวอย่างเช่น



3. ครูให้นักเรียนเขียนคู่อันดับแสดงการจับคู่ชื่อนักเรียนกับชนิดสัตว์เลี้ยงที่นักเรียนเลือก โดยให้สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเป็นชื่อนักเรียน และสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเป็นชนิดสัตว์เลี้ยงที่นักเรียนเลือก ซึ่งจากตัวอย่างในข้อ 2 จะได้คู่อันดับทั้งหมดคือ (ตะวัน, สุนัข) (ข้าวปั้น, กระต่าย) (ภูผา, ปลา) (ทิวา, สุนัข) (ต้นกล้า, แมว)

4. จากคู่อันดับทั้งหมดที่ได้ในข้อ 3 ครูชี้แนะให้นักเรียนเห็นว่า
   - เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่ได้ในข้อ 3 เป็นความสัมพันธ์ที่สมาชิกแต่ละตัวในโดเมนมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียว หรือกล่าวได้ว่าเป็นความสัมพันธ์ซึ่งสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน จะเรียกความสัมพันธ์ที่มีสมบัติดังกล่าวว่าฟังก์ชัน
   - สำหรับฟังก์ชันที่ได้ในกิจกรรมนี้ โดเมนของฟังก์ชันซึ่งเป็นเซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดในฟังก์ชัน คือ {ตะวัน, ข้าวปั้น, ภูผา, ทิวา, ต้นกล้า} และเรนจ์ของฟังก์ชันซึ่งเป็นเซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดในฟังก์ชัน คือ {สุนัข, แมว, กระต่าย, ปลา}

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

บทนิยามของฟังก์ชัน

ในการสอนเกี่ยวกับฟังก์ชัน ครูควรยกตัวอย่างแผนภาพแสดงฟังก์ชันเพิ่มเติมจากตัวอย่างที่ 7 และตัวอย่างที่ 8 ในหนังสือเรียน เช่น แผนภาพแสดงฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แผนภาพแสดงฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเป็นอย่างดีเกี่ยวกับฟังก์ชันแล้ว ครูอาจยกตัวอย่างกราฟของความสัมพันธ์ โดยให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาจากกราฟว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

การพิจารณาการเป็นฟังก์ชันจากกราฟ

ตัวอย่างที่ 9

ให้ $r = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$ จงพิจารณาว่า r เป็นฟังก์ชันหรือไม่

ตัวอย่างนี้มีไว้เพื่อสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับการพิจารณาการเป็นฟังก์ชันโดยลากเส้นขนานกับแกน Y แล้วพิจารณาว่ามีเส้นขนานกับแกน Y ตัดกับกราฟมากกว่าหนึ่งจุดหรือไม่ โดยในการสอนตัวอย่างนี้ ครูควรให้นักเรียนเชื่อมโยงกับบทนิยามของฟังก์ชันด้วย ซึ่งในตัวอย่างนี้ เมื่อลากเส้นตรง $x=1$ จะตัดกราฟที่จุด $(1, 1)$ และ $(1, -1)$ ซึ่งจะเห็นว่ามีสมาชิกในโดเมนหนึ่งตัว คือ 1 ที่จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์มากกว่าหนึ่งตัว ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชัน

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ในการพิจารณาการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งของฟังก์ชันใด ๆ โดยลากเส้นขนานกับแกน X แล้วพิจารณาว่ามีเส้นขนานกับแกน X ตัดกับกราฟมากกว่าหนึ่งจุดหรือไม่นั้น ควรให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงกับบทนิยามของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งได้ด้วย เช่น ในรูปที่ 8 ซึ่งเป็นกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^2+2x+1$ เมื่อลากเส้นตรง $y=1$ จะตัดกราฟที่จุด $(0,1)$ และ $(-2,1)$ ซึ่งจะเห็นว่ามีสมาชิกในโดเมนที่ต่างกันที่จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ตัวเดียวกัน ดังนั้น $f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ฟังก์ชันทั่วถึง

ตัวอย่างที่ 16

กำหนด $f(x)=x^2+1$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$ หรือไม่

การแสดงว่าฟังก์ชันจาก A ไป B ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง อาจทำได้โดยวิธียกตัวอย่างค้าน นั่นคือต้องหาสมาชิกของ B ที่ไม่เป็นสมาชิกของเรนจ์ของฟังก์ชัน ซึ่งในตัวอย่างนี้จะเห็นว่ามี 0 ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathbb{R}$ แต่ไม่เป็นสมาชิกของเรนจ์ของฟังก์ชัน เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ จึงได้ว่า $x^2+1 \geq 1$ นั่นคือ $f(x) \geq 1$

การดำเนินการของฟังก์ชัน

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ในการยกตัวอย่างเรื่องการดำเนินการของฟังก์ชัน ครูต้องใช้ความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันเท่านั้น

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

ในกรณีที่กำหนดฟังก์ชัน f และ g ในรูปเซตแบบแจกแจงสมาชิก เช่น ตัวอย่างที่ 36 นักเรียนอาจเข้าใจผิดว่าหา $f+g$ ได้โดยนำสมาชิกตัวหน้ามาบวกกัน และนำสมาชิกตัวหลังมาบวกกัน ครูควรเน้นย้ำบทนิยามของการดำเนินการของฟังก์ชัน โดยการยกตัวอย่างเพิ่มเติมและตรวจสอบความเข้าใจอย่างต่อเนื่อง

ฟังก์ชันประกอบ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$
- **ตัวอย่างที่ 38**

  กำหนด $f(x) = -x^2 - 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ จะมี $g \circ f$ และ $f \circ g$ หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามี จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ พร้อมทั้งโดเมน

ตัวอย่างนี้มีไว้เพื่อสร้างความเข้าใจว่าในการหา $g \circ f$ จะต้องตรวจสอบว่า $R_f \cap D_g \neq \varnothing$ เสมอ ซึ่งในกรณีที่ $R_f \cap D_g = \varnothing$ จะไม่มี $g \circ f$

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 1.5

7. จงหาฟังก์ชัน f และ g ซึ่ง $f \circ g = h$ เมื่อกำหนดฟังก์ชัน h ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
   2) $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
   3) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$
   4) $\{10, 20, 30, ...\}$

แบบฝึกหัดนี้มีคำตอบได้หลายแบบ เนื่องจากฟังก์ชัน f และ g ที่มี $f \circ g$ ตามที่โจทย์กำหนดเป็นได้หลายแบบ ครูควรให้นักเรียนมีอิสระในการเขียนฟังก์ชัน f และ g ซึ่งฟังก์ชัน f และ g ของนักเรียนอาจไม่ตรงกับที่ครูคิดไว้

ฟังก์ชันผกผัน

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ในการหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้ ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนตรวจสอบว่า f มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่เสียก่อน โดยการตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ (ตามทฤษฎีบท 1)
- ในการหาตัวผกผันของฟังก์ชัน f ใด ๆ จะต้องคำนึงถึงโดเมนของ f^{-1} ซึ่งเป็นเรนจ์ของฟังก์ชัน f เช่น ในตัวอย่างที่ 45 เงื่อนไข $x \geq 0$ ของ f^{-1} มาจากเรนจ์ของฟังก์ชัน f

- ครูอาจให้นักเรียนใช้เทคโนโลยีช่วยในการเขียนกราฟของฟังก์ชัน f และ f^{-1} แต่เมื่อได้กราฟแล้ว ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง ซึ่งกราฟของ f^{-1} เกิดจากการสะท้อนกราฟของ f ข้ามเส้นตรง $y = x$

1.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน

กิจกรรม : ชั่งน้ำหนัก

อุปกรณ์

1. เครื่องชั่งน้ำหนัก
2. แผ่นไม้ที่มีความยาวไม่น้อยกว่า 4 ฟุต และสามารถรับน้ำหนักคนที่ขึ้นไปยืนได้
3. ไม้บรรทัดและดินสอ
4. กองกระดาษที่มีความสูงเท่าเครื่องชั่งน้ำหนัก

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. เตรียมแผ่นไม้โดยวัดระยะสำหรับยืนบนแผ่นไม้ ให้แต่ละตำแหน่งห่างกันครึ่งฟุต แล้วทำสัญลักษณ์และกำหนดหมายเลขแต่ละตำแหน่งให้เห็นอย่างชัดเจน ดังรูป

2. นำแผ่นไม้วางบนเครื่องชั่งน้ำหนัก โดยให้ตำแหน่งหมายเลข 0 บนแผ่นไม้อยู่กึ่งกลางของเครื่องชั่งน้ำหนัก จัดให้แผ่นไม้อยู่ในแนวขนานกับพื้นโดยใช้กองกระดาษรองที่ปลายอีกด้านหนึ่งของแผ่นไม้ และให้ตำแหน่งหมายเลข 6 อยู่ที่กึ่งกลางของกองกระดาษ ดังรูป เมื่อวางแผ่นไม้ลงบนเครื่องชั่งน้ำหนักแล้วปรับเครื่องชั่งน้ำหนักให้เข็มอยู่ที่ตำแหน่ง 0 กิโลกรัม

3. ให้นักเรียนคนที่ 1 ชั่งน้ำหนัก โดยเริ่มยืนที่ตำแหน่งหมายเลข 0 อ่านตัวเลขแสดงน้ำหนักบนเครื่องชั่ง แล้วบันทึกน้ำหนักที่อ่านได้ในตาราง หลังจากนั้นเลื่อนตำแหน่งที่ยืนไปเรื่อย ๆ ตามที่กำหนดจนถึงตำแหน่งหมายเลข 6 ซึ่งอยู่บนกองกระดาษ บันทึกน้ำหนักที่อ่านได้ในแต่ละตำแหน่ง ทำซ้ำแบบเดียวกันกับนักเรียนอีก 2 คน

ตำแหน่งที่ยืน	0	1	2	3	4	5	6
น้ำหนักของนักเรียนคนที่ 1							
น้ำหนักของนักเรียนคนที่ 2							
น้ำหนักของนักเรียนคนที่ 3							

4. นำข้อมูลที่บันทึกในข้อ 3 ไปเขียนกราฟ โดยให้แกน X แสดงตำแหน่งที่ยืน และแกน Y แสดงน้ำหนัก แล้วพิจารณาว่ากราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งที่ยืนกับน้ำหนักที่อ่านได้มีลักษณะอย่างไร

5. จากกราฟที่ได้ในข้อ 4

   5.1 เพราะเหตุใดกราฟทุกเส้นจึงมีความชันเป็นจำนวนลบ

   5.2 เพราะเหตุใดจุด $(6, 0)$ จึงอยู่บนกราฟทุกเส้น

   5.3 การเปลี่ยนแปลงความยาวของแผ่นไม้น่าจะมีผลต่อความชันของกราฟหรือไม่ อย่างไร

เฉลยกิจกรรม : ชั่งน้ำหนัก

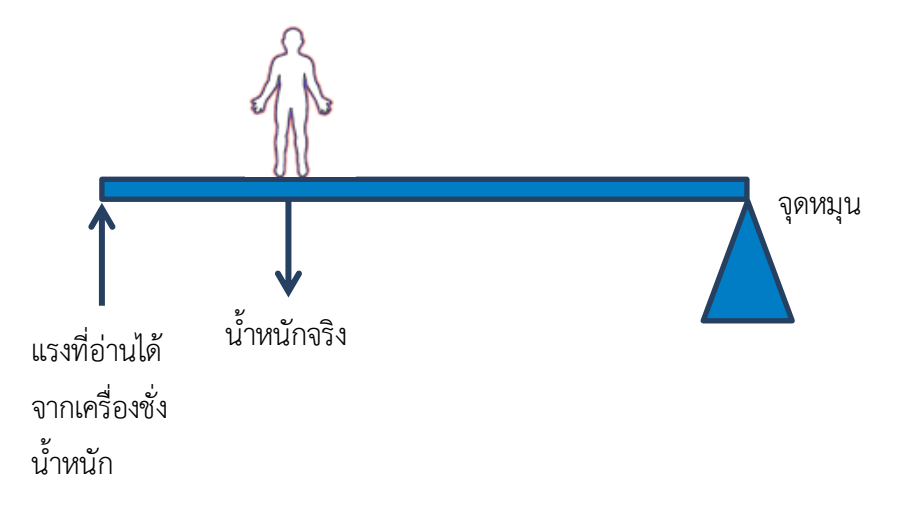
1. –
2. –
3.

ตำแหน่งที่ยืน	0	1	2	3	4	5	6
น้ำหนักของนักเรียนคนที่ 1	48	43.5	33.9	25	16	5	0
น้ำหนักของนักเรียนคนที่ 2	54	44.6	36.4	27.5	16.6	5.8	0
น้ำหนักของนักเรียนคนที่ 3	96	82	72	50	33	16	0

- อันดับแสดงน้ำหนักที่วัดได้ ณ ตำแหน่งที่ยืนของนักเรียนแต่ละคนมีแนวโน้มเป็นกราฟเส้นตรงที่มีความชันเป็นจำนวนลบ
- คู่อันดับแสดงน้ำหนักที่วัดได้ของนักเรียนที่มีน้ำหนักตัวมากที่สุดมีแนวโน้มเป็นกราฟเส้นตรงที่มีค่าสัมบูรณ์ของความชันมากที่สุด แต่คู่อันดับแสดงน้ำหนักที่วัดได้ของนักเรียนที่มีน้ำหนักตัวน้อยที่สุดจะมีแนวโน้มเป็นกราฟเส้นตรงที่มีค่าสัมบูรณ์ของความชันน้อยที่สุด
- จุดตัดแกน Y ของกราฟแต่ละเส้นอยู่ที่คู่อันดับ $(0, y_0)$ เมื่อ y_0 แทนน้ำหนักตัวของนักเรียน
- จุดตัดแกน X ของกราฟทุกเส้นเป็น จุดเดียวกัน คือ จุด $(6, 0)$

5. 5.1 น้ำหนักที่อ่านได้ที่ตำแหน่งหมายเลข 0 เป็นน้ำหนักจริงของนักเรียน โดยอาศัยความรู้เรื่องโมเมนต์ของแรงเมื่อวัตถุอยู่ในสภาพสมดุลต่อการหมุน โดยตำแหน่งหมายเลข 6 ซึ่งอยู่บนกองกระดาษจะเป็นจุดหมุนของคาน (แผ่นไม้) น้ำหนักที่อ่านได้จากเครื่องชั่งน้ำหนักจะลดลงเมื่อนักเรียนเปลี่ยนตำแหน่งยืนออกห่างจากเครื่องชั่งน้ำหนัก เนื่องจาก

ระยะห่างจากตำแหน่งที่ยืนถึงจุดหมุนลดลง



5.2 ไม่ว่านักเรียนจะมีน้ำหนักเท่าใดก็ตาม เมื่อนักเรียนยืนที่ตำแหน่งหมายเลข 6 ซึ่งอยู่บนกองกระดาษและเป็นจุดหมุนของคาน (แผ่นไม้) โมเมนต์จะเป็นศูนย์ ซึ่งทำให้น้ำหนักที่อ่านได้จากเครื่องชั่งน้ำหนักเป็น 0 กิโลกรัมด้วย

5.3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักที่อ่านได้จากเครื่องชั่งน้ำหนักกับตำแหน่งที่ยืนจะมีค่าสัมบูรณ์ของความชันลดลงเมื่อไม้กระดานยาวขึ้น และจะมีค่าสัมบูรณ์ของความชันเพิ่มขึ้นเมื่อไม้กระดานสั้นลง

แนวทางการจัดกิจกรรม : ชั่งน้ำหนัก

เวลาในการจัดกิจกรรม 50 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนเชื่อมโยงและใช้ความรู้ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์เกี่ยวกับโมเมนต์ของแรง โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

ใบกิจกรรม “ชั่งน้ำหนัก”

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ก่อนเริ่มกิจกรรมครูควรจัดเตรียมอุปกรณ์ที่เกี่ยวข้องดังที่ระบุไว้ในใบกิจกรรม และทบทวนความรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง ความชัน และความรู้วิทยาศาสตร์ เรื่อง โมเมนต์ของแรงเมื่อวัตถุอยู่ในสภาพสมดุลต่อการหมุน ที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
2. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 คน แบบคละความสามารถ โดยให้นักเรียนทั้งสามคนมีน้ำหนักแตกต่างกันอย่างชัดเจน จากนั้นแจกใบกิจกรรม “ชั่งน้ำหนัก” ให้กับนักเรียนทุกคน แล้วชี้แจงแนวทางการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 1 – 3 ในใบกิจกรรมให้นักเรียนเข้าใจ
3. ครูให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมข้อ 1 – 3 ในใบกิจกรรม โดยในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรมครูควรเดินดูนักเรียนให้ทั่วถึงทุกกลุ่ม และคอยชี้แนะเมื่อนักเรียนพบปัญหา
4. ในการตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 4 ในใบกิจกรรม ครูควรแนะนำให้นักเรียนใช้เทคโนโลยีช่วยในการเขียนกราฟ โดยครูอาจใช้การซักถามหรือชี้แนะให้นักเรียนสังเกตในประเด็นต่อไปนี้
   - คู่อันดับในกราฟแสดงอะไร และแนวโน้มของคู่อันดับในกราฟของนักเรียนแต่ละคนเป็นอย่างไร
   - กราฟทั้งสามมีลักษณะร่วมกันหรือต่างกันอย่างไร เช่น ความชัน จุดตัดแกน X หรือจุดตัดแกน Y โดยอาจให้นักเรียนเปรียบเทียบลักษณะเหล่านั้นที่ได้จากกราฟทั้งสาม
5. ครูสรุปคำตอบพร้อมแนวทางที่ถูกต้องในการแก้ปัญหา

1.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนเป็นการวัดผลการเรียนรู้เพื่อปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
ผลคูณคาร์ทีเซียน	1.1	ข้อ 1 – 3
ความสัมพันธ์จาก A ไป B	1.1	ข้อ 4 – 6
โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	1.1	ข้อ 6, 7
ตัวผกผันของความสัมพันธ์ และโดเมนและเรนจ์ของตัวผกผันของความสัมพันธ์	1.1	ข้อ 8
กราฟของความสัมพันธ์และกราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์	1.1	ข้อ 9
ฟังก์ชัน และฟังก์ชันจาก A ไป B	1.2ก	ข้อ 1 – 4, 12
ค่าของฟังก์ชัน	1.2ก	ข้อ 5 – 8
โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน	1.2ก	ข้อ 9 – 11
ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B	1.2ก	ข้อ 12, 13

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	1.2ข	ข้อ 1, 2
ฟังก์ชันเชิงเส้นและกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น	1.3ก	ข้อ 1, 2, 3
ฟังก์ชันกำลังสองและกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง	1.3ข	ข้อ 1 – 6
ฟังก์ชันอื่น ๆ และกราฟของฟังก์ชันอื่น ๆ	1.4ก	ข้อ 1 – 3
เทคนิคการเขียนกราฟโดยการเลื่อนกราฟ	1.4ข	ข้อ 1, 2
การดำเนินการของฟังก์ชันและฟังก์ชันประกอบ	1.3ข	ข้อ 1 – 8
ฟังก์ชันผกผัน ค่าของฟังก์ชันผกผัน และกราฟของฟังก์ชันผกผัน	1.6	ข้อ 1 – 6

1.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 มีจุดมุ่งหมายว่าเมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์
2. จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน
3. หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน
4. ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด
5. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน
6. หาฟังก์ชันประกอบ
7. หาฟังก์ชันผกผัน
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา

ซึ่งได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย ซึ่งประกอบด้วยโจทย์ฝึกทักษะที่มีความน่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้ แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 บทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย							
		หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์	จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน	หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน	ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน	หาฟังก์ชันประกอบ	หาฟังก์ชันผกผัน	ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
1.		โจทย์ฝึกทักษะ							
2.	1)	✓							
	2)	✓							
	3)	✓							
	4)	✓							
	5)	✓							
	6)	✓							
	7)	✓							
	8)	✓							
3.	1)	✓							
	2)	✓							
	3)	✓							
	4)	✓							
4.	1)	✓							
	2)	✓							
	3)	✓							

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย							
		หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์	จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน	หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน	ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน	หาฟังก์ชันประกอบ	หาฟังก์ชันผกผัน	ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
5.		✓							
6.	1)		✓						
	2)		✓						
	3)		✓						
	4)		✓						
7.	1)		✓						
	2)		✓						
	3)		✓						
	4)		✓						
	5)		✓						
8.						✓			
9.	1)				✓				
	2)				✓				
	3)				✓				
	4)				✓				
	5)				✓				

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย							
		หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์	จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน	หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน	ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน	หาฟังก์ชันประกอบ	หาฟังก์ชันผกผัน	ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
10.	1)			✓					
	2)			✓					
	3)			✓					
	4)			✓					
11.	1)				✓				
	2)				✓				
	3)				✓				
	4)				✓				
	5)				✓				
	6)				✓				
	7)				✓				
	8)				✓				
12.	1)			✓	✓				
	2)			✓	✓				
	3)			✓	✓				
	4)			✓	✓				

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย							
		หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์	จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน	หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน	ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน	หาฟังก์ชันประกอบ	หาฟังก์ชันผกผัน	ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
13.	1)				✓				
	2)				✓				
	3)				✓				
14.	1)				✓				
	2)				✓				
15.	1)				✓				
	2)				✓				
	3)				✓				
	4)				✓				
16.	1)			✓	✓				
	2)			✓	✓				
	3)			✓	✓				
	4)			✓	✓				
17.	1)	โจทย์ฝึกทักษะ							
	2)	โจทย์ฝึกทักษะ							
	3)	โจทย์ฝึกทักษะ							

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย							
		หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์	จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน	หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน	ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน	หาฟังก์ชันประกอบ	หาฟังก์ชันผกผัน	ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
	4)	โจทย์ฝึกทักษะ							
	5)	โจทย์ฝึกทักษะ							
	6)	โจทย์ฝึกทักษะ							
18.	1)					✓			
	2)					✓			
	3)					✓			
	4)					✓			
19.	1)						✓		
	2)						✓		
	3)						✓		
	4)						✓		
	5)						✓		
20.	1)					✓			
	2)					✓			
	3)					✓			

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย							
		หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์	จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน	หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน	ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน	หาฟังก์ชันประกอบ	หาฟังก์ชันผกผัน	ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
	4)					✓			
	5)					✓			
	6)						✓		
	7)						✓		
	8)						✓		
	9)						✓		
21.	1)			✓			✓		
	2)			✓			✓		
	3)			✓			✓		
	4)			✓			✓		
	5)			✓			✓		
	6)			✓			✓		
22.							✓		
23.							✓		
24.	1)							✓	
	2)							✓	

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย							
		หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์	จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน	หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน	ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน	หาฟังก์ชันประกอบ	หาฟังก์ชันผกผัน	ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
	3)							✓	
	4)							✓	
	5)							✓	
25.	1)							✓	
	2)							✓	
	3)							✓	
	4)							✓	
26.	ก.			✓				✓	
	ข.			✓				✓	
	ค.							✓	
	ง.			✓				✓	
27.	1)						✓		
	2)						✓	✓	
28.							✓	✓	
29.									✓

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย							
		หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์	จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน	หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน	ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน	หาฟังก์ชันประกอบ	หาฟังก์ชันผกผัน	ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
30.	1)								✓
	2)								✓
	3)								✓
31.									✓
32.	1)								✓
	2)								✓
	3)								✓
33.									✓
34.									✓
35.									✓
36.									✓
37.	1)								✓
	2)								✓
	3)								✓
	4)								✓
	5)								✓

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย							
		หาโดเมน เรนจ์ และตัวผกผัน และเขียนกราฟของความสัมพันธ์	จำแนกความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและไม่เป็นฟังก์ชัน	หาโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชัน	ตรวจสอบฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ฟังก์ชันทั่วถึง ฟังก์ชันเพิ่ม และฟังก์ชันลด	หาผลลัพธ์ของการบวก การลบ การคูณ และการหารของฟังก์ชัน	หาฟังก์ชันประกอบ	หาฟังก์ชันผกผัน	ใช้ความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์และฟังก์ชันในการแก้ปัญหา
38.	1)								✓
	2)								✓
	3)								✓
	4)								✓
	5)								✓

1.6 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน สำหรับรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. กำหนดให้ $A=\{-2, 0, 2\}$ และ $B=\{0, 1, 2, 3\}$ พิจารณาความสัมพันธ์ r จาก A ไป B กำหนดโดย $(x, y)\in r$ เมื่อ $xy=0$

   1) จงเขียน r แบบแจกแจงสมาชิก

   2) จงหาโดเมนของ r

   3) จงหาเรนจ์ของ r

   4) จงพิจารณาว่า r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A หรือไม่

   5) จงพิจารณาว่า r เป็นความสัมพันธ์บนเซต B หรือไม่

   6) จงพิจารณาว่า r เป็นความสัมพันธ์บนเซต $A\cup B$ หรือไม่

2. กำหนดให้ $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$r_1=\{(x, y)\in S\times S \mid xy=6,\ x>y\}$$

$$r_2=\{(x, y)\in S\times S \mid 3x+y=9\}$$

   1) จงเขียน r_1 แบบแจกแจงสมาชิก

   2) จงเขียน r_2 แบบแจกแจงสมาชิก

   3) จงพิจารณาว่า r_2 เป็นตัวผกผันของ r_1 หรือไม่

   4) จงพิจารณาว่า r_1 เป็นตัวผกผันของ r_2 หรือไม่

3. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1) $r_1 = \{(-5, 2), (-3, 0), (0, 2), (1, 1), (3, -2)\}$

2) $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 1\}$

3) $r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy = 1\}$

4) $r_4 = \{(x, y) \mid (x+y)(x-y) = x^2 - y^2\}$

5) $r_5 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2+9}\}$

6) $r_6 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2-9}\}$

4. จงเขียนกราฟของ r และ r^{-1} ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน

1) $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = 2x\}$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2) $r = \{(x, y) \mid y = x^2 + 5\}$

3) $r = \{(x, y) \mid y > 2x + 1\}$

5. ความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน พร้อมให้เหตุผลประกอบ

1) $r_1 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 0)\}$

2) $r_2 = \{(x, y) \mid xy = 1\}$

3) $r_3 = \{(x, y) \mid xy = 0\}$

4) $r_4 = \{(x, y) \mid y^2 = x\}$

5) $r_5 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$

6. กำหนดให้ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

พิจารณาความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in S \times S \mid 5x^2 + y^2 < 5\}$

1) จงเขียน r และ r^{-1} แบบแจกแจงสมาชิก

2) r เป็นฟังก์ชันหรือไม่

3) r^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

7. จงหาโดเมนและเรนจ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = x^2 + 3$

2) $f(x) = \sqrt{x-1}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{|x+2|}$

8. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x(x-4)(x-8)$

จงหาค่าของ $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8)$

9. กำหนดฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

1) จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน f

2) จงหาเรนจ์ของฟังก์ชัน f

3) จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

10. กำหนดฟังก์ชัน f จาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ โดย $f(x) = x^2 - 3x$

1) f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

2) f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงบน $\mathbb{R}$ หรือไม่

11. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเสมอหรือไม่ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

1) โดเมนของ f คือ A

2) เรนจ์ของ f คือ B

3) ถ้า (a, b) และ (a, b') เป็นสมาชิกของ f แล้ว $b = b'$

4) ถ้า (a, b) และ (a', b) เป็นสมาชิกของ f แล้ว $a = a'$

12. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือเป็นฟังก์ชันลดบนเซตที่กำหนดให้

1) $f(x)=x$ บน $[-4,-2]$

2) $f(x)=|x+1|$ บน $[-5,-2]$

3) $f(x)=1-2x^2$ บน $(0,\infty)$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ บน $(1,3)$

5) $f(x)=3x^2-8x+10$ บน $[1,7]$

13. พิจารณาฟังก์ชัน $f=\{(1,0),(2,1),(3,0),(4,1)\}$ และ $g=\{(2,0),(3,1),(4,2),(5,3)\}$

1) จงเขียน $f+g,\ f-g,\ fg,\ \dfrac{f}{g}$ และ $\dfrac{g}{f}$ แบบแจกแจงสมาชิก

2) จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f+g,\ f-g,\ fg,\ \dfrac{f}{g}$ และ $\dfrac{g}{f}$ มีฟังก์ชันใดบ้างเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

14. กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{x}$ และ $g(x)=\sqrt{1-x}$ จงหา

1) โดเมนของ f และโดเมนของ g

2) โดเมนของ $f+g$ และฟังก์ชัน $f+g$

3) โดเมนของ $\dfrac{f}{g}$ และฟังก์ชัน $\dfrac{f}{g}$

15. กำหนดให้

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ,\ x\le 0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$$

และ $g(x)=x+1$

1) จงหาโดเมนของ $\frac{f}{g}$

2) จงหาโดเมนของ $\frac{g}{f}$

16. จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x)=\sqrt{2-\frac{4}{x}}$

2) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

4) $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{x+7}$

17. จงหาโดเมนของ $f\circ g$ ต่อไปนี้

1) $f(x)=2x$ และ $g(x)=x+1$

2) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ และ $g(x)=x^2$

3) $f(x)=\sqrt{x}$ และ $g(x)=1-x^2$

4) $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,8)\}$ และ $g=f\circ f$

18. กำหนดให้ $f(x)=2x+1$ และ $g(x)=x^2$ จงหา

1) $f(g(3))$ และ $g(f(3))$

2) $(f\circ g)(-1)$ และ $(g\circ f)(-1)$

3) $(f\circ f)(-1)$ และ $(g\circ g)(2)$

4) $(f+g)(-1)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$

19. กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{9-x}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $f\circ f$

20. จงหาฟังก์ชันผกผันของ f

1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

2) $f(x)=4-3x^2$ เมื่อ $x\le 0$

3) $f(x)=2+\sqrt[3]{x-1}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$

21. จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) กำหนดให้ $f(x)=x+1$ จงหา $f^{-1}(0)$

2) กำหนดให้ $f(x)=x^2+1$ เมื่อ $x\ge 0$ จงหา $f^{-1}(5)$

3) กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{6}{2x+1}$ จงหา $f^{-1}(2)$

4) กำหนดให้ $f(x)=-1+\sqrt[3]{x+2}$ จงหา $f^{-1}(3)$

22. พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$r_1=\{(x,y)\mid xy=2x\}$ $\qquad$ $r_2=\{(x,y)\mid y=2 \text{ และ } x\ne 0\}$

$s_1=\{(x,y)\mid x^2y=1\}$ $\qquad$ $s_2=\left\{(x,y)\mid y=\dfrac{1}{x^2}\right\}$

1) บุปผากล่าวว่า $r_1=r_2$ โดยให้เหตุผลว่า เมื่อ $xy=2x$ แล้วสามารถหารด้วย x ที่ $x\ne 0$ ทั้งสองข้างของสมการได้ จึงได้ว่า $y=2$ และ $x\ne 0$ ในทางกลับกัน ถ้า $y=2$ และ $x\ne 0$ แล้วคูณ x ทั้งสองข้างของสมการ $y=2$ จะได้ $xy=2x$ ดังนั้น ความสัมพันธ์ $\{(x,y)\mid xy=2x\}$ จึงเป็นความสัมพันธ์เดียวกับความสัมพันธ์ $\{(x,y)\mid y=2 \text{ และ } x\ne 0\}$

การให้เหตุผลและข้อสรุปของบุปผาถูกต้องหรือไม่ จงอภิปราย

2) ผกากล่าวว่า $s_1=s_2$ โดยให้เหตุผลว่า เมื่อ $x^2y=1$ แล้วจะได้ว่า $x^2\ne 0$ ดังนั้น สามารถหารด้วย x^2 ทั้งสองข้างของสมการได้ จึงได้ว่า $y=\dfrac{1}{x^2}$

ในทางกลับกัน ถ้า $y=\frac{1}{x^2}$ เมื่อ $x^2 \neq 0$ แล้วคูณ x^2 ทั้งสองข้างของสมการ จะได้ $x^2y=1$ ดังนั้น ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x^2y=1\}$ จึงเป็นความสัมพันธ์เดียวกับความสัมพันธ์ $\left\{(x, y) \mid y=\frac{1}{x^2}\right\}$

การให้เหตุผลและข้อสรุปของผกาถูกต้องหรือไม่ จงอภิปราย

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. 1) คู่อันดับ $(x, y) \in A \times B$ จะเป็นสมาชิกของ r ก็ต่อเมื่อ $x=0$ หรือ $y=0$

ดังนั้น จะสามารถเขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้เป็น

$r=\{(-2, 0), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 0)\}$

2) จากข้อ 1) จะได้ $D_r=\{-2, 0, 2\}$

3) จากข้อ 1) จะได้ $R_r=\{0, 1, 2, 3\}$

4) r ไม่เป็นความสัมพันธ์บนเซต A เนื่องจาก $r \not\subset A \times A$

เช่น $(0,1)$ เป็นสมาชิกของ r แต่ $1 \notin A$ นั่นคือ $(0,1) \notin A \times A$

5) r ไม่เป็นความสัมพันธ์บนเซต B เนื่องจาก $r \not\subset B \times B$

เนื่องจาก $(-2, 0)$ เป็นสมาชิกของ r แต่ $-2 \notin B$ นั่นคือ $(-2, 0) \notin B \times B$

6) r เป็นความสัมพันธ์บน $A \cup B$

เนื่องจาก $A \subset A \cup B$ และ $B \subset A \cup B$

และ $r \subset A \times B$

ดังนั้น $r \subset (A \cup B) \times (A \cup B)$

2. 1) $r_1=\{(3, 2), (6, 1)\}$

2) $r_2=\{(1, 6), (2, 3)\}$

3) จาก $r_1 = \{(3, 2), (6, 1)\}$

จะได้ $r_1^{-1} = \{(1, 6), (2, 3)\} = r_2$

ดังนั้น r_2 เป็นตัวผกผันของ r_1

4) จาก $r_2 = \{(1, 6), (2, 3)\}$

จะได้ $r_2^{-1} = \{(3, 2), (6, 1)\} = r_1$

ดังนั้น r_1 เป็นตัวผกผันของ r_2

3. 1) $D_{r_1} = \{-5, -3, 0, 1, 3\}$ และ $R_{r_1} = \{-2, 0, 1, 2\}$

2) จาก $x + y = 1$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $y = 1 - x$

จะเห็นว่า $1 - x \in \mathbb{Z}$ จึงจะทำให้ $y \in \mathbb{Z}$ นั่นคือ $x \in \mathbb{Z}$

และจาก $x + y = 1$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $x = 1 - y$

จะเห็นว่า $1 - y \in \mathbb{Z}$ จึงจะทำให้ $x \in \mathbb{Z}$ นั่นคือ $y \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $D_{r_2} = \mathbb{Z}$ และ $R_{r_2} = \mathbb{Z}$

3) จาก $xy = 1$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $y = \frac{1}{x}$

จะเห็นว่า $x = -1$ หรือ $x = 1$ จึงจะทำให้ $y \in \mathbb{Z}$ นั่นคือ $x \in \{-1, 1\}$

และจาก $xy = 1$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $x = \frac{1}{y}$

จะเห็นว่า $y = -1$ หรือ $y = 1$ จึงจะทำให้ $x \in \mathbb{Z}$ นั่นคือ $y \in \{-1, 1\}$

ดังนั้น $D_{r_3} = \{-1, 1\}$ และ $R_{r_3} = \{-1, 1\}$

4) เนื่องจาก $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ เป็นจริงทุกจำนวนจริง x และ y

ดังนั้น $r_4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ จึงได้ว่า $D_{r_4} = \mathbb{R}$ และ $R_{r_4} = \mathbb{R}$

5) จาก $y = \sqrt{x^2 + 9}$

เนื่องจาก $x^2 + 9 \geq 0$ เสมอ

ดังนั้น $x^2+9\geq 0$ เป็นอสมการที่มีเซตคำตอบ คือ $\mathbb{R}$ นั่นคือ $x\in\mathbb{R}$

เนื่องจาก $\sqrt{x^2+9}$ ไม่เป็นจำนวนลบ และเมื่อแทน x ด้วย 0 จะได้ค่าน้อยที่สุดเป็น 3

นั่นคือ $y\in[3,\infty)$

ดังนั้น $D_{r_5}=\mathbb{R}$ และ $R_{r_6}=[3,\infty)$

6) จาก $y=\sqrt{x^2-9}$

เนื่องจาก $x^2-9\geq 0$ เสมอ

ดังนั้น $x^2-9\geq 0$ เป็นอสมการที่มีเซตคำตอบ คือ $\{x \mid x\leq -3\cup x\geq 3\}$

นั่นคือ $x\in(\infty,-3]\cup[3,\infty)$

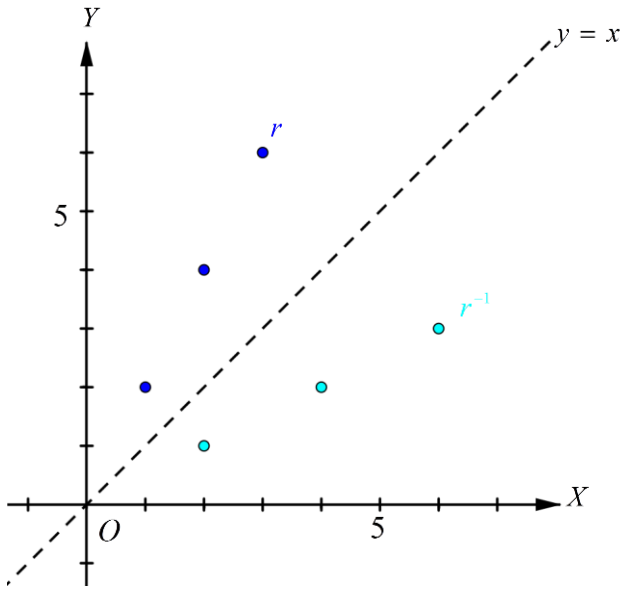
เนื่องจาก $\sqrt{x^2-9}$ ไม่เป็นจำนวนลบ

และเมื่อแทน x ด้วย -3 หรือ 3 จะได้ค่าน้อยที่สุดเป็น 0

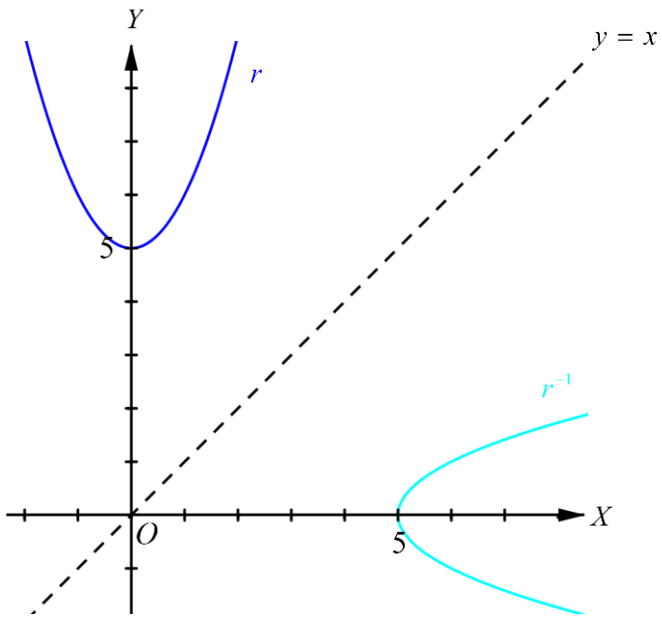
นั่นคือ $y\in[0,\infty)$

ดังนั้น $D_{r_6}=(\infty,-3]\cup[3,\infty)$ และ $R_{r_6}=[0,\infty)$

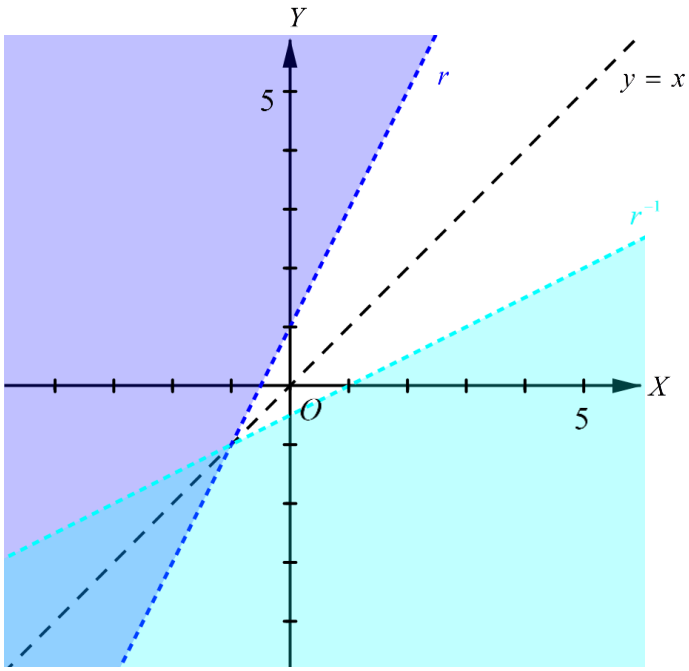
4. 1)



2)



3)



5. 1) r_1 เป็นฟังก์ชัน

เพราะไม่มีสมาชิกใดในโดเมนของ r_1 จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r_1 มากกว่า 1 ตัว

2) r_2 เป็นฟังก์ชัน

เพราะถ้า $(x, y_1) \in r_2$ และ $(x, y_2) \in r_2$ แล้ว

จะได้ $xy_1 = 1$ และ $xy_2 = 1$ ซึ่ง $y_1 = \frac{1}{x} = y_2$ เมื่อ $x \neq 0$

3) r_3 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ $(0, 1)$ และ $(0, 2)$ เป็นสมาชิกของ r_3

4) r_4 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ $(1, -1)$ และ $(1, 1)$ เป็นสมาชิกของ r_4

5) r_5 เป็นฟังก์ชัน เพราะถ้า $(x, y_1) \in r_5$ และ $(x, y_2) \in r_5$ แล้ว $y_1 = \sqrt{x} = y_2$

เมื่อ $x \geq 0$

6. 1) $r = \{(0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$ และ

$r^{-1} = \{(-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$

2) r ไม่เป็นฟังก์ชัน

เนื่องจาก $(0, -2) \in r$ และ $(0, -1) \in r$ แต่ $-2 \neq -1$

3) r^{-1} เป็นฟังก์ชัน

เพราะไม่มีสมาชิกใดในโดเมนของ r^{-1} จับคู่กับสมาชิกในเรนจ์ของ r^{-1} มากกว่า 1 ตัว

7. 1) ฟังก์ชัน f นิยามที่ทุก $x \in \mathbb{R}$

ดังนั้น $D_f = \mathbb{R}$

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ ดังนั้น $x^2 + 3 \geq 3$

จะได้ว่า $R_f = [3, \infty)$

2) ฟังก์ชัน f จะนิยาม เมื่อ $x - 1 \geq 0$

นั่นคือ $x \geq 1$

ดังนั้น $D_f = [1, \infty)$

ให้ $y = f(x) = \sqrt{x-1}$ เมื่อ $x \geq 1$

จะได้ $x = y^2 + 1$ เมื่อ $x \geq 1$ และ $y \geq 0$

ดังนั้น $y^2 + 1 \geq 1$

นั่นคือ $y^2 \geq 0$

ดังนั้น $R_f = [0, \infty)$

3) ฟังก์ชัน f จะนิยาม เมื่อ $|x+2| \neq 0$ นั่นคือ $x \neq -2$

ดังนั้น $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

เนื่องจาก $\dfrac{1}{|x+2|} > 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq -2$

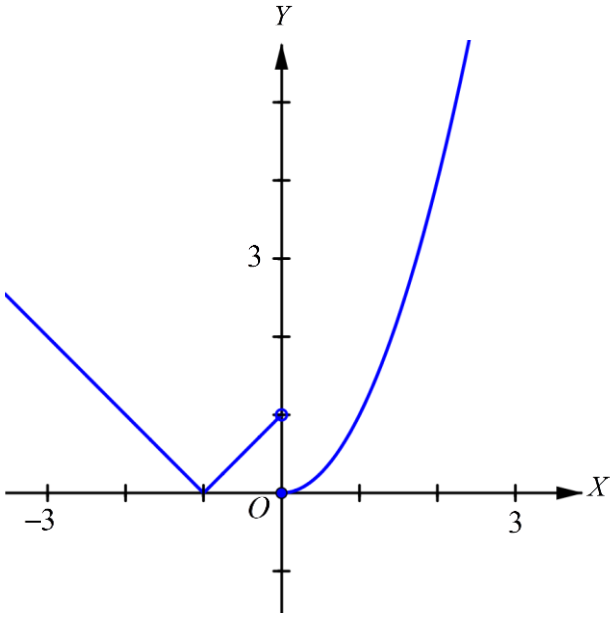
ดังนั้น $R_f = (0, \infty)$

8. จาก $f(x) = x(x-4)(x-8)$ จะได้

$$f(1) = 1(1-4)(1-8) = 1\cdot(-3)\cdot(-7) = 21$$
$$f(2) = 2(2-4)(2-8) = 2\cdot(-2)\cdot(-6) = 24$$
$$f(3) = 3(3-4)(3-8) = 3\cdot(-1)\cdot(-5) = 15$$
$$f(4) = 4(4-4)(4-8) = 4\cdot(0)\cdot(-4) = 0$$
$$f(5) = 5(5-4)(5-8) = 5\cdot(1)\cdot(-3) = -15$$
$$f(6) = 6(6-4)(6-8) = 6\cdot(2)\cdot(-2) = -24$$
$$f(7) = 7(7-4)(7-8) = 7\cdot(3)\cdot(-1) = -21$$
$$f(8) = 8(8-4)(8-8) = 8\cdot(4)\cdot(0) = 0$$

ดังนั้น $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(8) = 0$

9. 1)



2) เมื่อ $x<0$ จะได้ $f(x)=|x+1|$ นั่นคือ $f(x)\geq 0$

และเมื่อ $x\geq 0$ จะได้ $f(x)=x^2$ นั่นคือ $f(x)\geq 0$

ดังนั้น $R_f=[0,\infty)$

3) f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เนื่องจาก $f(-5)=|(-5)+1|=4$ และ $f(2)=2^2=4$

นั่นคือ $(-5,4)\in f$ และ $(2,4)\in f$ แต่ $-5\neq 2$

10. 1) f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เนื่องจาก $f(0)=0^2-3\cdot 0=0$ และ $f(3)=3^2-3\cdot 3=0$

นั่นคือ $(0,0)\in f$ และ $(3,0)\in f$ แต่ $0\neq 3$

2) f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึงบน $\mathbb{R}$

จาก $f(x)=x^2-3x$ จะได้ว่า $D_f=\mathbb{R}$

แต่สำหรับทุกจำนวนจริง x จะได้ว่า $f(x)=x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\geq-\frac{9}{4}$

นั่นคือ $R_f=\left[-\frac{9}{4},\infty\right)$ ซึ่ง $\left[-\frac{9}{4},\infty\right)\neq\mathbb{R}$

ดังนั้น $R_f\neq\mathbb{R}$

11. 1) เป็นจริงเสมอ โดยบทนิยามของฟังก์ชัน $f:A\to B$

2) ไม่เป็นจริง เช่น $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ที่นิยามโดย $f(x)=0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

จะได้ว่า $R_f=\{0\}$ ซึ่ง $R_f\subset\mathbb{R}$ แต่ $R_f\neq\mathbb{R}$

3) เป็นจริง โดยบทนิยามของฟังก์ชัน จะได้ว่า $b=f(a)=b'$

4) ไม่เป็นจริง เช่น $f(x)=x^2$ จะได้ว่า $(-1,1),(1,1)\in f$ โดยที่ $-1\neq1$

12. 1) สำหรับ $f(x)=x$ บนช่วง $[-4,-2]$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $[-4,-2]$ ซึ่ง $x_1<x_2$

จะได้ $f(x_1)<f(x_2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-4,-2]$

2) สำหรับ $f(x)=|x+1|$ บนช่วง $[-5,-2]$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $[-5,-2]$ ซึ่ง $x_1<x_2$

จะได้ $x_1+1 < x_2+1$

เนื่องจาก $x_1\in[-5,-2]$ และ $x_1\in[-5,-2]$

จะได้ $x_1+1<0$ และ $x_2+1<0$

ดังนั้น $|x_1+1| > |x_2+1|$

นั่นคือ $f(x_1) > f(x_2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-5,-2]$

3) สำหรับ $f(x)=1-2x^2$ บนช่วง $(0,\infty)$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $(0,\infty)$ ซึ่ง $x_1<x_2$

จะได้
$$\begin{aligned} x_1^2 &< x_2^2 \\ -2x_1^2 &> -2x_2^2 \\ 1-2x_1^2 &> 1-2x_2^2 \end{aligned}$$

นั่นคือ $f(x_1) > f(x_2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0,\infty)$

4) สำหรับ $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ บนช่วง $(1,3)$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $(1,3)$ ซึ่ง $x_1<x_2$

จะได้
$$\begin{aligned} x_1+2 &< x_2+2 \\ \frac{1}{x_1+2} &> \frac{1}{x_2+2} \end{aligned}$$

นั่นคือ $f(x_1) > f(x_2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(1,3)$

5) **วิธีที่ 1** พิจารณา $x_1=1$ และ $x_2=\dfrac{5}{3}$

นั่นคือ $x_1\in[1,7]$, $x_2\in[1,7]$ และ $x_1<x_2$

จะได้ $f(1)=3\cdot 1^2-8\cdot 1+10=5$ และ $f\left(\dfrac{5}{3}\right)=3\left(\dfrac{5}{3}\right)^2-8\left(\dfrac{5}{3}\right)+10=5$

นั่นคือ $f(x_1)=f(x_2)$

จะเห็นว่า $x_1<x_2$ แต่ $f(x_1)\not< f(x_2)$ และ $f(x_1)\not> f(x_2)$

ดังนั้น f ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดบนช่วง $[1,7]$

วิธีที่ 2 (สำหรับกรณีที่นักเรียนมีความรู้เกี่ยวกับพาราโบลามาแล้ว)

จาก $f(x) = 3x^2 - 8x + 10$

จะได้กราฟของ f เป็นพาราโบลาหงายที่มีจุดยอดอยู่ที่ $\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ และเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$

ดังนั้น f ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดบนช่วง $[1, 7]$

13. 1) เนื่องจากโดเมนของ f คือ $\{1, 2, 3, 4\}$ และโดเมนของ g คือ $\{2, 3, 4, 5\}$

จะได้โดเมนของ $f+g$, $f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = \{2, 3, 4\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = \{3, 4\}$

และได้โดเมนของ $\frac{g}{f}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_f \mid f(x) = 0\} = \{2, 4\}$

จะได้ $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 1 + 0 = 1$

$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 1 = 1$

$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = 1 + 2 = 3$

ดังนั้น $f + g = \{(2, 1), (3, 1), (4, 3)\}$

จะได้ $(f-g)(2) = f(2) - g(2) = 1 - 0 = 1$

$(f-g)(3) = f(3) - g(3) = 0 - 1 = -1$

$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = 1 - 2 = -1$

ดังนั้น $f - g = \{(2, 1), (3, -1), (4, -1)\}$

จะได้ $(fg)(2) = f(2)g(2) = (1)(0) = 0$

$(fg)(3) = f(3)g(3) = (0)(1) = 0$

$(fg)(4) = f(4)g(4) = (1)(2) = 2$

ดังนั้น $fg = \{(2, 0), (3, 0), (4, 2)\}$

จะได้ $\left(\frac{f}{g}\right)(3)=\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{0}{1}=0$

$\left(\frac{f}{g}\right)(4)=\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\frac{f}{g}=\left\{(3,0),\left(4,\frac{1}{2}\right)\right\}$

จะได้ $\left(\frac{g}{f}\right)(2)=\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{0}{1}=0$

$\left(\frac{g}{f}\right)(4)=\frac{g(4)}{f(4)}=\frac{2}{1}=2$

ดังนั้น $\frac{g}{f}=\{(2,0),(4,2)\}$

2) พิจารณา $f+g$

เนื่องจาก $(2,1)\in f+g$ และ $(3,1)\in f+g$ แต่ $2\neq 3$

ดังนั้น $f+g$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิจารณา $f-g$

เนื่องจาก $(3,-1)\in f-g$ และ $(4,-1)\in f-g$ แต่ $3\neq 4$

ดังนั้น $f-g$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิจารณา fg

เนื่องจาก $(2,0)\in fg$ และ $(3,0)\in fg$ แต่ $2\neq 3$

ดังนั้น fg ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิจารณา $\frac{f}{g}$

จะเห็นว่าไม่มีคู่อันดับใดใน $\frac{f}{g}$ ที่มีสมาชิกตัวหลังเหมือนกัน

ดังนั้น $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

พิจารณา $\frac{g}{f}$

จะเห็นว่าไม่มีคู่อันดับใดใน $\frac{g}{f}$ ที่มีสมาชิกตัวหลังเหมือนกัน

ดังนั้น $\frac{g}{f}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

14. 1) ฟังก์ชัน f จะนิยาม เมื่อ $x \geq 0$

ดังนั้น $D_f = [0, \infty)$

ฟังก์ชัน g จะนิยาม เมื่อ $1 - x \geq 0$

นั่นคือ เมื่อ $x \leq 1$

ดังนั้น $D_g = (-\infty, 1]$

2) โดเมนของ $f + g$ คือ $D_f \cap D_g = [0, 1]$ สำหรับแต่ละ $x \in [0, 1]$

จะได้ $(f+g)(x) = (f)(x) + (g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

3) โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = [0, 1] - \{1\} = [0, 1)$

สำหรับแต่ละ $x \in [0, 1)$

จะได้ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

15. 1) โดเมนของ f คือ $D_f = \mathbb{R}$

โดเมนของ g คือ $D_g = \mathbb{R}$

จำนวนจริง $x \in D_g$ ที่ทำให้ $g(x) = 0$ มีจำนวนเดียวคือ $x = -1$

ดังนั้น โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$

2) สำหรับจำนวนจริง x สังเกตว่า $f(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \le 0$ หรือ $x = 1$

ดังนั้น โดเมนของ $\frac{g}{f}$ คือ

$$D_f \cap D_g - \{x \in D_f \mid f(x) = 0\} = \mathbb{R} - ((-\infty, 0] \cup \{1\}) = (0, 1) \cup (1, \infty)$$

16. 1) ฟังก์ชัน f จะนิยาม เมื่อ $2 - \frac{4}{x} \ge 0$

พิจารณา $2 - \frac{4}{x} \ge 0$

จะได้ $\frac{2x-4}{x} \ge 0$

$\frac{x-2}{x} \ge 0$

นั่นคือ $x < 0$ หรือ $x \ge 2$

ดังนั้น $D_f = (-\infty, 0) \cup [2, \infty)$

2) ฟังก์ชัน f จะนิยาม เมื่อ $x \ne 0$ และ $x \ne 1$

ดังนั้น $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

3) ฟังก์ชัน f จะนิยาม เมื่อ $\sqrt{x+1} > 0$ นั่นคือ $x + 1 > 0$ จะได้ $x > -1$

ดังนั้น $D_f = (-1, \infty)$

4) ฟังก์ชัน f จะนิยาม เมื่อ $x + 5 \ge 0$ และ $x + 7 \ge 0$ จะได้ $x \ge -5$ และ $x \ge -7$

จะได้ว่า $D_f = [-5, \infty)$

17. 1) จาก $f(x)=2x$ และ $g(x)=x+1$

จะได้ $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}$ และ $R_g=\mathbb{R}$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f=\mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f\circ g$

จาก
$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid x+1\in\mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น โดเมนของ $f\circ g$ คือ $\mathbb{R}$

2) จาก $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ และ $g(x)=x^2$

จะได้ $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$, $D_g=\mathbb{R}$ และ $R_g=\mathbb{R}^+$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f=\mathbb{R}^+-\{1\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f\circ g$

จาก
$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid x^2\in\mathbb{R}-\{1\}\} \\ &= \mathbb{R}-\{-1,1\} \end{aligned}$$

ดังนั้น โดเมนของ $f\circ g$ คือ $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

3) จาก $f(x)=\sqrt{x}$ และ $g(x)=1-x^2$

จะได้ $D_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, $D_g=\mathbb{R}$ และ $R_g=(-\infty,1]$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f=[0,1]$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f\circ g$

จาก
$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid 1-x^2\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}\} \\ &= [-1,1] \end{aligned}$$

ดังนั้น โดเมนของ $f\circ g$ คือ $[-1,1]$

4) จาก $f(x)=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,8)\}$

จะได้ $D_f=\{1,2,3,4,5\}$ และ $R_f=\{2,3,4,5,8\}$

เนื่องจาก $R_f \cap D_f=\{2,3,4,5\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ f$

วิธีที่ 1 จาก f ที่กำหนดให้

จะได้ $f \circ f = f(f(x))$

$= \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,8)\}$

เนื่องจาก $g=f \circ f$ จะได้ $g=\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,8)\}$

ซึ่งมี $D_g=\{1,2,3,4\}$ และ $R_g=\{3,4,5,8\}$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f=\{3,4,5\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$

เนื่องจาก $g(1)=3$ และ $f(3)=4$ ดังนั้น $f \circ g(1)=4$

เนื่องจาก $g(2)=4$ และ $f(4)=5$ ดังนั้น $f \circ g(2)=5$

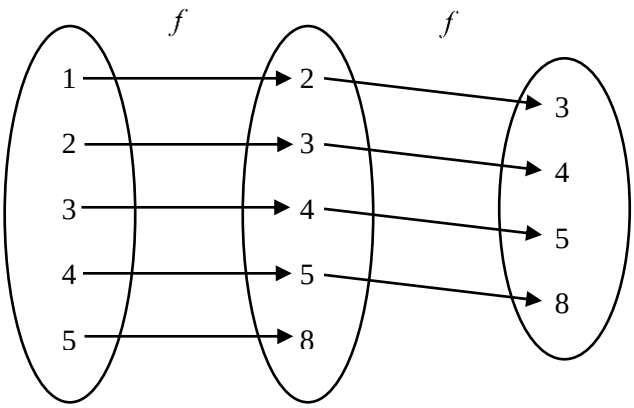
เนื่องจาก $g(3)=5$ และ $f(5)=8$ ดังนั้น $f \circ g(3)=8$

เนื่องจาก $g(4)=8$ แต่ $8 \notin D_f$ ดังนั้น $4 \notin D_{f \circ g}$

จะได้ $f \circ g=\{(1,4),(2,5),(3,8)\}$

ดังนั้น โดเมนของ $f \circ g$ คือ $\{1,2,3\}$

วิธีที่ 2 เขียนแสดง $f \circ f$ ด้วยแผนภาพได้ดังนี้



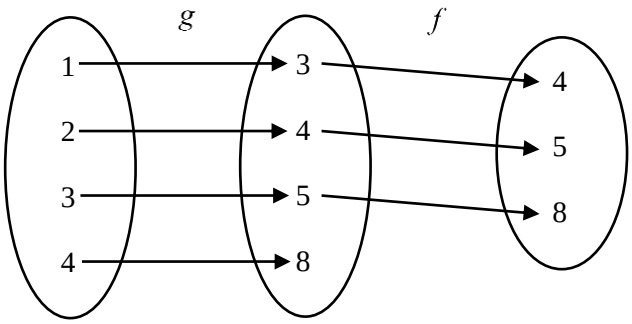
จากแผนภาพจะได้ $f \circ f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 8)\}$

เนื่องจาก $g = f \circ f$ จะได้ $g = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 8)\}$

ซึ่งมี $D_g = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $R_g = \{3, 4, 5, 8\}$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \{3, 4, 5\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$

เขียนแสดง $f \circ g$ ด้วยแผนภาพได้ดังนี้



จากแผนภาพจะได้ $f \circ g = \{(1, 4), (2, 5), (3, 8)\}$

ดังนั้น โดเมนของ $f \circ g$ คือ $\{1, 2, 3\}$

18. จาก $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = x^2$

จะได้ $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ f$

เนื่องจาก $R_f \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ f$

เนื่องจาก $R_g \cap D_g = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ g$

1) $f(g(3)) = f(3^2) = f(9) = 2(9) + 1 = 19$

$g(f(3)) = g(2(3) + 1) = g(7) = 7^2 = 49$

2) $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f\left((-1)^2\right)=f(1)=2(1)+1=3$

$(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(2(-1)+1)=g(-1)=(-1)^2=1$

3) $(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(2(-1)+1)=f(-1)=2(-1)+1=-1$

$(g\circ g)(2)=g(g(2))=g(2^2)=g(4)=4^2=16$

4) $(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)=2(-1)+1+(-1)^2=0$

$\left(\frac{f}{g}\right)(-1)=\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{2(-1)+1}{(-1)^2}=-1$

19. จาก $f(x)=\sqrt{9-x}$

เนื่องจาก $9-x\geq 0$ และ $\sqrt{9-x}\geq 0$ เสมอ

จะได้ $D_f=(-\infty,9]$ และ $R_f=[0,\infty)$

เนื่องจาก $R_f\cap D_f=[0,9]$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f\circ f$

จาก
$$\begin{aligned} D_{f\circ f} &= \{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\} \\ &= \left\{x\in(-\infty,9] \;\middle|\; \sqrt{9-x}\in(-\infty,9]\right\} \\ &= \left\{x\in(-\infty,9] \;\middle|\; 0\leq\sqrt{9-x}\leq 9\right\} \end{aligned}$$

พิจารณา $0\leq\sqrt{9-x}\leq 9$ จะได้ $0\leq 9-x\leq 81$ นั่นคือ $-72\leq x\leq 9$

เนื่องจาก $x\in(-\infty,9]$ จะได้ $D_{f\circ f}=[-72,9]$

จาก
$$\begin{aligned} f\circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f\left(\sqrt{9-x}\right) \\ &= \sqrt{9-\sqrt{9-x}} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $f\circ f(x)$ มีค่าต่ำสุด คือ 0 เมื่อ $x=-72$ และมีค่าสูงสุด คือ 3 เมื่อ $x=9$

จะได้ $R_{f\circ f}=[0,3]$

ดังนั้น โดเมนของ $f\circ f$ คือ $[-72,9]$ และเรนจ์ของ $f\circ f$ คือ $[0,3]$

20. 1) จาก $f=\left\{(x,y)\mid y=\dfrac{x+1}{x-1}\right\}$

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\frac{x_1+1}{x_1-1} &= \frac{x_2+1}{x_2-1}\\ (x_1+1)(x_2-1) &= (x_2+1)(x_1-1)\\ x_1x_2-x_1+x_2-1 &= x_1x_2-x_2+x_1-1\\ 2x_1 &= 2x_2\end{aligned}$$

นั่นคือ $x_1 = x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และโดยทฤษฎีบท f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

พิจารณาหาฟังก์ชันผกผันของ f โดยให้ $f(x)=y=\dfrac{x+1}{x-1}$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้
$$\begin{aligned}y(x-1) &= x+1\\ xy-y &= x+1\\ xy-x &= 1+y\\ x(y-1) &= 1+y\\ x &= \frac{y+1}{y-1}\end{aligned}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

2) จาก $f=\{(x,y)\mid y=4-3x^2, x\le 0\}$

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1\le 0, x_2\le 0$ และ $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า $4-3x_1^2 = 4-3x_2^2$

นั่นคือ $x_1 = x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และโดยทฤษฎีบท f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

พิจารณาหาฟังก์ชันผกผันของ f โดยให้ $f(x)=y=4-3x^2$ เมื่อ $x\le 0$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้
$$\begin{aligned} 3x^2 &= 4-y && \text{เมื่อ } x\le 0 \\ x^2 &= \frac{4-y}{3} && \text{เมื่อ } x\le 0 \\ x &= -\sqrt{\frac{4-y}{3}} \end{aligned}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=-\sqrt{\frac{4-x}{3}}$

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{4-x}{3}}$

3) จาก $f=\left\{(x,y)\mid y=2+\sqrt[3]{x-1}\right\}$

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} 2+\sqrt[3]{x_1-1} &= 2+\sqrt[3]{x_2-1} \\ \sqrt[3]{x_1-1} &= \sqrt[3]{x_2-1} \\ x_1-1 &= x_2-1 \end{aligned}$$

นั่นคือ
$$x_1 = x_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และโดยทฤษฎีบท f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

พิจารณาหาฟังก์ชันผกผันของ f โดยให้ $f(x)=y=2+\sqrt[3]{x-1}$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x-1} &= y-2 \\ x-1 &= (y-2)^3 \\ x &= (y-2)^3+1 \end{aligned}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=(x-2)^3+1$

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x)=(x-2)^3+1$

4) จาก $f=\left\{(x,y)\,|\,y=\dfrac{1}{1+x^3}\right\}$

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x_1^3} &= \frac{1}{1+x_2^3}\\ 1+x_1^3 &= 1+x_2^3\end{aligned}$$

นั่นคือ
$$x_1 = x_2$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และโดยทฤษฎีบท f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

พิจารณาหาฟังก์ชันผกผันของ f โดยให้ $f(x)=y=\dfrac{1}{1+x^3}$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้
$$\begin{aligned}y(1+x^3) &= 1\\ y+x^3y &= 1\\ x^3y &= 1-y\\ x^3 &= \frac{1-y}{y}\\ x &= \sqrt[3]{\frac{1-y}{y}}\end{aligned}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x}}$

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x}}$

21. 1) ให้ $a=f^{-1}(0)$

จะได้ว่า $f(a)=f\left(f^{-1}(0)\right)=0$

จาก $f(x)=x+1$

จะได้ $f(a)=a+1=0$ นั่นคือ $a=-1$

ดังนั้น $f^{-1}(0)=-1$

2) ให้ $b=f^{-1}(5)$

จะได้ว่า $f(b)=f\left(f^{-1}(5)\right)=5$ และ $b\geq 0$

จาก $f(x)=x^2+1$ เมื่อ $x\geq 0$

จะได้ว่า $f(b)=b^2+1=5$ นั่นคือ $b=-2$ หรือ 2

เนื่องจาก $b\geq 0$ จึงสรุปได้ว่า $b=2$

ดังนั้น $f^{-1}(5)=2$

3) ให้ $c=f^{-1}(2)$

จะได้ว่า $f(c)=f\left(f^{-1}(2)\right)=2$

จาก $f(x)=\dfrac{6}{2x+1}$

จะได้ว่า $f(c)=\dfrac{6}{2c+1}=2$ นั่นคือ $c=1$

ดังนั้น $f^{-1}(2)=1$

4) ให้ $d=f^{-1}(3)$

จะได้ว่า $f(d)=f\left(f^{-1}(3)\right)=3$

จาก $f(x)=-1+\sqrt[3]{x+2}$

จะได้ว่า $f(d)=-1+\sqrt[3]{d+2}=3$ นั่นคือ $d=62$

ดังนั้น $f^{-1}(3)=62$

22. 1) ข้อสรุปของบุปผาไม่ถูกต้อง

แนวคิดที่ 1 เนื่องจาก มี $(0, 0)$ ซึ่ง $(0, 0) \in r_1$ แต่ $(0, 0) \notin r_2$

แนวคิดที่ 2 จาก $xy = 2x$

จะได้ $xy - 2x = 0$

$x(y-2) = 0$

นั่นคือ $x = 0$ หรือ $y = 2$

ดังนั้น $r_1 = \{(x, y) \mid y = 2 \text{ หรือ } x = 0\}$

จะเห็นว่า $r_1 \neq r_2$ ซึ่งขัดแย้งกับข้อสรุปของบุปผา

2) การให้เหตุผลและข้อสรุปของผกาถูกต้อง

จากสมการ $x^2y = 1$ ผกาตรวจสอบแล้วว่า $x^2 \neq 0$

จึงได้ว่าการหารสมการดังกล่าวด้วย x^2 จึงไม่ทำให้สมการเปลี่ยนแปลง

ดังนั้น จาก $x^2y = 1$ จึงสามารถสรุปได้ว่า $y = \frac{1}{x^2}$

1.7 เฉลยแบบฝึกหัด

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 แบ่งการเฉลยแบบฝึกหัดเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่ 1 เฉลยคำตอบ และส่วนที่ 2 เฉลยคำตอบพร้อมวิธีทำอย่างละเอียด ซึ่งเฉลยแบบฝึกหัดที่อยู่ในส่วนนี้เป็นการเฉลยคำตอบของแบบฝึกหัด โดยไม่ได้นำเสนอวิธีทำ อย่างไรก็ตาม ครูสามารถศึกษาวิธีทำโดยละเอียดของแบบฝึกหัดได้ในส่วนท้ายของคู่มือครูเล่มนี้

แบบฝึกหัด 1.1

1. 1) $A \times B = \{(1, 3), (1, 6), (1, 7), (2, 3), (2, 6), (2, 7)\}$

$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (6, 1), (6, 2), (7, 1), (7, 2)\}$

2) $A\times B=\{(a,e),(a,f),(b,e),(b,f),(c,e),(c,f)\}$

$B\times A=\{(e,a),(e,b),(e,c),(f,a),(f,b),(f,c)\}$

3) $A\times B=\{(-3,1),(-3,2),(-3,3),(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-1,1),(-1,2),(-1,3)\}$

$B\times A=\{(1,-3),(1,-2),(1,-1),(2,-3),(2,-2),(2,-1),(3,-3),(3,-2),(3,-1)\}$

2. 1) จำนวนสมาชิกของ $A\times B$ คือ $n\times m=mn$

จำนวนสมาชิกของ $B\times A$ คือ $m\times n=mn$

จำนวนสมาชิกของ $A\times A$ คือ $n\times n=n^2$

จำนวนสมาชิกของ $B\times B$ คือ $m\times m=m^2$

3. 1) $(M\times N)\cup(M\times P)=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

2) $M\times(N\cup P)=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

3) $M\times(N\cap P)=\varnothing$

4) $(M\times N)\cap(M\times P)=\varnothing$

4. r เป็นความสัมพันธ์บนเซต E

5. 1) $r=\{(2,0),(2,1),(4,0),(4,1),(4,2)\}$

2) $r=\{(x,y)\in A\times B \mid x>y\}$

6. $r_1=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

$D_{r_1}=\{1,2,3,4,5\}=S$

$R_{r_1}=\{1,2,3,4,5\}=S$

$r_2=\{(3,3),(4,3),(5,3)\}$

$D_{r_2}=\{3,4,5\}$

$R_{r_2}=\{3\}$

$r_3=\varnothing$

$D_{r_3}=\varnothing$

$R_{r_3}=\varnothing$

7. 1) $D_r = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$R_r = \{0, 1, 4, 9\}$

2) $D_m = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$R_m = \{0, 1, \sqrt{2}\}$

3) $D_n = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z}$

$R_n = \mathbb{Z}$

4) $D_p = \mathbb{R}$

$R_p = \{\sqrt{2}\}$

5) $D_q = \mathbb{R}$

$R_q = [1, \infty)$

6) $D_s = \mathbb{Z}$

$R_s = \mathbb{N} \cup \{0\}$

7) $D_t = \mathbb{R}$

$R_t = [\sqrt{2}, \infty)$

8) $D_v = [-1, 1]$

$R_v = [0, 1]$

9) $D_w = \mathbb{R} - \{2\}$

$R_w = \mathbb{R} - \{0\}$

8. 1) $r^{-1} = \{(2, 1), (3, 4), (2, 2), (1, 2), (1, 3)\}$

$D_{r^{-1}} = \{1, 2, 3\}$

$R_{r^{-1}} = \{1, 2, 3, 4\}$

2) $r^{-1} = \{\ldots, (4, -5), (2, -3), (0, -1), (2, 1), (4, 3), (6, 5), \ldots\}$

$D_{r^{-1}} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

$R_{r^{-1}} = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

3) $r^{-1} = \left\{(x, y) \mid y = \dfrac{2-x}{3}\right\}$

$D_{r^{-1}} = \mathbb{R}$

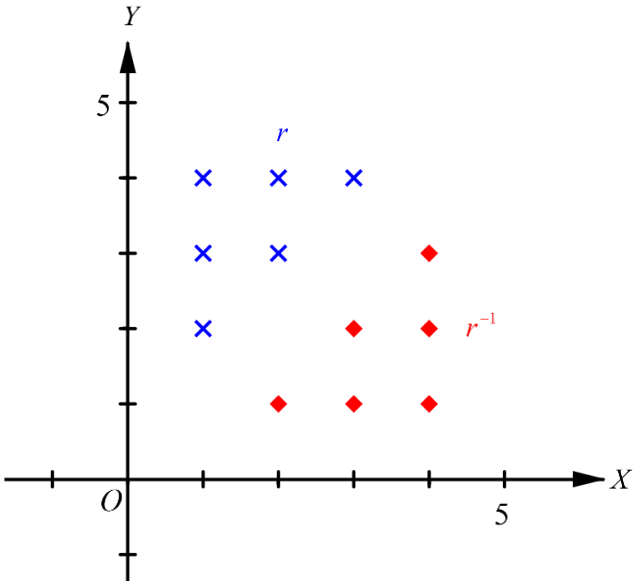
$R_{r^{-1}} = \mathbb{R}$

4) $r^{-1} = \{(x, y) \mid xy = 1\}$

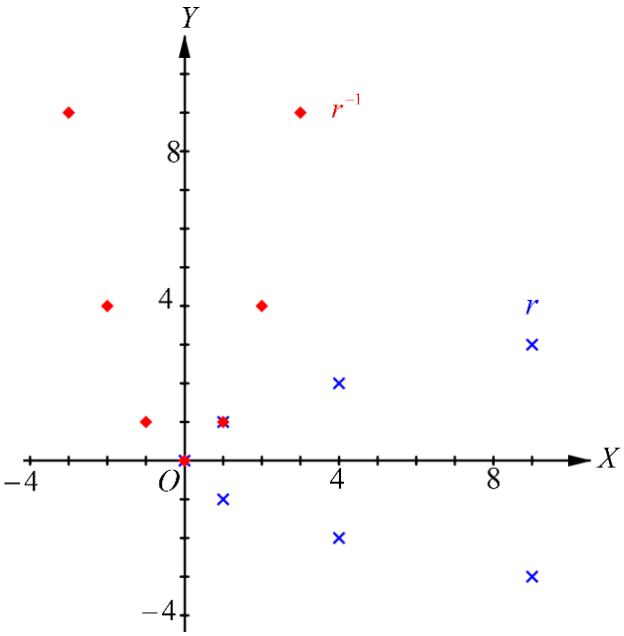
$D_{r^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\}$

$R_{r^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\}$

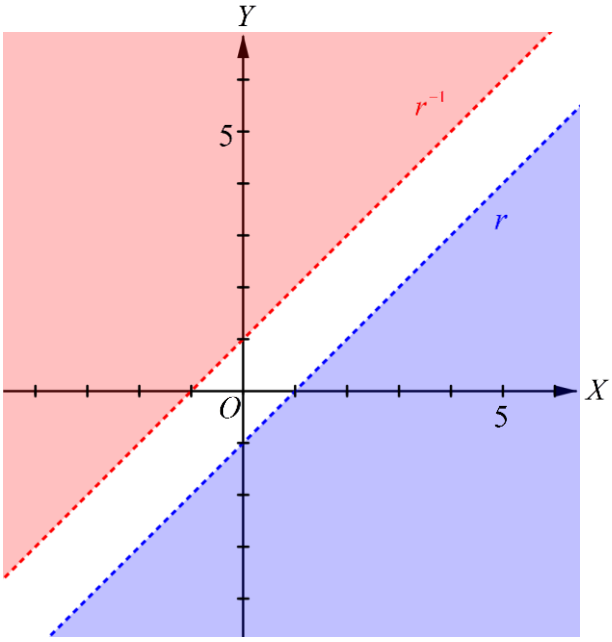
9. 1)



2)



3)



แบบฝึกหัด 1.2ก

1. 1) เป็นฟังก์ชัน 2) เป็นฟังก์ชัน
   3) ไม่เป็นฟังก์ชัน 4) เป็นฟังก์ชัน
2. 1) เป็นฟังก์ชัน 2) เป็นฟังก์ชัน
   3) ไม่เป็นฟังก์ชัน 4) เป็นฟังก์ชัน
   5) เป็นฟังก์ชัน 6) ไม่เป็นฟังก์ชัน
   7) เป็นฟังก์ชัน 8) ไม่เป็นฟังก์ชัน
3. 1) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน คือ $(3,b)$ และ $(3,c)$
   2) เป็นฟังก์ชัน

3) เป็นฟังก์ชัน

4) เป็นฟังก์ชัน

5) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะจาก $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ พบว่า 0 ซึ่งอยู่ในโดเมนจับคู่กับ 2 และ -2 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

6) เป็นฟังก์ชัน

7) เป็นฟังก์ชัน

8) เป็นฟังก์ชัน

9) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะจาก $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 3\}$ พบว่า 0 ซึ่งอยู่ในโดเมนจับคู่กับ 3 และ -3 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

4. 1) เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B 2) ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

3) เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B 4) เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

5. 1) $f(a) = 2$, $f(b) = 4$, $f(c) = 3$, $f(d) = 1$

2) $f(a) = 1$, $f(b) = 4$, $f(c) = 1$, $f(d) = 3$

6. 1) $f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

2) $f = \left\{\left(-2, -\frac{4}{5}\right), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), \left(2, \frac{4}{5}\right)\right\}$

3) $f = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, \sqrt{2}), (1, \sqrt{3}), (2, 2)\}$

4) $f = \{(-2, 1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

7. $f(-2) = 1$

$f(0) = 1$

$f(1) = 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

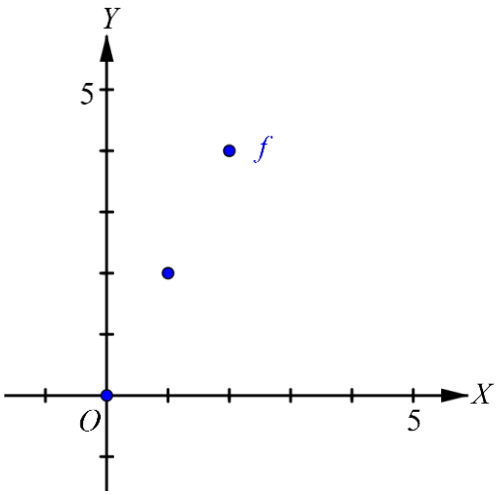
$f(9) = 2$

$f(3+h) - f(3) = 2-3 = -1$ เมื่อ $h > 0$

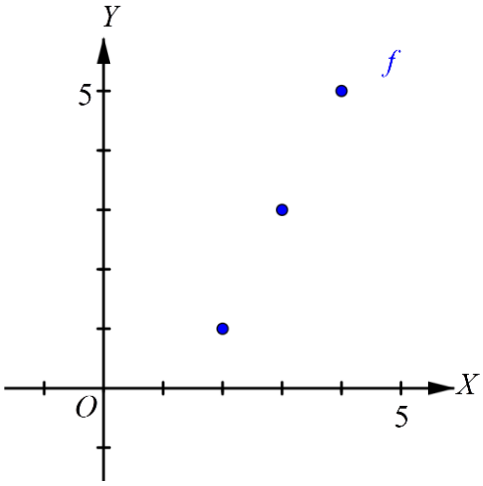
8. 1) $f(3+2)$ ไม่เท่ากับ $f(3)+f(2)$

2) $f(3\cdot 2)$ ไม่เท่ากับ $f(3)f(2)$

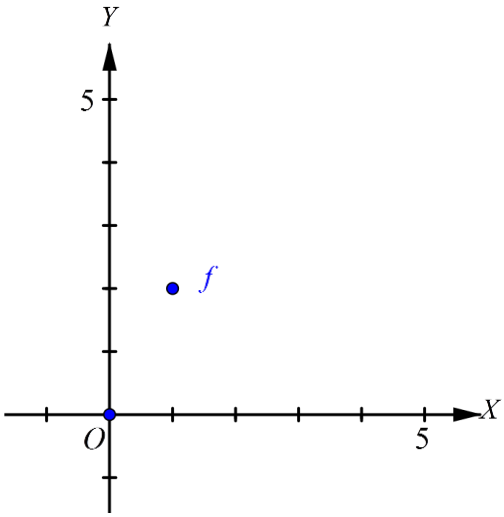
9. 1) $D_f = \{0, 1, 2\}$ และ $R_f = \{0, 2, 4\}$



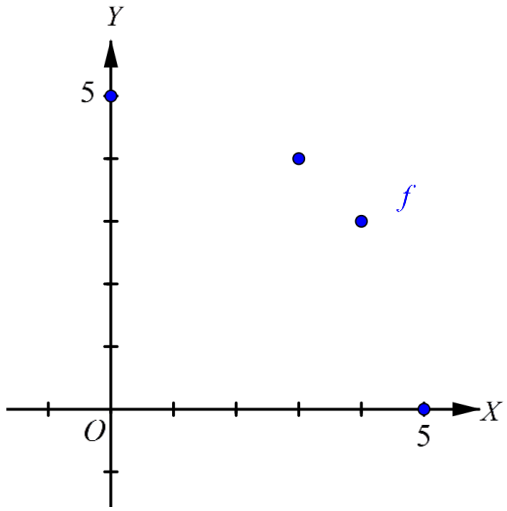
2) $D_f = \{2, 3, 4\}$ และ $R_f = \{1, 3, 5\}$



3) $D_f = \{0, 1\}$ และ $D_f = \{0, 2\}$



4) $D_f = \{0, 3, 4, 5\}$ และ $R_f = \{0, 3, 4, 5\}$



10. 1) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $D_f = [-2, \infty)$ และ $R_f = [0, \infty)$

3) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-1, \infty)$

4) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [0, \infty)$

5) ไม่เป็นฟังก์ชัน

11. $R_h = \{y \in \mathbb{R} \mid -6 \le y < 10\}$

12. 1) f_1, f_2, f_4, f_5 และ f_6

2) f_2 และ f_5

3) f_3 และ f_7

4) ไม่มีฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B

5) f_4 และ f_6

6) f_2 และ f_5

7) f_7

8) f_7

13. 1) f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

3) h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

แบบฝึกหัด 1.2ข

1. 1) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-1, 1]$ และ $[2, 4]$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[1, 2]$

2) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, 1]$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-2, 0]$ และ $[1, 4]$

3) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-2, -1]$ และ $[1, 2]$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-3, -2], [-1, 1]$ และ $[2, 4]$

4) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-1, 1]$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-3, -1)$ และ $(1, 3]$

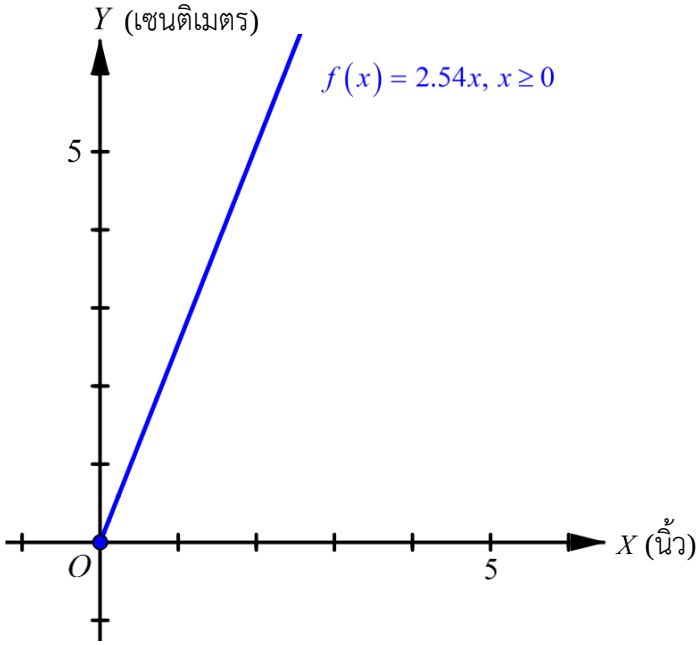
2. 1) f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, \infty)$ 2) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 0]$

3) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[2, 6]$ 4) f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0, 5]$

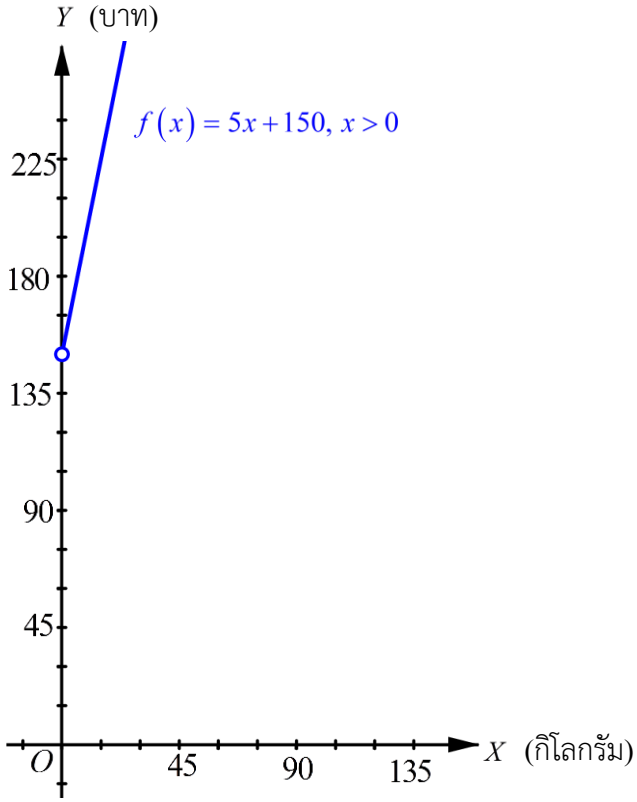
แบบฝึกหัด 1.3ก

1. 1) ข 2) ก 3) ค

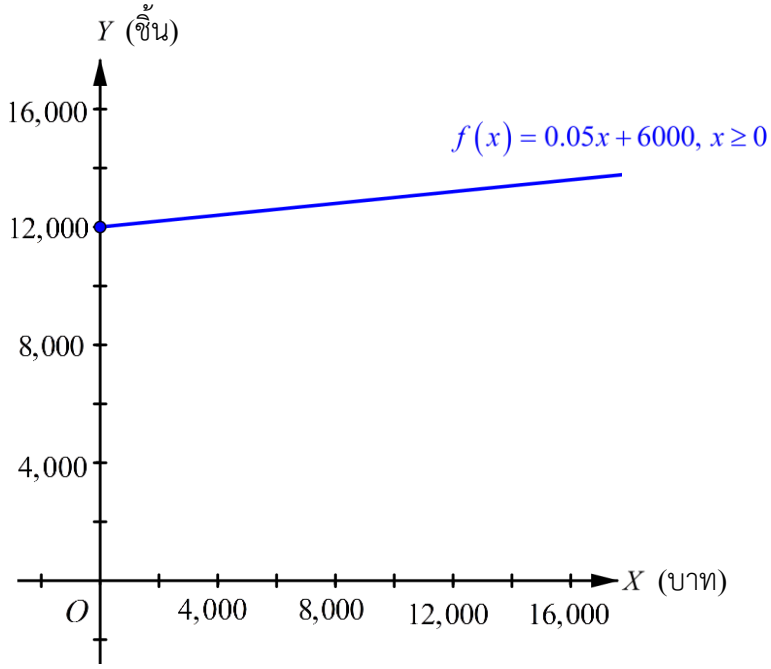
2. 1) $f(x) = 2.54x$ เป็นฟังก์ชันของความยาวที่มีหน่วยเป็นเซนติเมตร เมื่อ x เป็นความยาวที่มีหน่วยเป็นนิ้ว



2) $f(x)=5x+150$ เป็นฟังก์ชันของค่าขนส่งสินค้า x กิโลกรัม จากกรุงเทพฯ ไปยังจังหวัดที่อยู่ในเขตชายแดนภาคใต้



3) $f(x) = 0.05x + 6,000$ เป็นฟังก์ชันของรายรับ (บาท) ของพนักงานขายสินค้าที่มียอดขาย x บาท

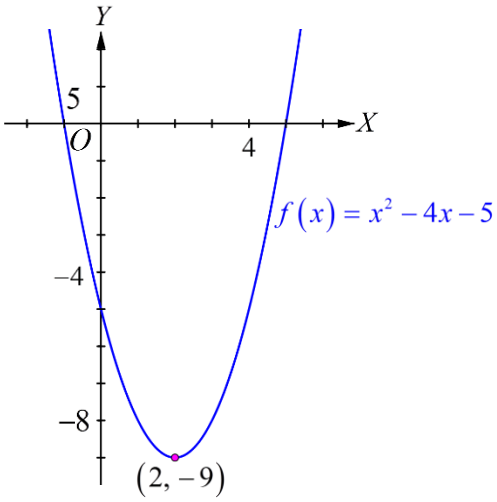


3. 1) $f(x) = 12,000 + 1,200x$ 2) 18,000 ชิ้น

แบบฝึกหัด 1.3ข

1. 1) ฌ 2) ญ
   3) ซ 4) ช
   5) ฉ 6) ข
   7) จ 8) ค
   9) ง 10) ก

2. 1)

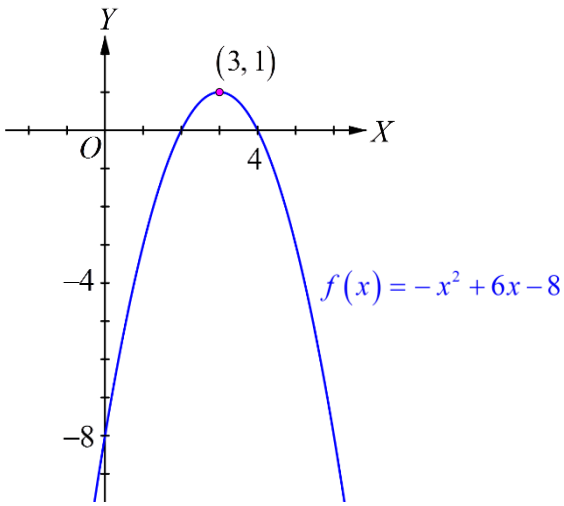


$D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-9, \infty)$

กราฟของ f มีจุดวกกลับที่จุด $(2, -9)$ และมีค่าต่ำสุด คือ -9

จุดตัดแกน x คือ $(-1, 0)$ และ $(5, 0)$

2)

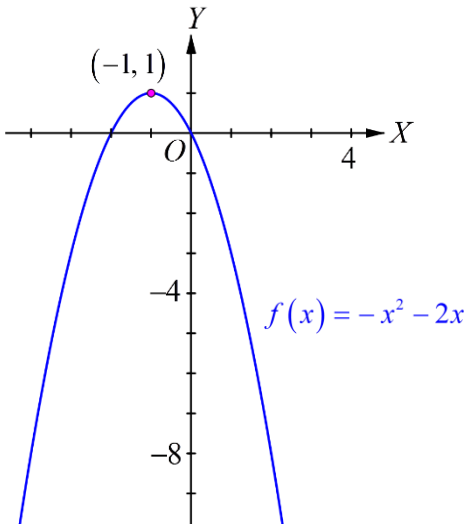


$D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = (-\infty, 1]$

กราฟของ f มีจุดวกกลับที่จุด $(3, 1)$ และมีค่าสูงสุด คือ 1

จุดตัดแกน x คือ $(2, 0)$ และ $(4, 0)$

3)

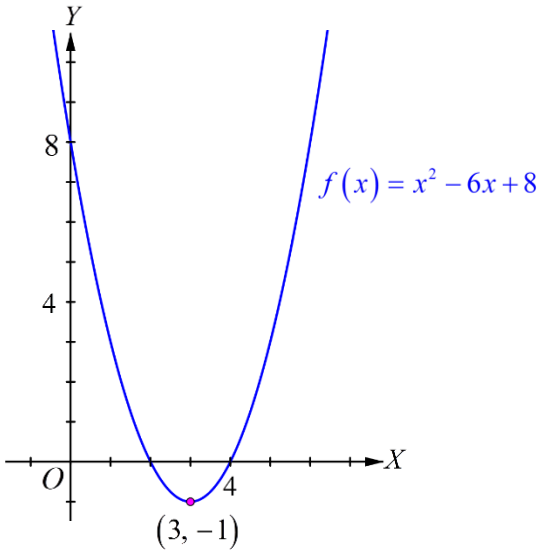


$D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = (-\infty, 1]$

กราฟของ f มีจุดวกกลับที่จุด $(-1, 1)$ และมีค่าสูงสุด คือ 1

จุดตัดแกน x คือ $(-2, 0)$ และ $(0, 0)$

4)



$D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-1, \infty)$

กราฟของ f มีจุดวกกลับที่จุด $(3, -1)$ และมีค่าต่ำสุด คือ -1

จุดตัดแกน x คือ $(2, 0)$ และ $(4, 0)$

3. 1) $y = 100x - 0.1x^2$

2) ต้องขายสินค้า 500 ชิ้น จึงจะมีรายได้มากที่สุด 25,000 บาท

4. 1) $f(x) = -200x^2 + 12{,}000x + 320{,}000$

2) เจ้าของหอพักต้องคิดค่าเช่าห้องละ 5,000 บาท หรือ 15,000 บาท

3) เจ้าของหอพักต้องตั้งราคาห้องละ $10{,}000$ บาท

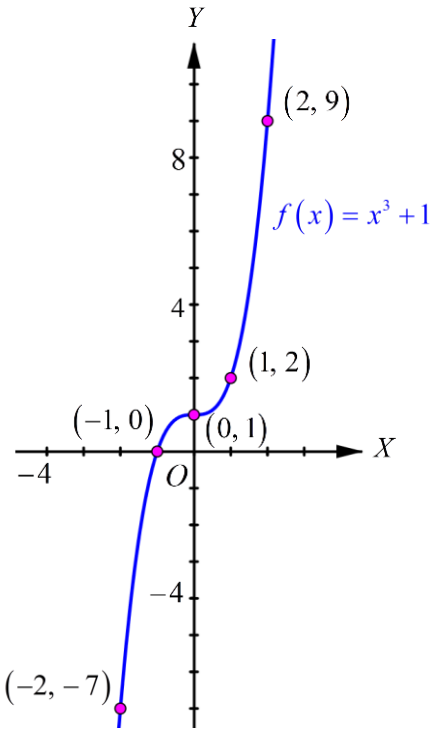
จึงทำให้มีรายได้มากที่สุด $500{,}000$ บาท

5. x มีค่ามากที่สุดเป็น 41

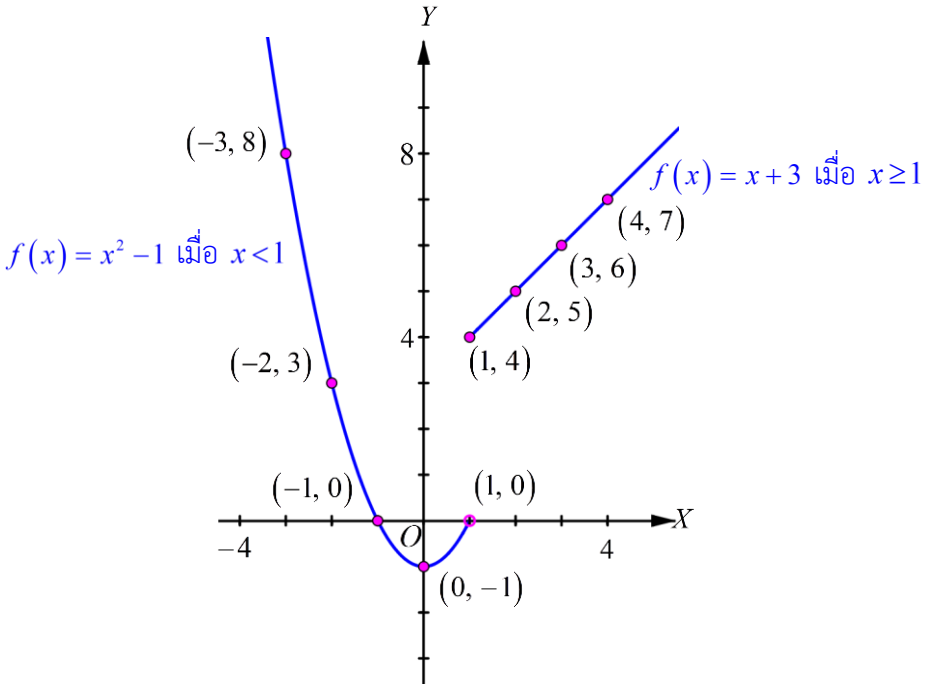
6. ค่ามากที่สุดของ xy^2 คือ 9

แบบฝึกหัด 1.4ก

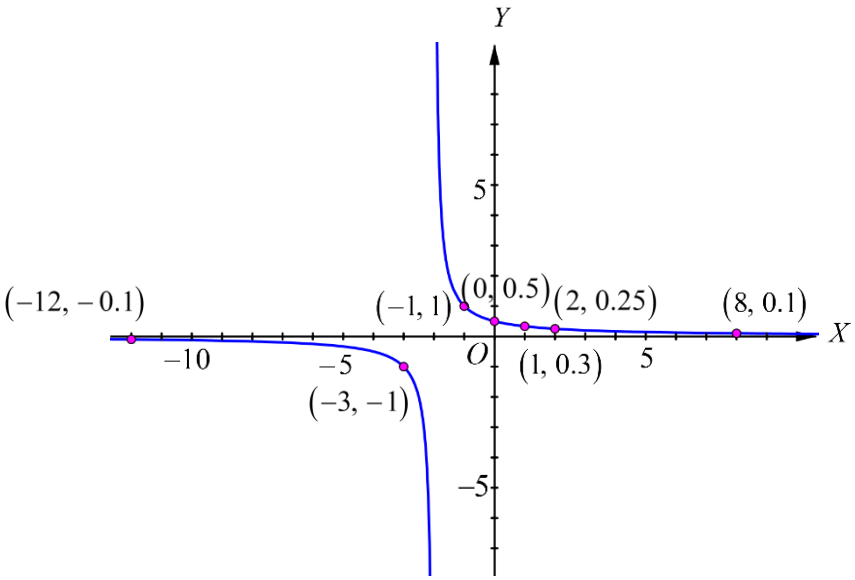
1. 1) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$



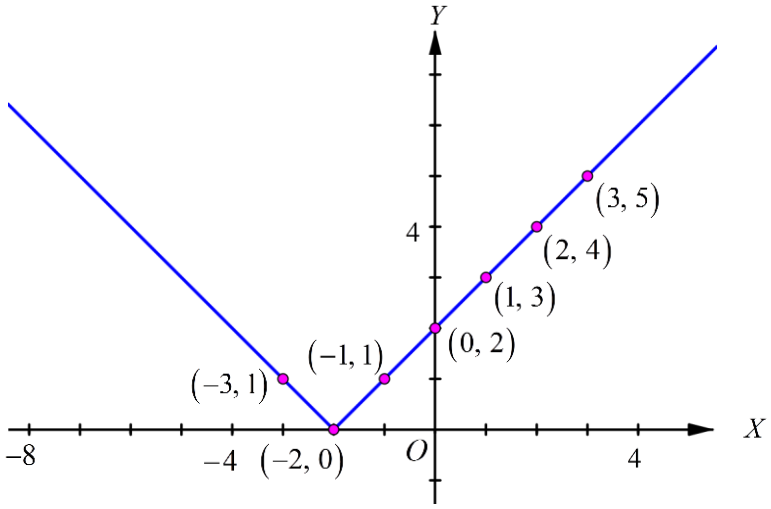
2) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-1, \infty)$



3) $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ และ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

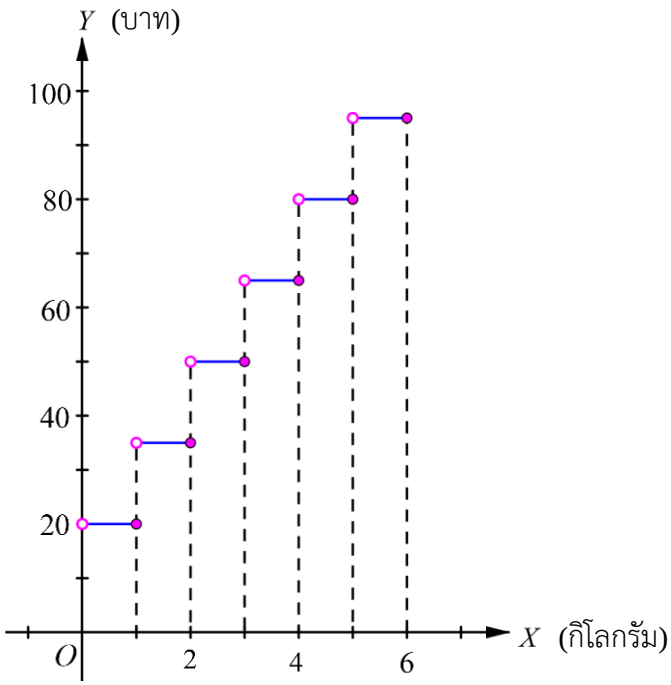


4) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [0,\infty) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$



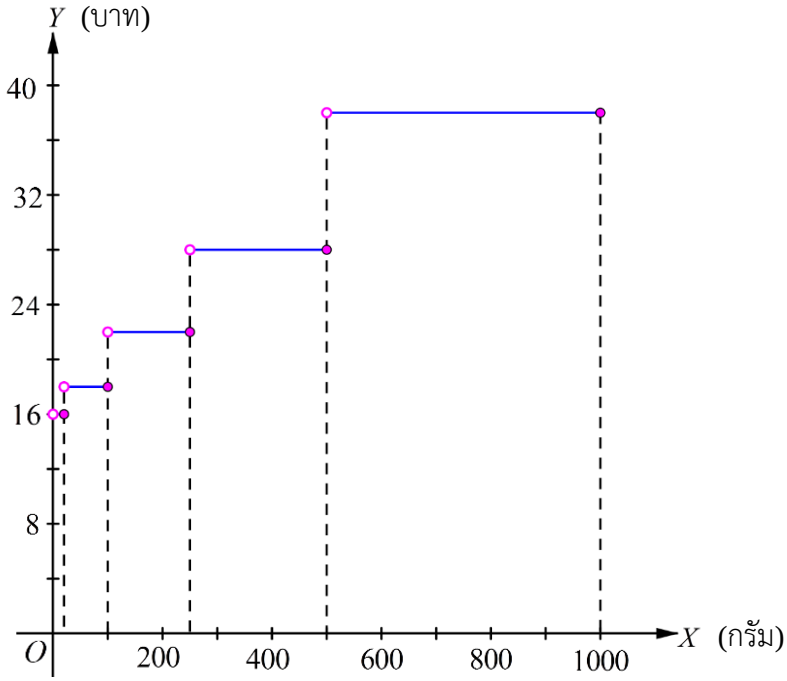
2. เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนน้ำหนักของพัสดุมีหน่วยเป็นกิโลกรัม และ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการในการส่งพัสดุของบริษัทแห่งนี้มีหน่วยเป็นบาท ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 20.00 & ; 0 < x \le 1 \\ 35.00 & ; 1 < x \le 2 \\ 50.00 & ; 2 < x \le 3 \\ 65.00 & ; 3 < x \le 4 \\ 80.00 & ; 4 < x \le 5 \\ 95.00 & ; 5 < x \le 6 \end{cases}$$



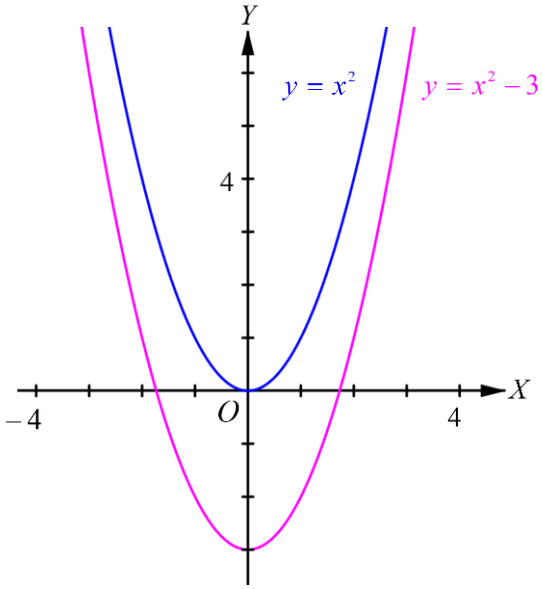
3. เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนน้ำหนักของจดหมายมีหน่วยเป็นกรัม และ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการในการส่งจดหมาย (ไปรษณีย์ลงทะเบียน) ของบริษัทแห่งนี้มีหน่วยเป็นบาท ดังนี้

$$f(x)=\begin{cases}16.00 & ;\ 0<x\le 20\\ 18.00 & ;\ 20<x\le 100\\ 22.00 & ;\ 100<x\le 250\\ 28.00 & ;\ 250<x\le 500\\ 38.00 & ;\ 500<x\le 1{,}000\end{cases}$$

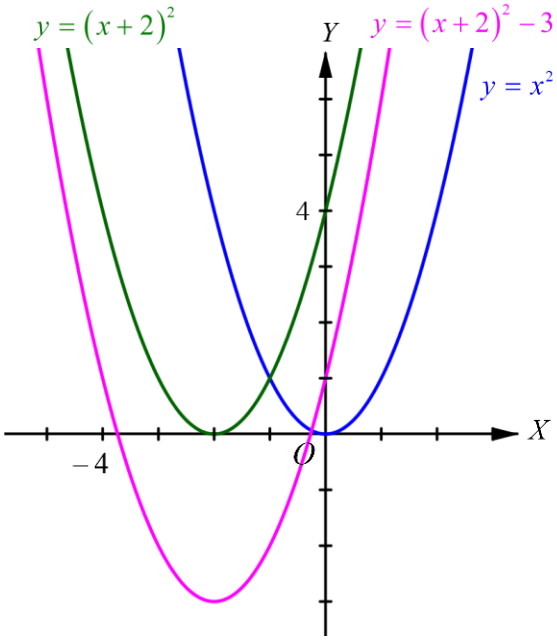

Y (บาท)
40
32
24
16
8
O
200
400
600
800
1000
X (กรัม)

แบบฝึกหัด 1.4ข

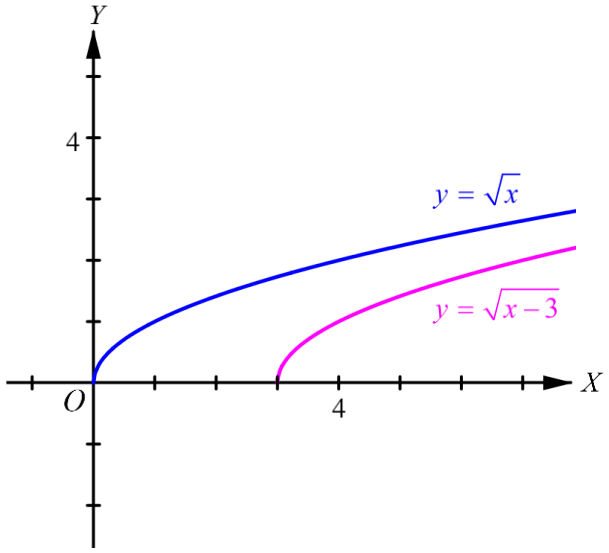
1. 1)



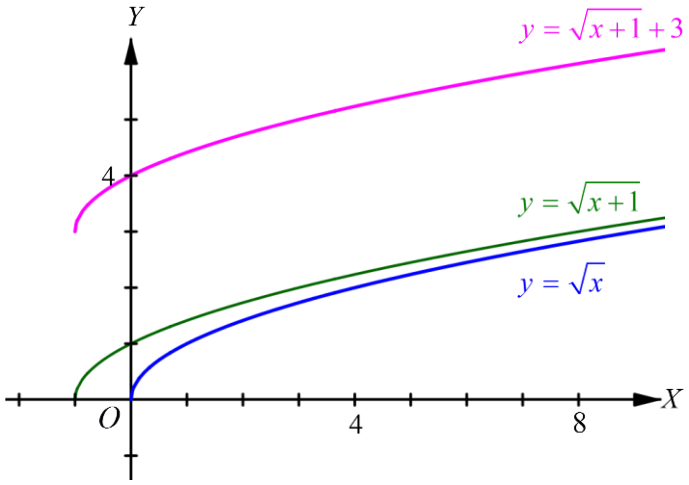
2)



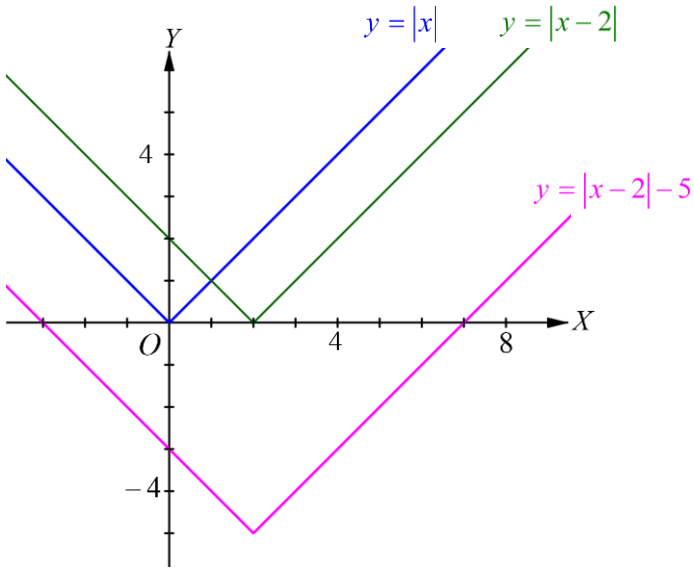
3)



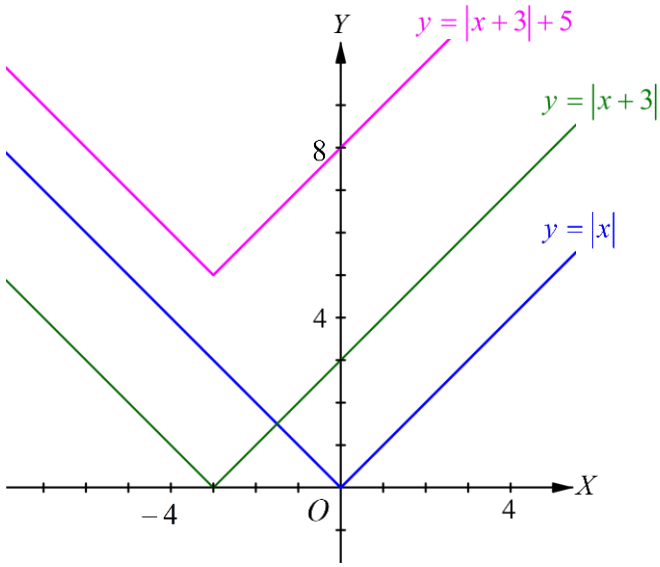
4)



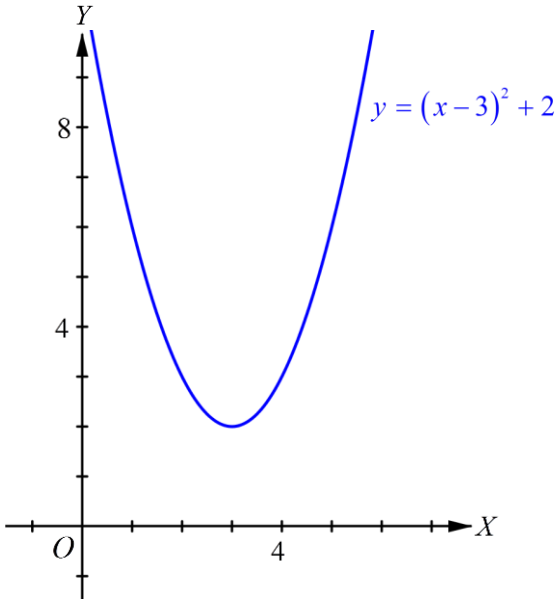
5)



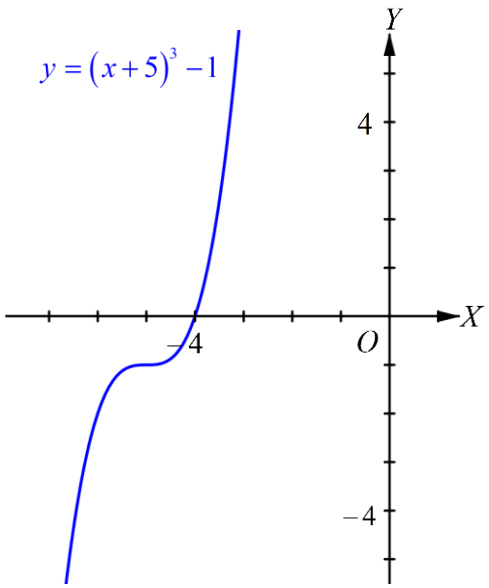
6)



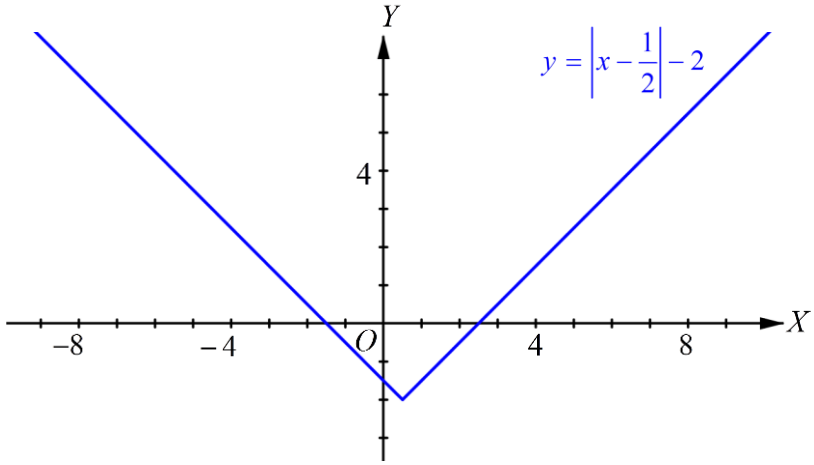
2. 1) $y=(x-3)^2+2$



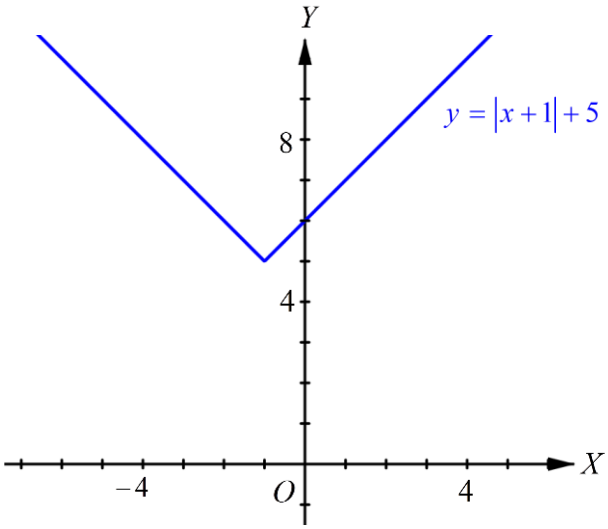
2) $y=(x+5)^3-1$



3) $y = \left|x - \frac{1}{2}\right| - 2$



4) $y = |x+1| + 5$



แบบฝึกหัด 1.5

1. 1) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $\mathbb{R}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\mathbb{R}-\{2\}$

$$(f+g)(x) = x^2+x-2$$
$$(f-g)(x) = x^2-x+2$$
$$(fg)(x) = x^3-2x^2$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

2) โดเมนของ f คือ $[-3,3]$ และโดเมนของ g คือ $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $[-3,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},3]$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $[-3,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},3]$

$$(f+g)(x) = \sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-2}$$
$$(f-g)(x) = \sqrt{9-x^2}-\sqrt{x^2-2}$$
$$(fg)(x) = \sqrt{-x^4+11x^2-18}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2-2}}$$

3) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $\mathbb{R}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = x^3+7x^2+1$$
$$(f-g)(x) = x^3+x^2-1$$

$(fg)(x) = 3x^5 + 12x^4 + x^3 + 4x^2$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 + 4x^2}{3x^2 + 1}$

4) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} - \{0\}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R} - \{-2\}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

$(f+g)(x) = \frac{4-2x}{x^2+2x}$

$(f-g)(x) = \frac{6x+4}{x^2+2x}$

$(fg)(x) = -\frac{8}{x^2+2x}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-x-2}{2x}$

5) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของ g คือ $(-\infty, 1]$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $(-\infty, 1]$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $(-\infty, 1)$

$(f+g)(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{1-x}$

$(f-g)(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x}$

$(fg)(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 - x + 1}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}$

6) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R} - \{-2\}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R} - \{1\}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$

$$(f+g)(x) = \frac{x^2+3x-1}{x^2+x-2}$$

$$(f-g)(x) = \frac{-x^2-x-1}{x^2+x-2}$$

$$(fg)(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$$

2. 1) โดเมนของ f คือ $[0, 2]$

   2) โดเมนของ f คือ $[-2,0)\cup(0,\infty)$

   3) โดเมนของ f คือ $[4,\infty)$

   4) โดเมนของ f คือ $[-5,1)\cup(1,\infty)$

3. 1) $f(g(0)) = -2$ และ $g(f(0)) = -24$

   2) $f(f(4)) = 16$ และ $g(g(1)) = 1$

   3) $f\circ g(-2) = -14$ และ $g\circ f(-2) = -120$

   4) $f\circ f(-1) = -29$ และ $g\circ g(2) = -8$

4. 1) $f+g = \{(-3, 3), (2, 6)\}$ 2) $f-g = \{(-3, -1), (2, -6)\}$

   3) $g-f = \{(-3, 1), (2, 6)\}$ 4) $fg = \{(-3, 2), (2, 0)\}$

   5) $\frac{f}{g} = \left\{\left(-3, \frac{1}{2}\right), (2, 0)\right\}$ 6) $\frac{g}{f} = \{(-3, 2)\}$

   7) $f\circ g = \{(-3, 0), (1, 0)\}$ 8) $g\circ f = \{(-3, 2)\}$

   9) $f\circ h = \{(1, 4)\}$ 10) $h\circ f = \{(-3, 0)\}$

   11) $h\circ g = \{(-3, 4),(1, 4)\}$ 12) ไม่มี $g\circ h$

5. 1) $f\circ g(x) = 12x-1$ โดยที่ $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

   $g\circ f(x) = 12x+7$ โดยที่ $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

   $f\circ f(x) = 9x+8$ โดยที่ $D_{f\circ f} = \mathbb{R}$

$g \circ g(x) = 16x - 5$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

2) $f \circ g(x) = x^2 + 10x + 25$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = x^2 + 5$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$f \circ f(x) = x^4$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$

$g \circ g(x) = x + 10$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

3) $f \circ g(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{3}{2} \right\}$

$g \circ f(x) = \dfrac{2}{x} + 3$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$

$f \circ f(x) = x$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$

$g \circ g(x) = 4x + 9$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

4) $f \circ g(x) = |2x - 5|$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = 2|x| - 5$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$f \circ f(x) = |x|$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$

$g \circ g(x) = 4x - 15$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

5) $f \circ g(x) = \dfrac{2x-2}{2x-3}$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{3}{2} \right\}$

$g \circ f(x) = \dfrac{2-x}{x}$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$

$f \circ f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

$g \circ g(x) = 4x - 9$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

6) $f \circ g(x) = \sqrt[6]{x}$ โดยที่ $D_{f \circ g} = [0, \infty)$

$g \circ f(x) = \sqrt[6]{x}$ โดยที่ $D_{g \circ f} = [0, \infty)$

$f \circ f(x) = \sqrt[9]{x}$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$

$g \circ g(x) = \sqrt[4]{x}$ โดยที่ $D_{g \circ g} = [0, \infty)$

6. $(f \circ g) \circ h(x) = \left(\sqrt{x} - 5\right)^4 + 4$ โดยที่ $D_{(f \circ g) \circ h} = [0, \infty)$

$f \circ (g \circ h)(x) = \left(\sqrt{x} - 5\right)^4 + 4$ โดยที่ $D_{f \circ (g \circ h)} = [0, \infty)$

7. 1) $f(x) = x^8$ และ $g(x) = x - 9$ 2) $f(x) = x + 5$ และ $g(x) = \sqrt{x}$

3) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ และ $g(x) = x^2$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ และ $g(x) = x + 10$

5) $f(x) = |1 - x|$ และ $g(x) = x^5$ 6) $f(x) = \sqrt{2 + x}$ และ $g(x) = \sqrt{x}$

8. $f(x) = x^2 + 6$

แบบฝึกหัด 1.6

1. 1) $f^{-1}(10) = 3$ 2) $f(-4) = 3$

3) $f^{-1}(18) = 10$ 4) $f(3) = 4$

5) $f^{-1}(10) = \dfrac{5}{2}$ 6) $f^{-1}(12) = 2$

2. 1) f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$

2) f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$

3) f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4},\ x \geq -4$

4) f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} + 3$

5) f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x) = (x+1)^2,\ x \geq -1$

3. 1) $f^{-1}(x) = 5 - x$

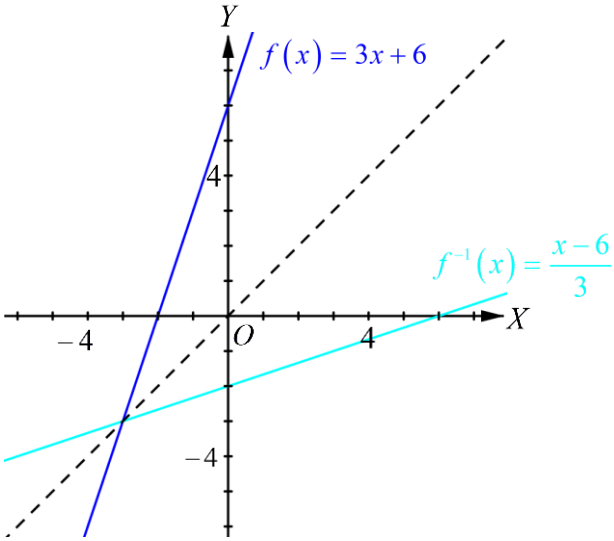
2) $f^{-1}(x) = 5x$

3) $f^{-1}(x) = \dfrac{5-x}{3x+2}$ เมื่อ $x \neq -\dfrac{2}{3}$

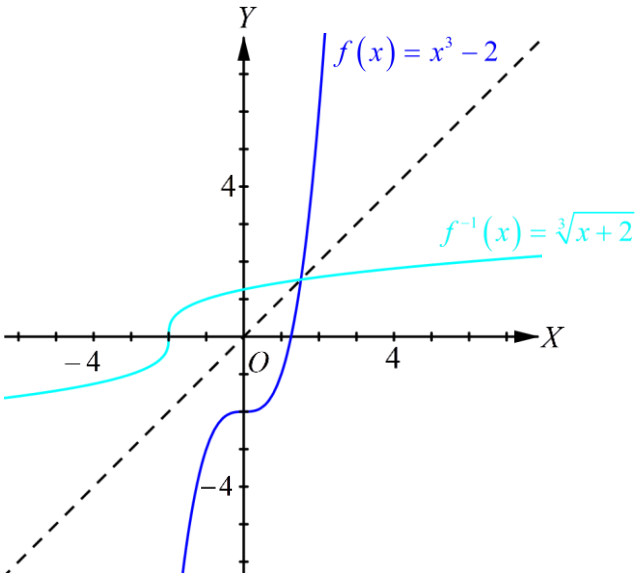
4) $f^{-1}(x)=\sqrt{5-x}$ เมื่อ $x \le 5$

5) $f^{-1}(x)=x^2-2x$ โดยที่ $D_{f^{-1}}=[1,\infty)$

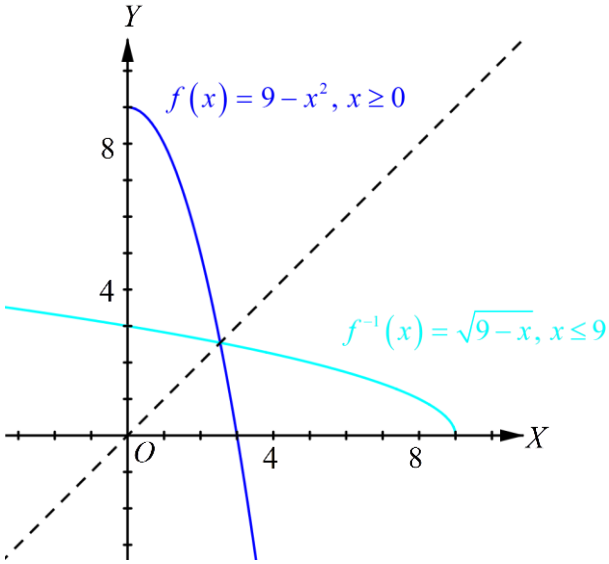
4. (ก) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-6}{3}$



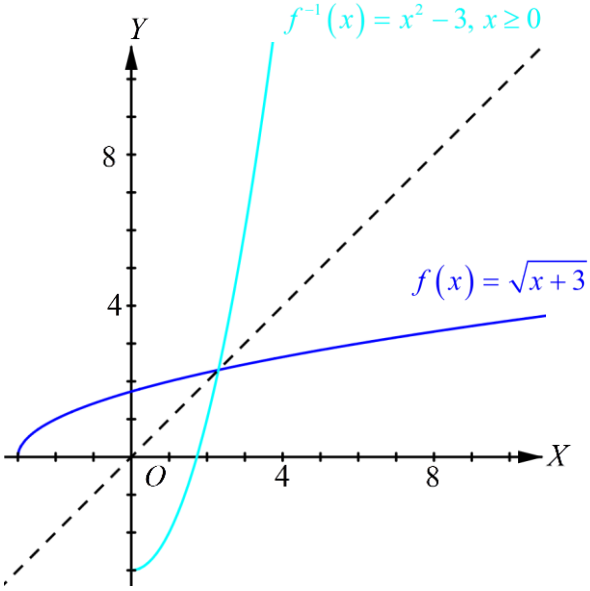
(ข) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+2}$



(ค) $f^{-1}(x) = \sqrt{9-x}$



(ง) $f^{-1}(x) = x^2 - 3$ โดยที่ $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$



5. f มีฟังก์ชันผกผัน และ $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

6. f ไม่มีฟังก์ชันผกผัน

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. r ไม่เป็นความสัมพันธ์บนเซต E

2. 1) $D_r=[0,\infty)$ และ $R_r=\mathbb{R}$

   2) $D_r=\mathbb{R}$ และ $R_r=\mathbb{R}$

   3) $D_r=[0,\infty)$ และ $R_r=(-\infty,0]$

   4) $D_r=\mathbb{R}$ และ $R_r=[0,\infty)$

   5) $D_r=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ และ $R_r=[0,\infty)$

   6) $D_r=\mathbb{R}-\{1\}$ และ $R_r=(0,\infty)$

   7) $D_r=\mathbb{R}-\{-5\}$ และ $R_r=\mathbb{R}-\{3\}$

   8) $D_r=(-3,3)$ และ $R_r=\left[\frac{1}{3},\infty\right)$

3. 1) $r^{-1}=\{(2,2),(3,2),(4,1),(2,3),(3,3)\}$

   $D_{r^{-1}}=\{2,3,4\}$ และ $R_{r^{-1}}=\{1,2,3\}$

   2) $r^{-1}=\left\{(x,y)\mid y=\frac{1-x}{2}\right\}$

   $D_{r^{-1}}=\mathbb{R}$ และ $R_{r^{-1}}=\mathbb{R}$

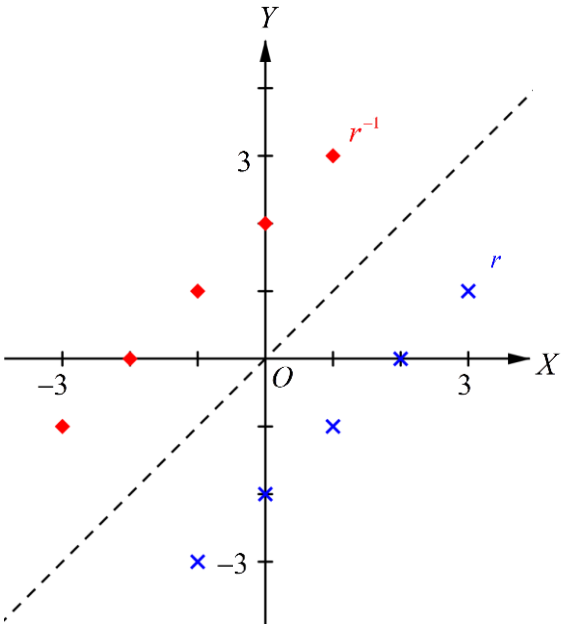
   3) $r^{-1}=\{(x,y)\mid x\geq 0$ และ $y=x^2\}$

   $D_{r^{-1}}=[0,\infty)$ และ $R_{r^{-1}}=[0,\infty)$

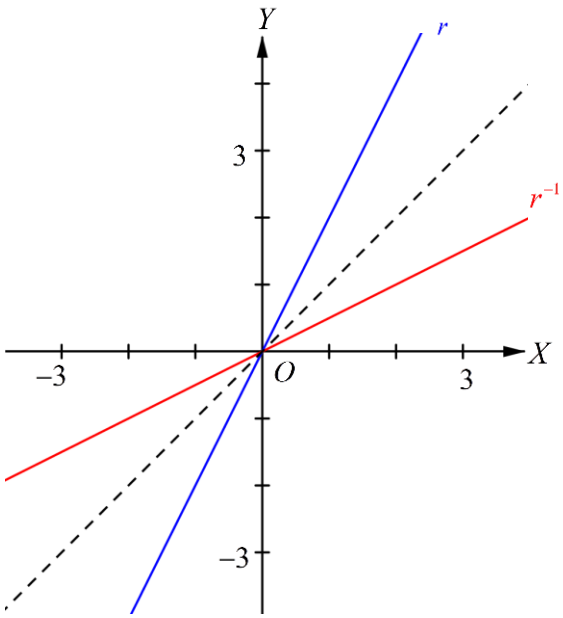
   4) $r^{-1}=\{(x,y)\mid y<x\}$

$D_{r^{-1}} = \mathbb{R}$ และ $R_{r^{-1}} = \mathbb{R}$

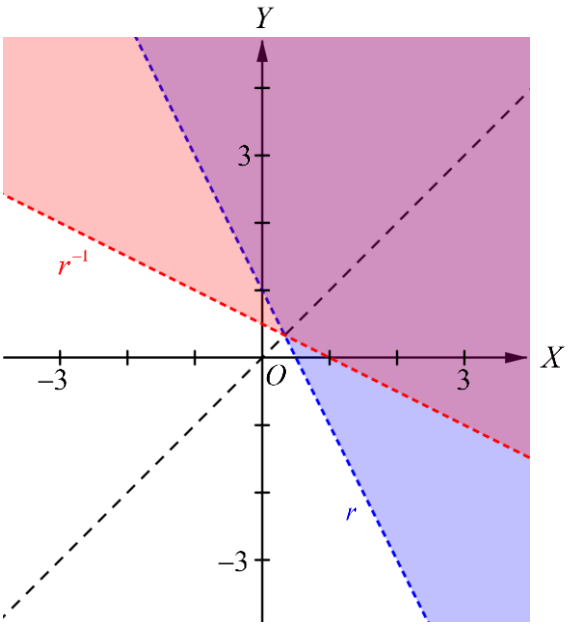
4. 1)



2)



3)



5. ไม่จำเป็น เช่น $r = \{(1, 2), (3, 4)\}$ และ $s = \{(2, 3), (4, 1)\}$

6. 1) เป็นฟังก์ชัน 2) เป็นฟังก์ชัน

   3) ไม่เป็นฟังก์ชัน 4) ไม่เป็นฟังก์ชัน

7. 1) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะพบว่า 4 ซึ่งอยู่ในโดเมนจับคู่กับ d และ e ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

   2) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะพบว่า 1 อยู่ในโดเมนจับคู่กับ 1, 2 และ 3 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

   3) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะพบว่า 3 ซึ่งอยู่ในโดเมน จับคู่กับสมาชิกทุกตัวในเรนจ์

   4) เป็นฟังก์ชัน

   5) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะจะมี 0 ซึ่งอยู่ในโดเมนจับคู่กับ -1 และ 1 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

8. $f(0)=-5$

$f(-1)=-7$

$f(3)=13$

$f(a)=a^2+3a-5$

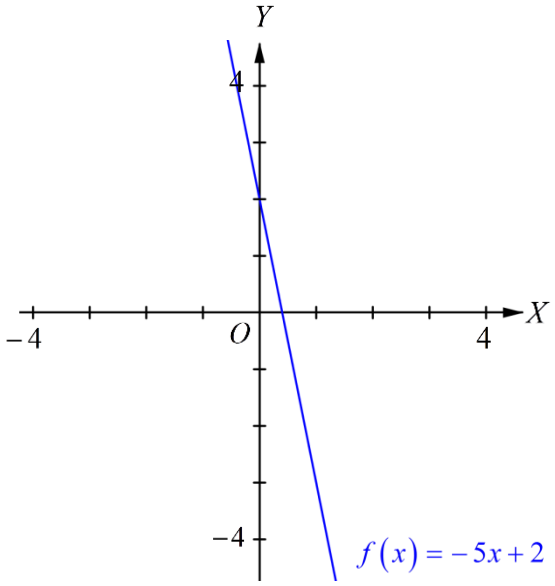
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x+h+3$

9. 1) $D_f=\mathbb{R}$ และ $R_f=\mathbb{R}$ 2) $D_f=[2,\infty)$ และ $R_f=[0,\infty)$

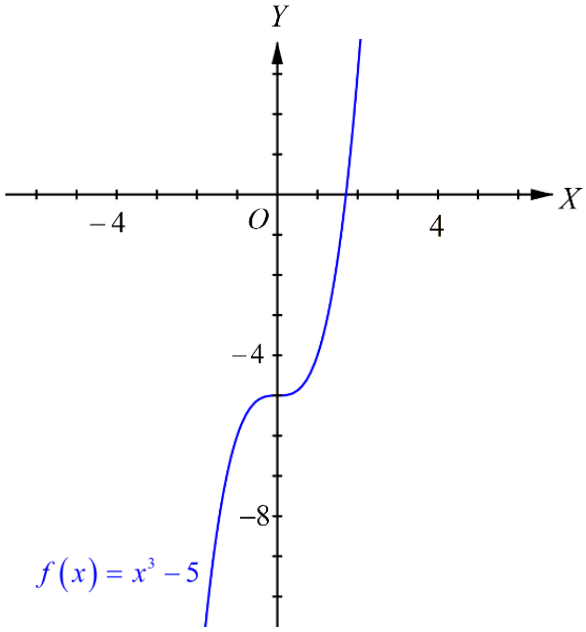
3) $D_f=\mathbb{R}$ และ $R_f=[0,\infty)$ 4) $D_f=\mathbb{R}$ และ $R_f=[0,\infty)$

5) $D_f=\mathbb{R}$ และ $R_f=[0,\infty)$

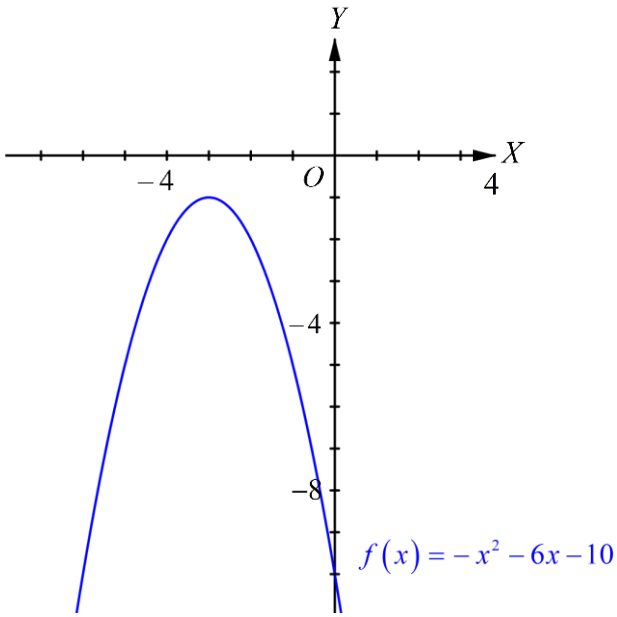
10. 1) $D_f=\mathbb{R}$ และ $R_f=\mathbb{R}$



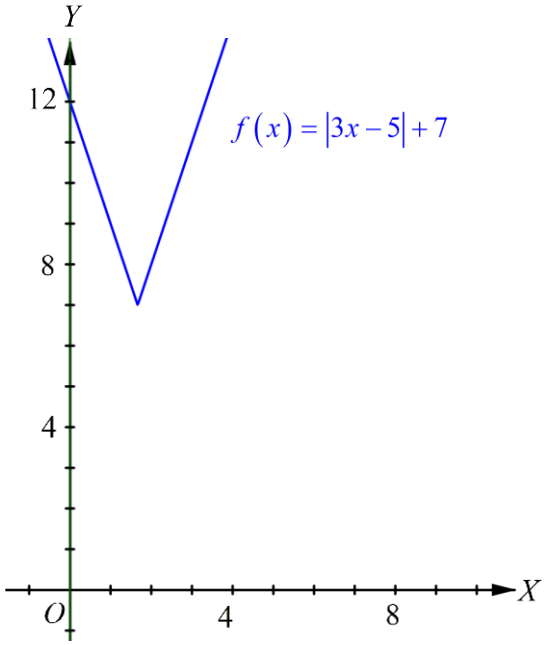
2) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$



3) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = (-\infty, -1]$



4) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [7, \infty)$



11. 1) f_2, f_3 และ f_6
2) ไม่มีฟังก์ชันจาก B ไป A
3) f_2
4) f_3 และ f_6
5) ไม่มีฟังก์ชัน 1–1 จาก B ไป B
6) ไม่มีฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง A
7) ไม่มีฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A
8) ไม่มีฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B

12. 1) f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2) h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
3) g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
4) r ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

13. 1) f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $[0, \infty)$
2) h ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $[0, \infty)$
3) g เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $[0, \infty)$

14. 1) f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
2) h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

15. 1) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-1, 2]$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-3, -1]$ และ $[2, 4]$

2) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-3, -2], [-1, 1], (1, 2]$ และ $[3, 4)$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-2, -1]$ และ $[2, 3]$

3) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-3, -1], (-1, 0]$ และ $(2, 4)$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0, 2)$

4) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-3, 0]$ และ $(1, 3)$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, 1]$

16. 1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ 2) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 0]$

3) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\mathbb{R}$ 4) f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-1, 1]$

17. 1) ฉ 2) ก

3) ง 4) ข

5) จ 6) ค

18. 1) โดเมนของ $f+g$, $f-g$ และ fg คือ $\mathbb{R}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$$(f+g)(x) = 1-2x$$
$$(f-g)(x) = 2x^2-2x-1$$
$$(fg)(x) = -x^4+2x^3+x^2-2x$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-2x}{1-x^2}$$

2) โดเมนของ $f+g$, $f-g$ และ fg คือ $(-\infty, -2]\cup[2, 3]$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $(-\infty, -2]\cup[2, 3)$

$$(f+g)(x) = \sqrt{x^2-4}+\sqrt{3-x}$$
$$(f-g)(x) = \sqrt{x^2-4}-\sqrt{3-x}$$
$$(fg)(x) = \sqrt{x^2-4}\times\sqrt{3-x}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{3-x}}$$

3) โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x^2-1}+x^3-1$$
$$(f-g)(x) = \frac{1}{x^2-1}-x^3+1$$
$$(fg)(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1} \quad \text{เมื่อ} \quad x\neq 1$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x^3-1)}$$

4) โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $\mathbb{R}-\{-1,3\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\mathbb{R}-\{-1,3\}$

$$(f+g)(x) = \frac{x}{x-3}+\frac{1}{x+1}$$
$$(f-g)(x) = \frac{x}{x-3}-\frac{1}{x+1}$$
$$(fg)(x) = \frac{x}{(x-3)(x+1)}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x(x+1)}{x-3}$$

19. 1) $f(g(0)) = 1$

$g(f(0)) = \sqrt{5}$

2) $f(f(3)) = -1$

$g(g(-2)) = 2$

3) $f \circ g(-1) = 2\sqrt{2} - 2$
$g \circ f(2) = 3$

4) $f \circ f(1) = -3$
$g \circ g(3) = 3$

5) $f \circ f(x) = \left| \left| x+1 \right| - 2 \right| - 3$
$g \circ g(x) = g\left(\sqrt{9 - x^2}\right)$

20. 1) $f + g = \{(-1, 1), (1, 9)\}$

2) $g - h = \{(1, 2), (2, 2)\}$

3) $\frac{g}{f} = \left\{(-1, 0), \left(1, \frac{4}{5}\right)\right\}$

4) $\frac{f}{h} = \left\{\left(1, \frac{5}{2}\right)\right\}$

5) $hg = \{(1, 8), (2, -1)\}$

6) $f \circ h = \{(0, 4), (2, 1)\}$

7) $h \circ f = \{(-1, 2)\}$

8) $h \circ g = \{(-1, 0), (2, 2)\}$

9) $g \circ h = \{(1, 1), (2, 0)\}$

21. 1) $f \circ g(x) = \frac{5x}{3} - 6$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = \frac{5x}{3} - 2$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$f \circ f(x) = 25x - 36$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$

$g \circ g(x) = \frac{x}{9}$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

2) $f \circ g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = x^3 + 3$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$f \circ f(x) = x^9 + 3x^6 + 3x^3 + 2$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$

$g \circ g(x) = x + 4$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

3) $f \circ g(x) = x + 5$ โดยที่ $D_{f \circ g} = [-5, \infty)$

$g \circ f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

$f \circ f(x) = x^4$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$

$g \circ g(x) = \sqrt{\sqrt{x+5} + 5}$ โดยที่ $D_{g \circ g} = [-5, \infty)$

4) $f \circ g(x) = |x-4|+4$ โดยที่ $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

$g \circ f(x) = |x|$ โดยที่ $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

$f \circ f(x) = x+8$ โดยที่ $D_{f\circ f} = \mathbb{R}$

$g \circ g(x) = ||x-4|-4|$ โดยที่ $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$

5) $f \circ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x}}$ โดยที่ $D_{f\circ g} = (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$

$g \circ f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ โดยที่ $D_{g\circ f} = (0, \infty)$

$f \circ f(x) = \sqrt[4]{x}$ โดยที่ $D_{f\circ f} = (0, \infty)$

$g \circ g(x) = x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 16x$ โดยที่ $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$

6) $f \circ g(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ โดยที่ $D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

$g \circ f(x) = 1-x$ โดยที่ $D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$

$f \circ f(x) = x$ โดยที่ $D_{f\circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$

$g \circ g(x) = \dfrac{x+2}{2-x}$ โดยที่ $D_{g\circ g} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

22. $(f \circ g) \circ h(x) = \left(\dfrac{1}{(x-1)^2+1}\right)^3 - 1$ โดยที่ $D_{(f\circ g)\circ h} = \mathbb{R}$

$f \circ (g \circ h)(x) = \left(\dfrac{1}{(x-1)^2+1}\right)^3 - 1$ โดยที่ $D_{f\circ(g\circ h)} = \mathbb{R}$

23. $g(x) = x^2 + x - 1$

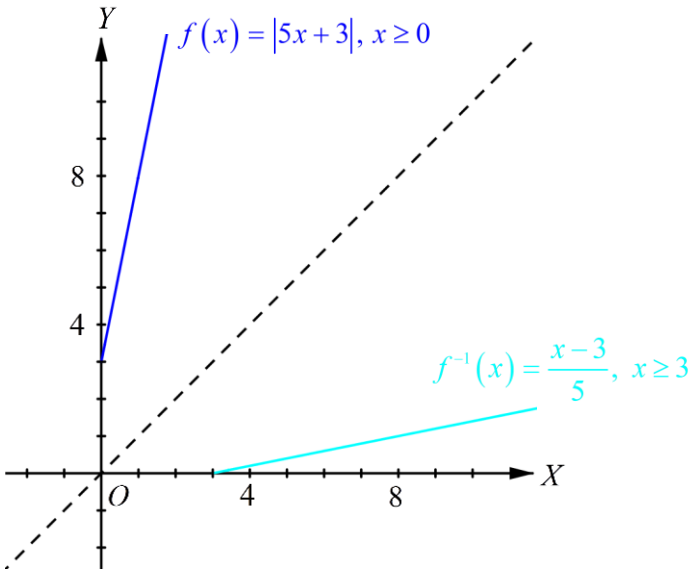
25. 1) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-7}{5}$

2) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 2,\ x \neq 0$

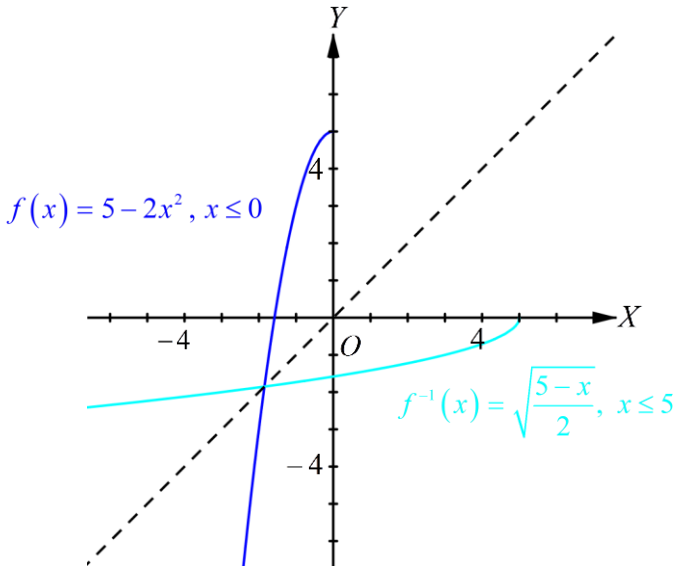
3) $f^{-1}(x) = (x-5)^3$

4) $f^{-1}(x) = \sqrt[6]{x}\ ,\ x \geq 0$

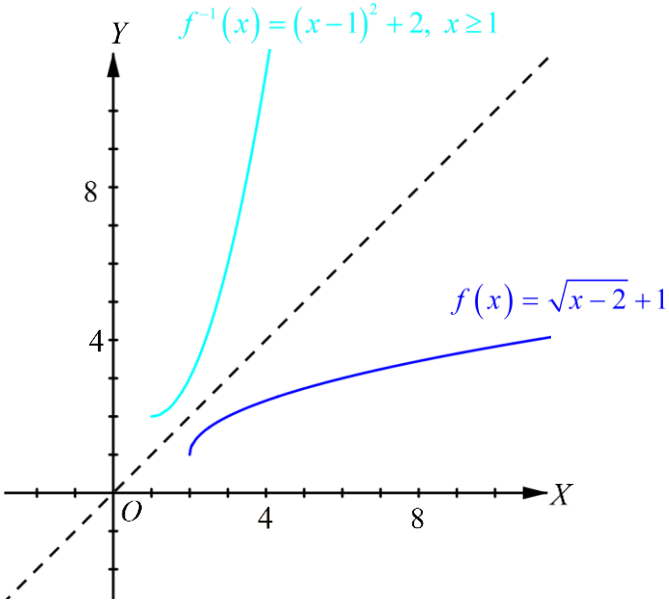
26. ก. $f^{-1}(x)=\dfrac{x-3}{5}$ โดยที่ $D_{f^{-1}}=[3,\infty)$



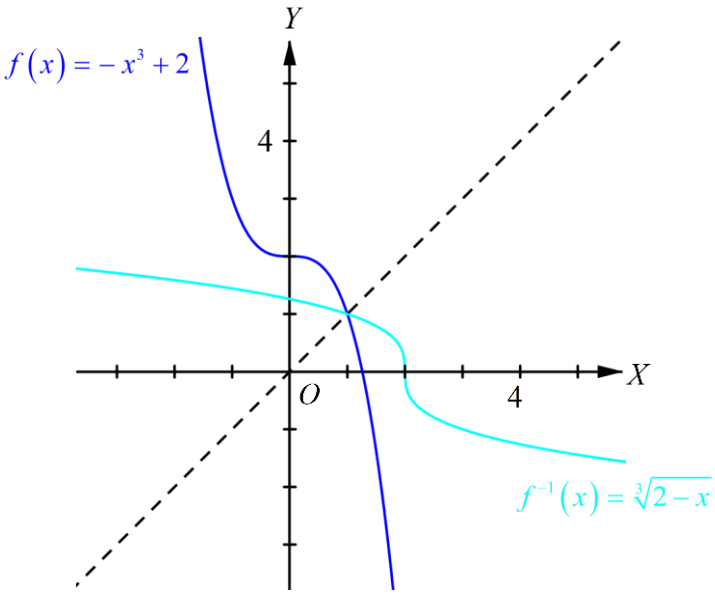
ข. $f^{-1}(x)=-\sqrt{\dfrac{5-x}{2}}$ โดยที่ $D_{f^{-1}}=(-\infty,5]$



ค) $f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2$ โดยที่ $D_{f^{-1}} = [1, \infty)$



ง) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2-x}$ โดยที่ $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$



29. ความดันน้ำทะเลเป็น 32.7 psi

30. 1) บริษัทจ่ายค่านายหน้าให้กับพนักงานร้อยละ 12

2) บริษัทจ่ายค่าเบี้ยเลี้ยงและค่าพาหนะให้กับนาย ก และนาย ข เป็นเงินคนละ 10,000 บาท

3) ฟังก์ชันแสดงรายได้ที่พนักงานได้รับในแต่ละเดือน คือ $P(x)=\frac{12}{100}x+10,000$ เมื่อ x คือยอดขายที่พนักงานทำได้

31. จำนวนนักท่องเที่ยว 85 คน ทำให้บริษัทท่องเที่ยวมีรายได้มากที่สุด คือ 36,125 บาท

32. 1) ความสัมพันธ์ของพื้นที่กับความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้ คือ $y=-2x^2+120x$ เมื่อ x คือความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ y คือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

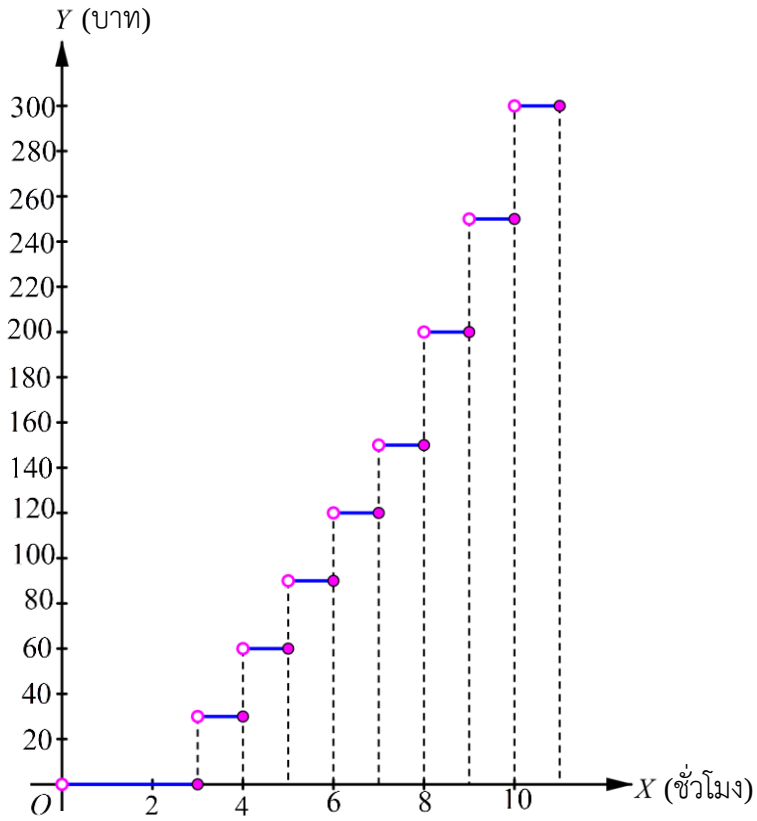
2) x จะมากที่สุดไม่เกิน 60 เมตร

3) ชายผู้นี้จะล้อมรั้วได้พื้นที่มากที่สุด 1,800 ตารางเมตร

33. ค่ามากที่สุดของ xy คือ $\frac{4}{3}$ เมื่อ $6x+2y=8$

34. เมื่อ x แทนระยะเวลาในการจอดรถที่อาคารจอดรถแห่งนี้ในหน่วยชั่วโมง และ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการจอดรถของอาคารจอดรถแห่งนี้ในหน่วยบาท ดังนี้

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad 0<x\le 3 \\ 30 & ; \quad 3<x\le 4 \\ 60 & ; \quad 4<x\le 5 \\ 90 & ; \quad 5<x\le 6 \\ 120 & ; \quad 6<x\le 7 \\ 150 & ; \quad 7<x\le 8 \\ 200 & ; \quad 8<x\le 9 \\ 250 & ; \quad 9<x\le 10 \\ 300 & ; \quad 10<x\le 11 \\ \vdots & \qquad \vdots \end{cases}$$



35. $C \circ N(t) = C(100t - 5t^2) = 5000 + 6000(100t - 5t^2)$ โดยที่ $0 \le t \le 10$

36. $A \circ A(x) = (1.05)^2 x$ เป็นฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินรวมที่จะได้เมื่อครบกำหนด 2 ปี

$A \circ A(A(x)) = (1.05)^3 x$ เป็นฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินรวมที่จะได้เมื่อครบกำหนด 3 ปี

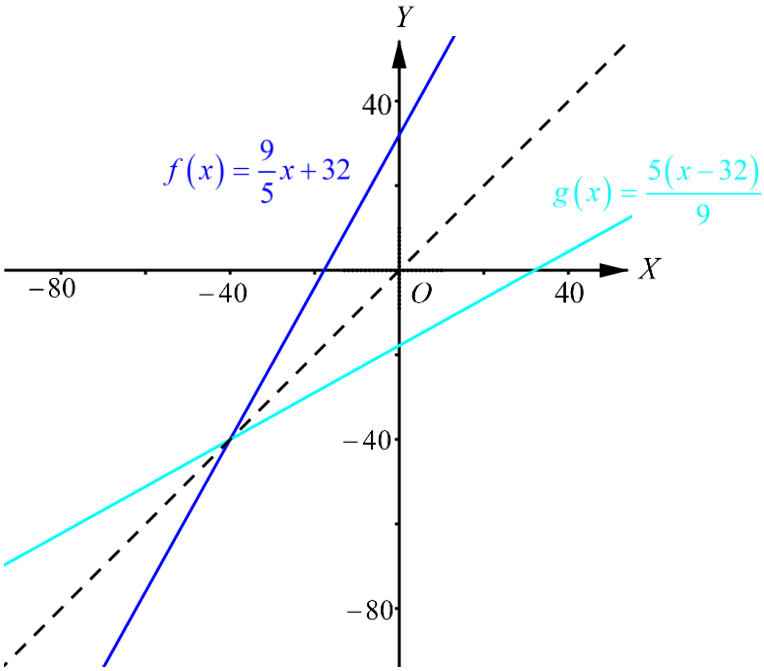
$((A \circ A) \circ A)(A(x)) = (1.05)^4 x$ เป็นฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินรวมที่จะได้เมื่อครบกำหนด 4 ปี

และฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชัน A จำนวน n ฟังก์ชัน คือ $(1.05)^n x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินรวมที่จะได้เมื่อครบกำหนด n ปี เมื่อ n แทนจำนวนนับ

37. 1) $f(x)=\frac{9}{5}x+32$

2) $g(x)=\frac{5(x-32)}{9}$

3) f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน



4) ประมาณ 47.22°C

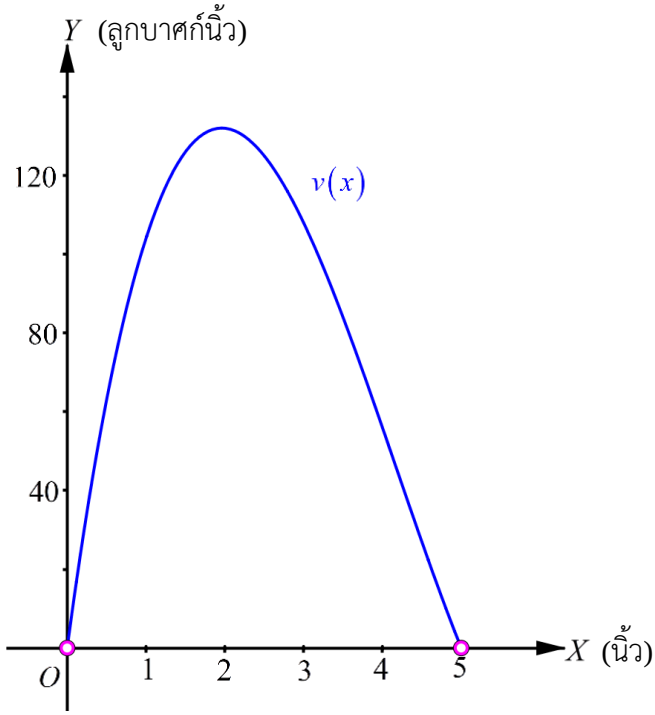
5) 86°F

38. 1) $V(x)=(10-2x)(15-2x)x$

2) $D_V=(0,5)$

3) กล่องจะมีปริมาตรมากที่สุดเมื่อ x เป็น 2 และกล่องมีปริมาตร 132 ลูกบาศก์นิ้ว

4)



5) ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวประมาณ 0.94 นิ้ว และ 3.18 นิ้ว

บทที่ 2

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

การศึกษาเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมเป็นการศึกษาฟังก์ชันที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง ซึ่งนักเรียนได้ศึกษาเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มมาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เนื้อหาเรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมที่นำเสนอในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 นี้ มีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนนำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมไปใช้ในการแก้ปัญหา โดยบทนี้จะเริ่มด้วยการทบทวนความรู้เรื่องเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม และเพิ่มเติมเนื้อหาเกี่ยวกับ รากที่ n ในระบบจำนวนจริงและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม สมการและอสมการลอการิทึม รวมถึงการประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่งจะทำให้นักเรียนมองเห็นประโยชน์ในการศึกษาเรื่องเหล่านี้ และเชื่อมโยงกับสถานการณ์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ในบทเรียนนี้มุ่งให้นักเรียนบรรลุตัวชี้วัด/ผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้แกนกลาง/สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้

ตัวชี้วัด /ผลการเรียนรู้ และสาระการเรียนรู้

ตัวชี้วัด

- เข้าใจความหมายและใช้สมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณ การเท่ากัน และการไม่เท่ากันของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์ และจำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

สาระการเรียนรู้แกนกลาง

- รากที่ n ของจำนวนจริง เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
- เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- แก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
- ฟังก์ชันลอการิทึม
- สมการเอกซ์โพเนนเชียลและสมการลอการิทึม

จุดมุ่งหมาย

1. ใช้สมบัติของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์และจำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังในการแก้ปัญหา
2. บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
3. อธิบายลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
4. แก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล
5. แก้สมการและอสมการลอการิทึม
6. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมในการแก้ปัญหา

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับเลขยกกำลังในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

goo.gl/oiG5fp

2.1 เนื้อหาสาระ

1. ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ตัว}}$$

$$a^0 = 1 \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{เมื่อ} \quad a \neq 0$$

เรียก a^n ว่าเลขยกกำลัง

เรียก a ว่าฐานของเลขยกกำลัง และ เรียก n ว่าเลขชี้กำลัง

2. ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

3) $(ab)^n = a^n b^n$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง

   y เป็นรากที่สองของ x ก็ต่อเมื่อ $y^2 = x$

4. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว x จะมีรากที่สองที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เรียกรากนี้ว่า “รากที่สองที่ไม่เป็นจำนวนจริงลบ” ของ x และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{x}$ โดยเครื่องหมาย $\sqrt{\ }$ เรียกว่า “เครื่องหมายกรณฑ์”

5. เมื่อ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ $(-y)^2 = y^2$ ดังนั้น ถ้ามีจำนวนจริง y ยกกำลังสอง แล้วได้ x ก็จะมีจำนวนจริง $-y$ ที่ยกกำลังสองแล้วได้ x ด้วย

   - ถ้า $x > 0$ แล้วจะมีรากที่สองของ x สองรากคือ $\sqrt{x}$ และ $-\sqrt{x}$ โดยที่ $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $-\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงลบ
   - ถ้า $x = 0$ แล้วจะมีจำนวนจริงจำนวนเดียว คือ 0 เป็นรากที่สองของ x นั่นคือ $\sqrt{0} = 0$
   - ถ้า $x < 0$ แล้วจะไม่มีรากที่สองของ x ที่เป็นจำนวนจริง

   ดังนั้น $\sqrt{x} = y$ เมื่อ $x \geq 0$ หมายความว่า $y^2 = x$ และ $y \geq 0$

6. ให้ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ จะได้ $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

7. ให้ $x \geq 0$ และ $y > 0$ จะได้ $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

8. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

   y เป็นรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$

9. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ

1) y เป็นรากที่ n ของ x และ

2) $xy \geq 0$

แทนค่าหลักของรากที่ n ของ x ด้วย $\sqrt[n]{x}$ อ่านว่า "กรณฑ์ที่ n ของ x" หรือ "ค่าหลักของรากที่ n ของ x"

10. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

11. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n และ $y \neq 0$ แล้ว $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

หมายเหตุ

- ถ้า $x < 0$ หรือ $y < 0$ แล้ว เนื้อหาสาระข้อ 10 และ 11 จะเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวกเท่านั้น
- ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวกแล้ว $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$
- ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้วจะได้ว่า

  1) $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

  2) $\sqrt[n]{x^n} = x$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

12. ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ถ้า a มีรากที่ n แล้ว

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

ในกรณีที่ $a \geq 0$ สามารถนิยาม $a^{\frac{1}{n}}$ ได้เสมอ

ในกรณีที่ $a < 0$ จะนิยามเฉพาะกรณีที่ n เป็นจำนวนคี่

13. ให้ a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ และ r เป็นจำนวนตรรกยะ เขียน $r = \frac{p}{q}$

โดยที่ p, q เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $q > 0$ และ ห.ร.ม. ของ p และ q เป็น 1

ถ้า $a^{\frac{1}{q}}$ เป็นจำนวนจริง แล้ว $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$

ทั้งนี้ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะจะนิยามเมื่อเลขชี้กำลังเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำเท่านั้นและ $a^{\frac{1}{q}}$ ต้องเป็นจำนวนจริง

ในกรณีที่ $a = 0$ และ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก สามารถนิยาม $0^r = 0$

แต่จะไม่นิยาม 0^r เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะลบหรือศูนย์

14. ให้ m และ n เป็นจำนวนตรรกยะ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0

โดยที่ a^m, a^n, b^n เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

3) $(ab)^n = a^n b^n$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

15. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = a^x\right\}$

โดยที่ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$

16. สมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เรียกว่า “สมการเอกซ์โพเนนเชียล”

อสมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เรียกว่า “อสมการเอกซ์โพเนนเชียล”

17. ฟังก์ชันลอการิทึม คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid y = \log_a x\}$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$ และฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

18. ให้ a, M, N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3) $\log_a M^k = k \log_a M$

4) $\log_a a = 1$

5) $\log_a 1 = 0$

6) $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$ เมื่อ $k \neq 0$

7) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$

19. ลอการิทึมที่ใช้มากในการคำนวณคือ ลอการิทึมสามัญ ซึ่งหมายถึงลอการิทึมที่มีฐานเป็น 10 ในการเขียนลอการิทึมสามัญนิยมเขียนโดยไม่มีฐานกำกับ เช่น $\log_{10} N$ จะเขียนแทนด้วย $\log N$ เมื่อ N เป็นจำนวนจริงบวก

20. A เป็นแอนติลอการิทึมของ B ก็ต่อเมื่อ $B = \log A$

21. ให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ $b \neq 1$ จะได้ $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

22. เรียกลอการิทึมฐาน e เมื่อ e เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนอตรรกยะจำนวนหนึ่งซึ่งมีค่าประมาณ 2.7182818284 ว่า “ลอการิทึมแบบเนเปียร์” หรือ “ลอการิทึมธรรมชาติ” ในการเขียนลอการิทึมของ x ฐาน e นิยมเขียน $\ln x$ แทน $\log_e x$

23. สมการลอการิทึม เป็นสมการที่มีลอการิทึมของตัวแปร
อสมการลอการิทึม เป็นอสมการที่มีลอการิทึมของตัวแปร

2.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

ครูอาจทบทวนเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มโดยใช้กิจกรรมการจับกลุ่ม ดังนี้

กิจกรรม : จับกลุ่ม

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ครูแจกบัตรข้อความให้นักเรียนแต่ละคน คนละ 1 ใบ โดยในบัตรข้อความแต่ละใบแสดงเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม ตัวอย่างเช่น

7^6	7^7	7^8	$7^{12}\times 7^{-6}$
$\left(\frac{2}{14}\right)^{-6}$	$\left(\frac{35}{5}\right)^{7}$	$\frac{28^4\times 7^5}{112^2}$	$\left(\frac{10}{14\times 5}\right)^{7}$
$14^6\times 2^{-6}$	49^3	$\frac{(28\times 5)^6}{(20^3)^2}$	$343^2\times 49$
$\frac{1}{7^{-9}\times 7}$	$7^5\left(\frac{1}{7^{-1}}\right)^3$	49^4	$\left(\frac{35}{5}\right)^{-6}$
$\frac{1}{7^{-9}\times 7}$	$7^5\left(\frac{1}{7^{-1}}\right)^3$	49^4	$\left(\frac{7}{2}\right)^{9}\times\left(\frac{2^9}{7}\right)$
$\frac{1}{7^7}$	$\frac{7^2\times 7^3}{7^{-2}}$	$\frac{7^2}{7^{-5}}$	$\frac{343^3}{49}$
$\frac{1}{49^3\times 7}$	$\frac{49}{7^9}$	$\frac{1}{7^6}$	

2. ครูให้นักเรียนจับกลุ่มกับเพื่อนที่มีบัตรคำแสดงจำนวนเดียวกัน

3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มพิจารณาจำนวนในบัตรคำของสมาชิกในกลุ่มเพื่อพิจารณาตรวจสอบความถูกต้อง
4. เมื่อนักเรียนทุกคนจับกลุ่มกันเรียบร้อยแล้ว ครูและนักเรียนทุกคนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องของการจับกลุ่ม

หมายเหตุ

- ครูอาจเปลี่ยนจำนวนในบัตรคำเป็นจำนวนอื่น ๆ โดยสามารถเพิ่มจำนวนบัตรคำให้เพียงพอกับจำนวนนักเรียน
- กิจกรรมนี้มีไว้เพื่อทบทวนเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งนักเรียนได้ศึกษามาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และใช้เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับหัวข้อนี้ได้ด้วย ซึ่งในกรณีที่ครูพบว่านักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มเป็นอย่างดีแล้ว ครูสามารถสอนเนื้อหาเกี่ยวกับรากที่สองในระบบจำนวนจริงซึ่งอยู่ในหัวข้อถัดไปได้โดยไม่ต้องสอนเรื่องนี้อีก

รากที่สองในระบบจำนวนจริง

ครูอาจทบทวนเกี่ยวกับรากที่สองและกรณฑ์ที่สองของจำนวนเต็มบวกและการดำเนินการของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สองโดยใช้กิจกรรมบิงโก ดังนี้

กิจกรรม : บิงโก

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ครูเตรียมบัตรข้อความเกี่ยวกับรากที่สองและกรณฑ์ที่สองของจำนวนเต็มบวก และการดำเนินการของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สอง ตัวอย่างเช่น

รากที่สองที่เป็นจำนวนลบของ 25	รากที่สองของ 16
รากที่สองที่เป็นจำนวนบวกของ 144	รากที่สองที่เป็นจำนวนลบของ 64
รากที่สองของ 81	รากที่สองที่เป็นจำนวนบวกของ 49
รากที่สองของ 0	กรณฑ์ที่สองของ 1
กรณฑ์ที่สองของ 100	รากที่สองที่เป็นจำนวนลบของ 4
รากที่สองของ 9	$\sqrt{3}\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)$
$\sqrt{32}\times\sqrt{2}$	$2\sqrt{6}\times\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{24}\right)$
$\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}-\sqrt{48}}$	$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$
$\sqrt{4}-\sqrt{169}$	$-\sqrt{100}$
$-\sqrt{49}$	$\sqrt{(-11)^2}$

2. ครูให้นักเรียนแต่ละคนสร้างตารางบิงโกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 4×4 ดังรูป

แล้วให้นักเรียนเลือกจำนวน 16 จำนวน จากจำนวนเต็มตั้งแต่ -12 ถึง 12 เพื่อเติมในตารางดังกล่าว

3. ครูสุ่มบัตรข้อความที่จัดเตรียมไว้แล้ว 1 ใบ แสดงบัตรข้อความให้นักเรียนดู จากนั้นให้นักเรียนหาจำนวนที่ตรงกับข้อความในบัตรข้อความ

4. ครูเลือกนักเรียนเพื่อเฉลยคำตอบและให้เหตุผลประกอบคำตอบที่ได้ โดยให้นักเรียนทุกคนในชั้นเรียนร่วมกันตรวจสอบคำตอบ ในขั้นตอนนี้ครูสามารถสังเกตความรู้พื้นฐานที่นักเรียนมีเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มได้
5. ถ้าตารางบิงโกของนักเรียนมีจำนวนที่เป็นคำตอบ ให้นักเรียนทำเครื่องหมายกากบาทบนจำนวนนั้น
6. ครูและนักเรียนทำซ้ำขั้นตอนที่ 3 – 5 จนกระทั่งบัตรข้อความหมด

หมายเหตุ

- ครูอาจเปลี่ยนบัตรข้อความหรือจำนวนที่ให้นักเรียนเติมลงในตารางบิงโกเป็นแบบอื่น โดยจำนวนที่ให้นักเรียนเติมต้องสอดคล้องกับบัตรข้อความ
- กิจกรรมนี้มีไว้เพื่อทบทวนเกี่ยวกับรากที่สองของจำนวนจริง ซึ่งนักเรียนได้ศึกษามาแล้วในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และใช้เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับหัวข้อนี้ได้ด้วย ซึ่งในกรณีที่ครูพบว่านักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับรากที่สองของจำนวนจริงเป็นอย่างดีแล้ว ครูสามารถสอนเนื้อหาเกี่ยวกับรากที่ n และค่าหลักของรากที่ n ซึ่งอยู่ในหัวข้อถัดไปได้โดยไม่ต้องสอนเรื่องนี้อีก

ค่าหลักของรากที่ n

ความเข้าใจคลาดเคลื่อน

- นักเรียนมักเข้าใจผิดว่ารากที่สองของ x มีความหมายเช่นเดียวกับกรณฑ์ที่สองของ x
- นักเรียนมักเข้าใจผิดว่ารากที่สองของ x เขียนแทนด้วย $\sqrt{x}$

สมบัติของรากที่ n

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

หมายเหตุข้อ 3 ท้ายทฤษฎีบท 5

ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้วจะได้ว่า

1) $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

2) $\sqrt[n]{x^n} = x$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

ทั้งสองข้อนี้มีความสำคัญมาก ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนมีความเข้าใจที่ถูกต้องเพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาหัวข้อต่อไป

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรระมัดระวังการยกตัวอย่างเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะตามบทนิยาม 5 ในกรณีที่ $a<0$ ซึ่งจะนิยามเฉพาะกรณีที่ n เป็นจำนวนคี่เท่านั้น
- บทนิยามเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะตามบทนิยาม 6 นั้นมีเงื่อนไขสำคัญคือ ห.ร.ม. ของ p และ q เป็น 1 ดังนั้น ครูควรระมัดระวังการยกตัวอย่าง $a^{\frac{p}{q}}$ ที่มี ห.ร.ม. ของ p และ q ไม่เป็น 1 หรือต้องเน้นย้ำกับนักเรียนให้พิจารณา ห.ร.ม. ของ p และ q และทำ $\frac{p}{q}$ ให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำก่อนเสมอ

การบวก ลบ คูณ และหารเลขยกกำลัง และการแก้สมการที่มีเครื่องหมายกรณฑ์

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ตัวอย่างที่ 20

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{2x+3}=x$

ตัวอย่างที่ 21

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x+7}-\sqrt{8-2x}=1$

ตัวอย่างทั้งสองตัวอย่างนี้ แสดงการแก้สมการโดยวิธียกกำลังสองจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการ ซึ่งมีประเด็นสำคัญที่ต้องคำนึงถึงอยู่เสมอ คือ คำตอบที่ได้จะเป็นคำตอบของสมการที่ยกกำลังสองแล้ว ซึ่งบางคำตอบอาจไม่ใช่คำตอบของสมการเดิม เช่น ในตัวอย่างที่ 20 เมื่อแก้สมการโดยวิธียกกำลังสองจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการแล้ว จะได้ $x=3$ หรือ $x=-1$ แต่เมื่อตรวจสอบค่า x ที่ได้ จะพบว่า $x=-1$ ไม่สอดคล้องกับสมการเดิมที่โจทย์กำหนด ในทำนองเดียวกันในตัวอย่างที่ 21 เมื่อแก้สมการโดยวิธียกกำลังสองจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการแล้ว จะได้ $x=2$ หรือ $x=-\frac{14}{9}$ แต่เมื่อตรวจสอบค่า x ที่ได้ จะพบว่า $x=-\frac{14}{9}$ ไม่สอดคล้องกับสมการเดิมที่โจทย์กำหนด

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 2.1ข

7. จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและหาค่าประมาณของจำนวนต่อไปนี้

แบบฝึกหัดนี้ควรให้นักเรียนจัดรูปจำนวนให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์ก่อน แล้วจึงแทนค่าประมาณที่กำหนดให้ ซึ่งจะทำให้ได้คำตอบที่ใกล้เคียงกับจำนวนที่กำหนดให้ หากแทนค่าประมาณของจำนวนตามที่โจทย์กำหนดให้ก่อนที่จะจัดรูปจำนวนให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์ จะทำให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนที่มากกว่า ทั้งนี้ครูควรสนับสนุนการใช้เทคโนโลยีในการหาคำตอบของโจทย์ลักษณะนี้ได้ หากครูนำโจทย์ลักษณะนี้ไปใช้ในการวัดผลประเมินผล ควรเน้นที่กระบวนการหาคำตอบมากกว่าผลลัพธ์สุดท้าย หรืออนุญาตให้นักเรียนเขียนคำตอบโดยติดอยู่ในรูปค่าประมาณที่กำหนดให้ โดยไม่ต้องคำนวณ

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ครูอาจนำเข้าสู่บทเรียนโดยให้นักเรียนทำกิจกรรม “ปัญหาพระราชา” ในหนังสือเรียน

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- บทนำของหัวข้อนี้มีไว้เพื่อขยายขอบเขตความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับเลขยกกำลัง จากเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะซึ่งนักเรียนได้เรียนในหัวข้อก่อนหน้านี้ เพื่อนำไปสู่เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริง ซึ่งจะเชื่อมโยงไปสู่บทนิยามของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

- รูปทั่วไปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ $f(x)=ab^x$ อย่างไรก็ตามหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ได้นิยามฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลว่าเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x)=a^x$ เมื่อ $a>0$ และ $a\neq 1$

ครูอาจเสริมความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $f(x)=a^x$ เมื่อ $a>1$ ได้ โดยให้นักเรียนทำกิจกรรมสำรวจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (1) ดังนี้

กิจกรรม : สำรวจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (1)

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นให้นักเรียนเปิดเว็บไซต์ ipst.me/9046
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำรวจกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=2^x$ โดย
   1) คลิกที่รูปสี่เหลี่ยมหน้า Show f เพื่อให้เครื่องหมาย ✓ ปรากฏ
   2) คลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ x

   แล้วพิจารณาว่า
   - เมื่อ x เปลี่ยนจากน้อยไปมาก ค่าของ $f(x)$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร
   - เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวกและเพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร
   - เมื่อ x เป็นจำนวนจริงลบและลดลง ค่าของ $f(x)$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร
3. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำรวจกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=a^x$ เมื่อ a เป็นค่าอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ 2 โดยให้นักเรียนคลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ a แล้วใช้คำถามในข้อ 2 เพื่อสังเกตการเปลี่ยนแปลงค่าของ $f(x)$

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับข้อสังเกตที่ได้ในข้อ 2 และ 3 เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า สำหรับฟังก์ชัน $f(x)=a^x$ เมื่อ $a>1$
   - เมื่อ x เปลี่ยนจากน้อยไปมาก ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้น นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนโดเมนของฟังก์ชันซึ่งก็คือเซตของจำนวนจริง
   - เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวกและเพิ่มขึ้น ค่าของ $f(x)$ จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและไม่มีที่สิ้นสุด
   - เมื่อ x เป็นจำนวนจริงลบและลดลง ค่าของ $f(x)$ จะค่อย ๆ ลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์ แต่ไม่เท่ากับศูนย์
5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ปรับสไลเดอร์ a จากน้อยไปมาก เพื่อสำรวจกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=a^x$ แล้วพิจารณาว่า
   - เมื่อ a เพิ่มขึ้น ลักษณะของกราฟ $f(x)=a^x$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร
   - กราฟตัดแกน Y หรือไม่ ถ้าตัด จงหาจุดที่กราฟตัดแกน Y
   - กราฟตัดแกน X หรือไม่ ถ้าตัด จงหาจุดที่กราฟตัดแกน X ถ้าไม่ตัด จงหาเส้นกำกับแนวนอน
6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับข้อสังเกตที่ได้ในข้อ 5 เพื่อให้ได้ข้อสรุปสำหรับกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=a^x$ เมื่อ $a>1$ ดังนี้
   - เมื่อ a เพิ่มขึ้น และ $x>0$ กราฟจะเบนเข้าหาแกน Y
   - กราฟทั้งหมดตัดแกน Y ที่จุด $(0,1)$
   - กราฟทั้งหมดไม่ตัดแกน X โดยเส้นกำกับแนวนอน คือ เส้นตรง $y=0$ หรือแกน X

ครูอาจเสริมความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $f(x)=a^x$ เมื่อ $0<a<1$ ได้ โดยให้นักเรียนทำกิจกรรมสำรวจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (2) ดังนี้

กิจกรรม : สำรวจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (2)

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นให้นักเรียนเปิดเว็บไซต์ ipst.me/9046
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำรวจกราฟของฟังก์ชัน $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ โดย

   1) คลิกที่รูปสี่เหลี่ยมหน้า Show g เพื่อให้เครื่องหมาย ✓ ปรากฏ

   2) คลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ x

   แล้วพิจารณาว่า

   - เมื่อ x เปลี่ยนจากน้อยไปมาก ค่าของ $g(x)$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร
   - เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวกและเพิ่มขึ้น ค่าของ $g(x)$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร
   - เมื่อ x เป็นจำนวนจริงลบและลดลง ค่าของ $g(x)$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร
3. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่สำรวจกราฟของฟังก์ชัน $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ เมื่อ a เป็นค่าอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ 2 โดยให้นักเรียนคลิกลากปุ่มบนสไลเดอร์ a แล้วใช้คำถามในข้อ 2 เพื่อสังเกตการเปลี่ยนแปลงค่าของ $g(x)$
4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับข้อสังเกตที่ได้ในข้อ 2 และ 3 เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า สำหรับฟังก์ชัน $g(x)=b^x$ เมื่อ $0<b<1$

   - เมื่อ x เปลี่ยนจากน้อยไปมาก ค่าของ $g(x)$ จะลดลง นั่นคือ g เป็นฟังก์ชันลดบนโดเมนของฟังก์ชันซึ่งก็คือเซตของจำนวนจริง
   - เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวกและเพิ่มขึ้น ค่าของ $g(x)$ จะค่อย ๆ ลดลงจนเข้าใกล้ศูนย์ แต่ไม่เท่ากับศูนย์
   - เมื่อ x เป็นจำนวนจริงลบและลดลง ค่าของ $g(x)$ จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและไม่มีที่สิ้นสุด

5. ครูให้นักเรียนแต่ละคู่ปรับสไลเดอร์ a จากน้อยไปมาก เพื่อสำรวจกราฟของฟังก์ชัน $g(x)=b^x$ เมื่อ $b=\frac{1}{a}$ แล้วพิจารณาว่า
   - เมื่อ a เพิ่มขึ้นหรือ b ลดลง ลักษณะของกราฟ $g(x)=a^x$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร
   - กราฟตัดแกน Y หรือไม่ ถ้าตัด จงหาจุดที่กราฟตัดแกน Y
   - กราฟตัดแกน X หรือไม่ ถ้าตัด จงหาจุดที่กราฟตัดแกน X ถ้าไม่ตัด จงหาเส้นกำกับแนวนอน
6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับข้อสังเกตที่ได้ในข้อ 5 เพื่อให้ได้ข้อสรุปสำหรับกราฟของฟังก์ชัน $g(x)=b^x$ เมื่อ $0<b<1$ ดังนี้
   - เมื่อ b ลดลง และ $x>0$ กราฟจะเบนเข้าหาแกน Y เมื่อ a มีค่าน้อยลง
   - กราฟทั้งหมดตัดแกน Y ที่จุด $(0,1)$ ซึ่งจากกิจกรรมสำรวจกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (1) และ (2) สามารถสรุปได้ว่า สำหรับกราฟของฟังก์ชัน $y=a^x, a>0$ และ $a\neq 0$ จะผ่านจุด $(0,1)$ เสมอ ทั้งนี้เพราะ $a^0=1$
   - กราฟทั้งหมดไม่ตัดแกน X โดยเส้นกำกับแนวนอน คือ เส้นตรง $y=0$ หรือแกน X

เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลแล้ว ครูอาจให้นักเรียนเชื่อมโยงกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลกับการเลื่อนกราฟซึ่งนักเรียนได้เรียนมาแล้วในบทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยให้นักเรียนทำกิจกรรมสำรวจการเลื่อนกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ดังนี้

กิจกรรม : สำรวจการเลื่อนกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ครูจับคู่นักเรียนแบบคละความสามารถ จากนั้นให้นักเรียนเปิดเว็บไซต์ ipst.me/9047
2. ครูให้นักเรียนคลิกที่รูปสี่เหลี่ยมหน้า show f เพื่อให้เครื่องหมาย ✓ ปรากฏ จากนั้นปรับสไลเดอร์ c พร้อมสังเกตว่ากราฟของ $g(x)=2^x+c$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร เมื่อเทียบกับกราฟของ $f(x)=2^x$
3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับข้อสังเกตที่ได้ในข้อ 2 เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า
   - เมื่อ $c>0$ กราฟของ $g(x)=2^x+c$ เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $f(x)=2^x$ ขึ้น
   - เมื่อ $c<0$ กราฟของ $g(x)=2^x+c$ เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $f(x)=2^x$ ลง
4. ครูให้นักเรียนกำหนดสไลเดอร์ c เป็นค่าใดค่าหนึ่ง จากนั้นปรับสไลเดอร์ x พร้อมสังเกตผลต่างของ $f(x)$ กับ $g(x)$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร เมื่อเทียบกับกราฟของ $f(x)=2^x$ โดยให้นักเรียนบันทึกลงในตารางต่อไปนี้

c	x	ค่าของ $g(x)$	ค่าของ $f(x)$	ผลต่างของ $f(x)$ กับ $g(x)$

5. ครูและนักเรียนร่วมกันพิจารณาข้อสรุปในข้อ 3 และข้อสังเกตที่ได้ในข้อ 4 จากนั้นร่วมกันอภิปรายเพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า
   - เมื่อ $c>0$ กราฟของ $g(x)=2^x+c$ เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $f(x)=2^x$ ขึ้น c หน่วย

- เมื่อ $c<0$ กราฟของ $g(x)=2^x+c$ เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $f(x)=2^x$ ลง c หน่วย

6. ครูให้นักเรียนคลิกที่รูปสี่เหลี่ยมหน้า show g อีกครั้ง เพื่อซ่อนกราฟ
7. ครูให้นักเรียนคลิกที่รูปสี่เหลี่ยมหน้า show h เพื่อให้เครื่องหมาย ✓ ปรากฏ แล้วปรับสไลเดอร์ c และ x พร้อมทั้งสังเกตว่ากราฟของ $h(x)=2^{x+c}$ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร เมื่อเทียบกับกราฟของ $f(x)=2^x$
8. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับข้อสังเกตที่ได้ในข้อ 7 เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า
   - เมื่อ $c>0$ กราฟของ $h(x)=2^{x+c}$ เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $f(x)=2^x$ ไปทางซ้าย c หน่วย
   - เมื่อ $c<0$ กราฟของ $h(x)=2^{x+c}$ เกิดจากการเลื่อนกราฟของ $f(x)=2^x$ ไปทางขวา c หน่วย

สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรทบทวนเรื่องฟังก์ชัน $1-1$ เนื่องจากเป็นพื้นฐานสำคัญที่นำไปใช้ในการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลตามตัวอย่างที่ 26 – 27 และ 30
- ครูควรทบทวนเรื่องฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด เนื่องจากเป็นพื้นฐานสำคัญที่นำไปใช้ในการแก้อสมการเอกซ์โพเนนเชียลตามตัวอย่างที่ 28 – 29

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 2.2

4. จงจับคู่ฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้กับกราฟในข้อ (ก) – (จ)

แบบฝึกหัดนี้ไม่ได้เน้นเกี่ยวกับการเขียนกราฟแต่มีไว้เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับเชื่อมโยงกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลกับการเลื่อนกราฟ ซึ่งนักเรียนมีพื้นฐานเกี่ยวกับการเลื่อนกราฟมาแล้วจากที่ได้ศึกษาในเรื่องเทคนิคการเขียนกราฟโดยการเลื่อนกราฟในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 บทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ฟังก์ชันลอการิทึม

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรทบทวนเรื่องฟังก์ชันผกผันก่อนแนะนำบทนิยามเกี่ยวกับฟังก์ชันลอการิทึม เพื่อเชื่อมโยงฟังก์ชันลอการิทึมที่กำลังจะเรียนกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่ได้เรียนมาแล้ว นอกจากนี้ครูอาจใช้เทคโนโลยีช่วยในการเขียนกราฟ เพื่อเชื่อมโยงกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลกับกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม
- บทนิยามเกี่ยวกับฟังก์ชันลอการิทึมตามบทนิยาม 8 นั้น กำหนดโดเมนของฟังก์ชันเป็น $\mathbb{R}^+$ นั่นคือ ในการเขียน $\log_a x$ นั้น $x > 0$ เสมอ

สมการและอสมการลอการิทึม

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรทบทวนเรื่องฟังก์ชัน $1-1$ เนื่องจากเป็นพื้นฐานสำคัญที่นำไปใช้ร่วมกับสมบัติที่สำคัญของลอการิทึมตามทฤษฎีบท 7 ในการแก้สมการลอการิทึมตามตัวอย่างที่ $41-43$
- ในการแก้สมการลอการิทึม ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการแก้สมการเสมอ เพื่อตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้อยู่ในโดเมนตามบทนิยามของฟังก์ชันลอการิทึมหรือไม่ และตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้ทำให้สมการที่กำหนดให้เป็นจริงหรือไม่
- **ตัวอย่างที่ 43**

  จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log(x+2)+\log(x-1)=1$

  การแก้สมการในตัวอย่างนี้ เมื่อได้ค่า x จากการแก้สมการโดยใช้สมบัติของลอการิทึมแล้ว จะต้องนำค่าของ x ที่ได้แทนใน $\log(x+2)$ และ $\log(x-1)$ เพื่อพิจารณาว่าสอดคล้องกับบทนิยามของลอการิทึมหรือไม่ สำหรับตัวอย่างนี้เมื่อแทน x ด้วย -4 ลงใน $\log(x+2)$ และ $\log(x-1)$ จะได้ $\log(-2)$ และ $\log(-5)$ ตามลำดับ ซึ่งไม่สอดคล้องกับบทนิยามของลอการิทึม ดังนั้น $x=-4$ จึงไม่ใช่คำตอบของสมการที่กำหนด อย่างไรก็ตามในการตรวจสอบดังกล่าวอาจไม่จำเป็นต้องแทนค่า x ที่ได้ในทุกลอการิทึมที่ปรากฏในสมการที่กำหนดให้ แต่เมื่อแทนในลอการิทึมใดลอการิทึมหนึ่งแล้วพบว่าตัวแปรที่อยู่ภายใต้ลอการิทึมนั้นน้อยกว่า 0 สามารถสรุปได้ว่าค่าของ x นั้นไม่ใช่คำตอบของสมการ เช่น เมื่อแทน x ด้วย -4 ลงใน $\log(x+2)$ แล้วได้ $\log(-2)$ จะสรุปได้ว่า $x=-4$ ไม่ใช่คำตอบของสมการที่กำหนดให้ โดยไม่จำเป็นต้องแทน $x=-4$ ลงใน $\log(x-1)$

- ครูควรทบทวนเรื่องฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด เนื่องจากเป็นพื้นฐานสำคัญที่นำไปใช้ร่วมกับสมบัติที่สำคัญของลอการิทึมตามทฤษฎีบท 7 ในการแก้อสมการลอการิทึมตามตัวอย่างที่ 44 และ 48
- ในการแก้อสมการ ครูควรเน้นย้ำนักเรียนเกี่ยวกับโดเมนของฟังก์ชันลอการิทึมซึ่งจะมีผลต่อเซตคำตอบของอสมการที่ได้
- ในการแก้อสมการลอการิทึม ครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการแก้อสมการเสมอ เพื่อตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้อยู่ในโดเมนตามบทนิยามของฟังก์ชันลอการิทึมหรือไม่ และตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้ทำให้อสมการที่กำหนดให้เป็นจริงหรือไม่

การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

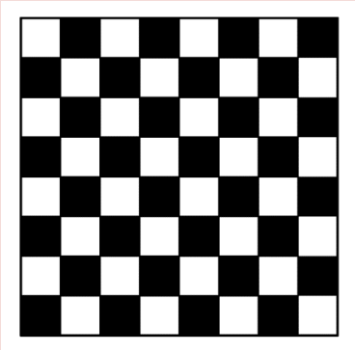
ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ในหัวข้อนี้ไม่ได้เน้นให้นักเรียนจำสูตรเกี่ยวกับการเพิ่มจำนวนประชากร ดอกเบี้ยทบต้น อัตราเงินเฟ้อ การเพิ่มจำนวนแบคทีเรีย ปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่กำลังสลายตัว ระดับเสียง ระดับความเป็นกรด – เบส ที่แสดงไว้ในหนังสือเรียน แต่หัวข้อนี้ให้ความสำคัญกับการใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมในการแก้ปัญหา ดังนั้นในการวัดผลประเมินผลครูควรเน้นที่กระบวนการแก้ปัญหามากกว่าการให้นักเรียนท่องจำสูตร โดยอาจระบุสูตรที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาไว้ให้

2.3 แนวทางการจัดกิจกรรมในหนังสือเรียน

กิจกรรม : ปัญหาพระราชา

ตามตำนานอินเดียโบราณ Sissa Ben Dahir เป็นขุนนางของพระราชา Shirham โดย Sissa ได้คิดค้นเกมที่ใช้เล่นบนกระดาน ซึ่งเรียกว่า “หมากรุก” ขึ้น



กระดานหมากรุก ขนาด 8×8

พระราชาตัดสินใจที่จะให้รางวัล Sissa สำหรับความทุ่มเทของเขา พระราชาจึงได้ตรัสถาม Sissa ว่าต้องการสิ่งใดเป็นรางวัล Sissa ได้คิดอย่างรอบคอบและขอสิ่งต่อไปนี้จากพระราชา

- ขอข้าว 1 เมล็ด สำหรับช่องที่ 1 ของกระดานหมากรุก
- ขอข้าว 2 เมล็ด สำหรับช่องที่ 2 ของกระดานหมากรุก
- ขอข้าว 4 เมล็ด สำหรับช่องที่ 3 ของกระดานหมากรุก
- ขอข้าว 8 เมล็ด สำหรับช่องที่ 4 ของกระดานหมากรุก
- ขอข้าว 16 เมล็ด สำหรับช่องที่ 5 ของกระดานหมากรุก

และเพิ่มเมล็ดข้าวในรูปแบบเดียวกันนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนครบทั้ง 64 ช่อง

พระราชาทรงตรัสว่า นี่คือคำขอที่เล็กน้อยมาก และตกลงจะมอบรางวัลให้ตามที่ Sissa ขอ

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. เติมจำนวนเมล็ดข้าวลงในตารางให้สมบูรณ์

กระดานหมากรุกช่องที่	จำนวนเมล็ดข้าว	จำนวนเมล็ดข้าวสะสม
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

2. ใช้ข้อมูลจากตารางในข้อ 1 เขียนฟังก์ชันแสดงจำนวนเมล็ดข้าวสำหรับกระดานหมากรุกช่องที่ n
3. พระราชาต้องหาเมล็ดข้าวจำนวนเท่าใดสำหรับช่องกระดานช่องสุดท้ายของกระดานหมากรุก
4. ใช้ข้อมูลจากตารางในข้อ 1 เขียนฟังก์ชันแสดงจำนวนเมล็ดข้าวสะสมช่องที่ 1 จนถึงช่องที่ n
5. จำนวนเมล็ดข้าวที่ Sissa จะได้รับทั้งหมดเป็นเท่าใด
6. ถ้าเมล็ดข้าว 1 เมล็ดหนัก 0.000008 กิโลกรัมโดยประมาณแล้ว จงหาน้ำหนักรวมของเมล็ดข้าวทั้งหมดที่ Sissa ขอจากพระราชา
7. ถ้าในแต่ละปีมีผลผลิตข้าวในโลกรวมทั้งหมดประมาณ 580 ล้านตัน แล้วจะต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่ปี จึงจะมีจำนวนเมล็ดข้าวครบตามที่ Sissa ขอพระราชา
   (1 ตัน เท่ากับ 1,000 กิโลกรัม)

เฉลยกิจกรรม : ปัญหาพระราชา

1.

กระดานหมากรุกช่องที่	จำนวนเมล็ดข้าว	จำนวนเมล็ดข้าวสะสม
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31
6	32	63
7	64	127
8	128	255
9	256	511
10	512	1023

2. $f(n) = 2^{n-1}$ (คำตอบในข้อนี้ได้จากการสังเกต)

3. 2^{63} หรือ 9,223,372,036,854,775,808 เมล็ด

4. $g(n) = 2^{n} - 1$ (คำตอบในข้อนี้ได้จากการสังเกต)

5. $2^{64} - 1$ หรือ 18,446,744,073,709,551,615 เมล็ด

6. 147,573,952,589,676 กิโลกรัม

7. 254.4 ปี

แนวทางการจัดกิจกรรม : ปัญหาพระราชา

เวลาในการจัดกิจกรรม 50 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนใช้ความรู้ เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม “ปัญหาพระราชา”
2. เครื่องคำนวณ

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนแบบคละความสามารถ กลุ่มละ 3 – 4 คน
2. ครูแจกใบกิจกรรมปัญหาพระราชาให้กับนักเรียนทุกคนแล้วให้นักเรียนศึกษาสถานการณ์ปัญหา จากนั้นครูนำอภิปรายเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาเพื่อให้นักเรียนทุกคนเข้าใจตรงกัน
3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 1 – 7 ในใบกิจกรรม ให้ทันตามเวลาที่กำหนด โดยให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณตามความเหมาะสม ในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรมครูควรเดินดูนักเรียนให้ทั่วถึงทุกกลุ่มและคอยชี้แนะ
4. ครูสุ่มเลือกกลุ่มนักเรียนเพื่อตอบคำถาม และให้นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบ รวมทั้งกระตุ้นให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบคำตอบ
5. ครูนำนักเรียนอภิปรายเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปของกิจกรรมนี้เกี่ยวกับการเพิ่มขึ้นอย่างทวีคูณของเลขยกกำลัง

กิจกรรม : ซอมบี้บุก

สมมติว่าเกิดเหตุการณ์ซอมบี้บุกโรงเรียน เริ่มจากซอมบี้ 5 ตัว บุกเข้ามาในโรงเรียน และกำหนดให้ในแต่ละวัน ซอมบี้แต่ละตัวสามารถแพร่เชื้อให้กับผู้ที่ยังไม่ได้รับเชื้อจำนวน 2 คน โดยผู้ที่ได้รับเชื้อจะกลายเป็นซอมบี้ด้วย

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. จากสถานการณ์ข้างต้น นักเรียนคิดว่าจำนวนซอมบี้กับเวลามีความสัมพันธ์ลักษณะใด
2. จากสถานการณ์ข้างต้น ให้นักเรียนเติมตารางด้านล่างให้สมบูรณ์

วันที่	จำนวนซอมบี้ (ตัว)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

3. นำข้อมูลในข้อ 2 ไปเขียนกราฟโดยให้แกน X แสดงเวลา (วัน) และแกน Y แสดงจำนวนซอมบี้ (ตัว)
4. ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและจำนวนซอมบี้มีกราฟเป็นลักษณะใด เพราะเหตุใด

5. เขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและจำนวนซอมบี้
6. สมมติประเทศไทยมีจำนวนประชากร 69,000,000 คน คนทั้งประเทศจะกลายเป็นซอมบี้ภายในเวลาเท่าใด
7. สมมติจำนวนประชากรโลกมีทั้งหมด 7,570,000,000 คน คนทั้งโลกจะกลายเป็นซอมบี้ภายในเวลาเท่าใด
8. ถ้าตอนเริ่มต้นมีซอมบี้ 12 ตัว และซอมบี้เคลื่อนที่เร็ว ทำให้ซอมบี้แต่ละตัวสามารถแพร่เชื้อให้กับผู้ที่ยังไม่ได้รับเชื้อจำนวน 5 คนต่อวัน คนทั้งโลกจะกลายเป็นซอมบี้ภายในเวลาเท่าใด
9. ถ้าให้นักเรียนเลือกระหว่างสถานการณ์ที่มีจำนวนซอมบี้เริ่มต้นมาก ๆ โดยซอมบี้แต่ละตัวเคลื่อนที่ช้า ทำให้แต่ละวันแพร่เชื้อได้จำนวนไม่มาก กับสถานการณ์ที่มีจำนวนซอมบี้เริ่มต้นน้อย แต่ซอมบี้แต่ละตัวเคลื่อนที่เร็ว ทำให้แต่ละวันแพร่เชื้อได้จำนวนมาก นักเรียนจะเลือกสถานการณ์ใด เพราะเหตุใด
10. สมมติว่าสามารถกักบริเวณทำให้ซอมบี้หยุดการแพร่เชื้อได้ ในขณะที่ซอมบี้มีจำนวน 7,500,000,000 ตัว และมีกลุ่มนักวิทยาศาสตร์คิดค้นสารที่ทำให้ซอมบี้กลับมาเป็นคนได้เมื่อพ่นสารลงไปบนตัวซอมบี้ โดยสารนี้ได้ผล 20% นั่นคือ ซอมบี้ที่ได้รับสารนี้ 100 ตัว จะกลับมาเป็นคนได้ 20 คน ถ้าพ่นสารให้ซอมบี้หนึ่งครั้งต่อวัน ในเวลา 10 วัน จะมีซอมบี้เหลือเท่าใด ให้นักเรียนเติมตารางด้านล่างให้สมบูรณ์

วันที่	จำนวนซอมบี้ (ตัว)
0	7,500,000,000
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

11. นำข้อมูลในข้อ 10 ไปเขียนกราฟ โดยให้แกน X แสดงรอบของการพ่นสาร (วัน) และแกน Y แสดงจำนวนซอมบี้ที่เหลือ (ตัว)

12. ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและจำนวนซอมบี้ที่เหลือมีกราฟเป็นลักษณะใด เพราะเหตุใด

13. เขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและจำนวนซอมบี้ที่เหลือ

14. ถ้าให้พ่นสารเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ ซอมบี้ทั้งหมดจะกลับไปเป็นคนภายในเวลากี่วัน

15. จากฟังก์ชันแสดงการเพิ่มขึ้นและการลดลงของจำนวนซอมบี้ นักเรียนคิดว่ามีอะไรที่เหมือนกันและอะไรที่ต่างกัน

เฉลยกิจกรรม : ซอมบี้บุก

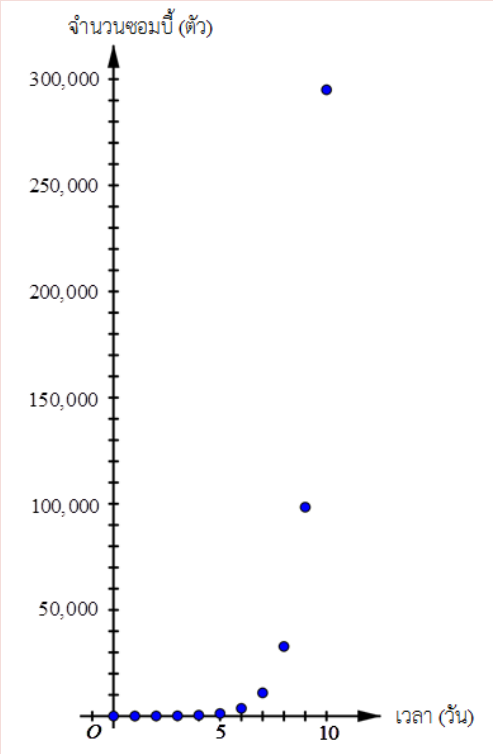
1. จำนวนซอมบี้ (y ตัว) กับเวลา (x วัน) สัมพันธ์กันแบบฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

   หมายเหตุ ในขั้นตอนนี้นักเรียนอาจยังไม่ได้คำตอบที่ถูกต้อง

2.

วันที่	จำนวนซอมบี้ (ตัว)
0	5
1	15
2	45
3	135
4	405
5	1,215
6	3,645
7	10,935
8	32,805
9	98,415
10	295,245

3.



4. กราฟที่ได้เป็นส่วนหนึ่งของกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เนื่องจากเมื่อ x เพิ่มขึ้น y จะเป็นสามเท่าของจำนวนก่อนหน้า แต่โดเมนของความสัมพันธ์เป็น $\mathbb{N} \cup \{0\}$

5. $y = 5(3^x)$ โดยที่ x แทนเวลา (วัน) และ y แทนจำนวนซอมบี้ (ตัว)

6. ใช้เทคโนโลยีช่วยในการคำนวณหาค่า x ที่ทำให้ $5(3^x) \geq 69,000,000$ จะได้ $x \geq 15$ ดังนั้น คนทั้งประเทศจะติดเชื้อซอมบี้ภายในเวลา 15 วัน

7. ใช้เทคโนโลยีช่วยในการคำนวณหาค่า x ที่ทำให้ $5(3^x) \geq 7,570,000,000$ จะได้ $x \geq 20$ ดังนั้น คนทั้งโลกจะติดเชื้อซอมบี้ภายในเวลา 20 วัน

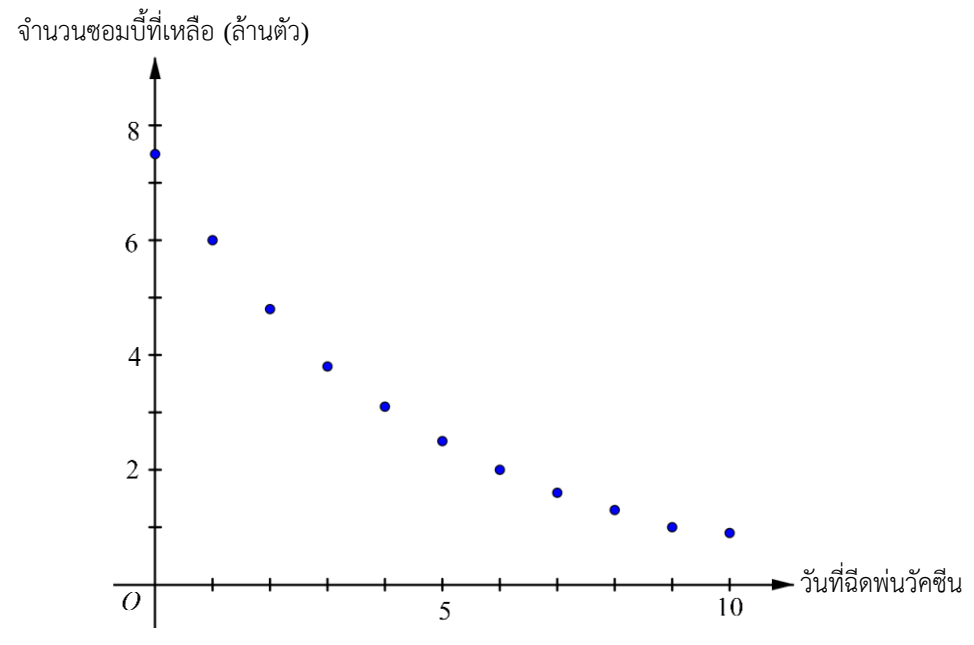
8. ใช้เทคโนโลยีช่วยในการคำนวณหาค่า x ที่ทำให้ $12(6^x) \geq 7,570,000,000$ จะได้ $x \geq 12$ ดังนั้น คนทั้งโลกจะติดเชื้อซอมบี้ภายในเวลา 12 วัน

9. นักเรียนอาจจะเลือกสถานการณ์ใดก็ได้ แต่ไม่ว่านักเรียนจะเลือกสถานการณ์ใด นักเรียนควรให้เหตุผลได้ว่า ซอมบี้ในสถานการณ์แรกจะแพร่เชื้อได้ช้ากว่าในสถานการณ์ที่สอง โดยฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและจำนวนซอมบี้จะอยู่ในรูป $y = a(b+1)^x$ เมื่อ a เป็นจำนวนซอมบี้เริ่มต้น และ b เป็นจำนวนคนที่ซอมบี้แพร่เชื้อให้ต่อวัน ดังนั้น ยิ่ง b มาก ซอมบี้ก็จะยิ่งเพิ่มจำนวนได้เร็วมากขึ้น

10.

วันที่	จำนวนซอมบี้ที่เหลือ (ตัว)
0	7,500,000,000
1	6,000,000,000
2	4,800,000,000
3	3,840,000,000
4	3,072,000,000
5	2,457,600,000
6	1,966,080,000
7	1,572,864,000
8	1,258,291,200
9	1,006,632,960
10	805,306,368

11. กราฟที่ได้มีลักษณะใกล้เคียงกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่เป็นฟังก์ชันลด เนื่องจากในช่วงแรกจำนวนซอมบี้ลดลงอย่างรวดเร็ว จากนั้นจึงค่อย ๆ ลดลง จนเข้าใกล้ศูนย์ ดังรูป



12.กราฟที่ได้มีลักษณะใกล้เคียงกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่เป็นฟังก์ชันลด เนื่องจากในช่วงแรกจำนวนซอมบี้ลดลงอย่างรวดเร็ว จากนั้นจึงค่อย ๆ ลดลง จนเข้าใกล้ศูนย์

13. $y = 7,570,000,000\left(0.8^x\right)$ โดยที่ x แทนเวลา (วัน) และ y แทนจำนวนซอมบี้ที่เหลือ (ตัว)

14.ถ้าซอมบี้ทั้งหมดกลับไปเป็นคน แสดงว่าไม่เหลือซอมบี้เลย

นั่นคือ $7,570,000,000\left(0.8^x\right) = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้นจึงเป็นไปไม่ได้ที่ซอมบี้จะสามารถกลับไปเป็นคนได้ทั้งหมด

15.ฟังก์ชันแสดงการเพิ่มขึ้นและการลดลงของจำนวนซอมบี้ต่างเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งอยู่ในรูป $y = a\left(b^x\right)$ โดย a คือ จำนวนของซอมบี้ตอนเริ่มต้นแต่ละสถานการณ์ ฟังก์ชันทั้งสองต่างกันที่ฐานของเลขยกกำลัง โดยฟังก์ชันแสดงการเพิ่มขึ้นของจำนวนซอมบี้เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เนื่องจากฐานของเลขยกกำลังมากกว่า 1 $(b > 1)$ และฟังก์ชันแสดงการลดลงของจำนวนซอมบี้เป็นฟังก์ชันลด เนื่องจากฐานของเลขยกกำลังน้อยกว่า 1 $(b < 1)$

ข้อเสนอแนะ ครูอาจเพิ่มเติมว่า จำนวนซอมบี้อาจเปรียบได้กับการแพร่กระจายของโรคระบาด คือมีการเพิ่มในลักษณะของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม กล่าวคือ อยู่ในรูป $y = ab^x$ โดยที่ $b > 1$ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจึงเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ ซึ่งสามารถใช้คาดการณ์การระบาดหรือการเพิ่มจำนวนของสิ่งมีชีวิต

แนวทางการจัดกิจกรรม : ซอมบี้บุก

เวลาในการจัดกิจกรรม 100 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนใช้ความรู้ เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม “ซอมบี้บุก”
2. หนังยางรัดของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 – 3 นิ้ว จำนวนเท่ากับจำนวนนักเรียนในห้อง

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแจกใบกิจกรรม “ซอมบี้บุก” จากนั้นให้นักเรียนอ่านสถานการณ์ที่กำหนดในใบกิจกรรมให้เข้าใจ แล้วให้นักเรียนตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 1 โดยไม่คำนึงถึงความถูกต้องของคำตอบ
2. ครูขออาสาสมัครจำนวน 5 คน และกำหนดให้นักเรียนกลุ่มนี้เป็นซอมบี้ตามสถานการณ์เริ่มต้น โดยนักเรียนกลุ่มนี้จะมีหนังยางใส่ไว้ที่ข้อมือคนละ 1 เส้น ซึ่งสมมติให้หนังยางเป็นสัญลักษณ์แสดงการเป็นซอมบี้

3. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่าวันนี้เป็นวันแรกที่พบซอมบี้ติดเชื้อ ดังนั้นจึงกำหนดให้วันนี้เป็นวันที่ 0 ซึ่งมีซอมบี้จำนวน 5 ตัว
4. ครูให้สัญญาณว่าเป็นวันที่ 1 และให้นักเรียนที่เป็นซอมบี้นำหนังยางไปใส่ไว้ที่ข้อมือของเพื่อนตามเงื่อนไขในสถานการณ์
5. ครูถามนักเรียนว่าในขณะนี้มีซอมบี้ในห้องทั้งหมดกี่ตัว จากนั้นครูให้นักเรียนเติมจำนวนซอมบี้ของวันที่ 1 ลงในตารางที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 2
6. ครูและนักเรียนทำซ้ำข้อ 4 และ 5 จนกระทั่งถึงวันที่ 2 หรือ 3 ขึ้นกับจำนวนนักเรียนในห้อง
7. ครูให้นักเรียนเติมข้อมูลลงในตารางที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 2 ให้สมบูรณ์ จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบคำตอบ
8. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนแบบคละความสามารถ กลุ่มละ 3 – 4 คน และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 3 – 15 ในใบกิจกรรม โดยให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถามและร่วมกันตรวจสอบคำตอบทีละข้อ โดยครูต้องคำนึงถึงประเด็นสำคัญต่อไปนี้
   - ในการตอบคำถามข้อ 5 ที่ปรากฏในใบกิจกรรม ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนเขียนข้อมูลในตารางที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 2 เป็นแบบรูป เช่น

วันที่	จำนวนซอมบี้ (ตัว)
0	5
1	$5+5(2)=5(3)$
2	$15+15(2)=5(3^2)$
3	$45+45(2)=5(3^3)$

ซึ่งจะทำให้นักเรียนเข้าใจว่าคำตอบที่ได้คือ $y=5(3^x)$ เชื่อมโยงกับสถานการณ์ที่กำหนดให้อย่างไร

- ในการหาฟังก์ชันที่ใช้เพื่อตอบคำถามข้อ 8 ที่ปรากฏในใบกิจกรรม ให้นักเรียนใช้แนวคิดเดียวกับการตอบคำถามข้อ 5 ที่ปรากฏในใบกิจกรรม
- ในการตอบคำถามข้อ 9 ที่ปรากฏในใบกิจกรรม ครูควรพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ เช่น นักเรียนที่ต้องการให้จำนวนซอมบี้เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ควรเลือกสถานการณ์ที่มีจำนวนซอมบี้เริ่มต้นน้อย แต่ซอมบี้แต่ละตัวเคลื่อนที่เร็ว ทำให้แต่ละวันแพร่เชื้อได้จำนวนมาก

หมายเหตุ ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้เทคโนโลยีช่วยในการเขียนกราฟและการคำนวณ

กิจกรรม : สำรวจการลดอุณหภูมิของน้ำร้อน

อุปกรณ์

1. แก้วบรรจุน้ำร้อนปริมาตรประมาณ 20 มิลลิลิตร
2. เทอร์มอมิเตอร์
3. นาฬิกาจับเวลา (หน่วยเป็นวินาที)

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. บันทึกอุณหภูมิห้องที่อ่านได้จากเทอร์มอมิเตอร์
2. นำเทอร์มอมิเตอร์จุ่มลงในแก้วบรรจุน้ำร้อนที่มีอุณหภูมิไม่ต่ำกว่า 60 องศาเซลเซียส
3. เมื่อระดับของเหลวของเทอร์มอมิเตอร์หยุดนิ่ง ให้เริ่มจับเวลา และอ่านอุณหภูมิ
4. บันทึกอุณหภูมิที่อ่านได้จากเทอร์มอมิเตอร์ทุก ๆ 30 วินาที

วินาทีที่ (x)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
อุณหภูมิ (y)											

วินาทีที่ (x)	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	630
อุณหภูมิ (y)											

วินาทีที่ (x)	660	690	720	750	780	810	840	870	900	930	960
อุณหภูมิ (y)											

วินาทีที่ (x)	990	1,020	1,050	1,080	1,110	1,140	1,170	1,200
อุณหภูมิ (y)								

5. นำข้อมูลที่บันทึกในข้อ 4 ไปเขียนกราฟ โดยให้แกน X แสดงเวลา และแกน Y แสดงอุณหภูมิของน้ำ

6. จากกราฟที่ได้ในข้อ 5

   6.1 เมื่อเวลาผ่านไป อุณหภูมิของน้ำมีค่าเข้าใกล้ค่าใด เพราะเหตุใด

   6.2 ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำมีกราฟเป็นลักษณะใด เพราะเหตุใด

7. จากข้อ 6 สมมติว่าสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำ คือ $y = k + ab^x$ โดยที่ k แทนอุณหภูมิห้อง และ a, b เป็นค่าคงตัว ซึ่งหาได้โดยการทำตามขั้นตอนต่อไปนี้

   7.1 เขียนกราฟของความสัมพันธ์ระหว่างเวลา (x) และ $\log(y-k)$

   7.2 กราฟที่ได้ในข้อ 7.1 ใกล้เคียงกับกราฟเชิงเส้น เพราะเหตุใด หาสมการแสดงความสัมพันธ์นี้

   7.3 จากสมการแสดงความสัมพันธ์ที่ได้ในข้อ 7.2 หาค่า a และ b และหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำ

   7.4 เขียนกราฟของสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำที่ได้ในข้อ 7.3 ลงในกราฟข้อ 5 เพื่อเปรียบเทียบว่ากราฟของสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำที่ได้ใกล้เคียงกับข้อมูลที่ได้จากการทดลองหรือไม่

เฉลยกิจกรรม : สำรวจการลดอุณหภูมิของน้ำร้อน

1. อุณหภูมิห้องที่บันทึกได้คือ 29 องศาเซลเซียส

   หมายเหตุ คำตอบขึ้นอยู่กับอุณหภูมิห้องในขณะที่ผู้เรียนทำการทดลอง

2. –
3. –

4.

วินาทีที่ (x)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
อุณหภูมิ (y)	60	58.5	57.2	56	54.9	53.5	52.5	51.5	50.5	50	49

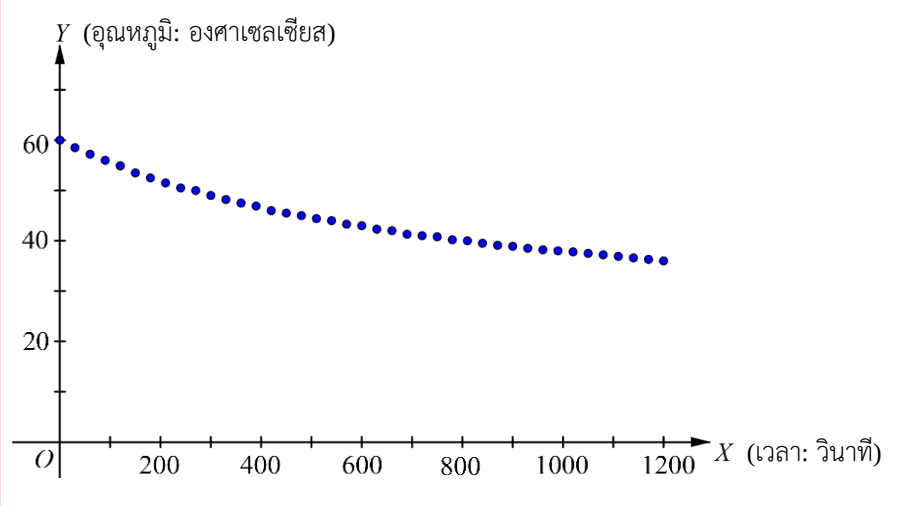
วินาทีที่ (x)	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	630
อุณหภูมิ (y)	48.2	47.5	46.9	46	45.5	45	44.4	44	43.3	43	42.3

วินาทีที่ (x)	660	690	720	750	780	810	840	870	900	930	960
อุณหภูมิ (y)	42	41.3	41	40.8	40.2	40	39.5	39.1	38.9	38.5	38.2

วินาทีที่ (x)	990	1,020	1,050	1,080	1,110	1,140	1,170	1,200
อุณหภูมิ (y)	38	37.8	37.5	37.2	36.9	36.6	36.3	36

หมายเหตุ คำตอบขึ้นอยู่กับการทดลองของนักเรียน

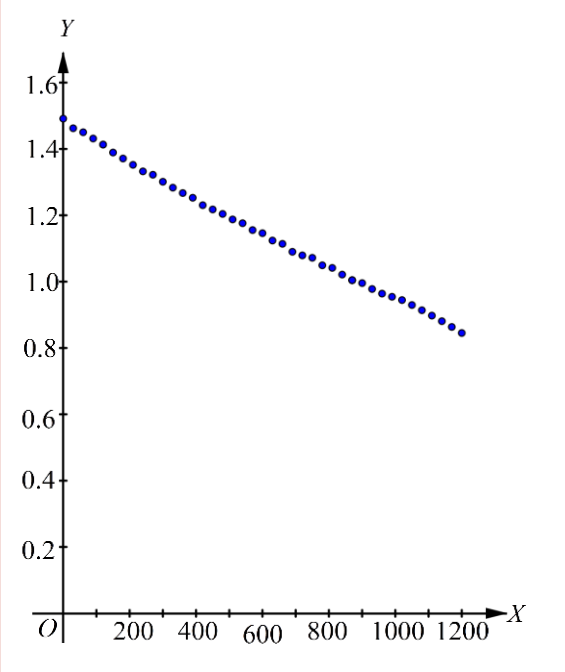
5.



6. 6.1 เข้าใกล้อุณหภูมิห้อง เนื่องจากน้ำจะถ่ายโอนความร้อน จนกระทั่งมีอุณหภูมิเท่ากับสิ่งแวดล้อม

6.2 กราฟที่ได้มีลักษณะใกล้เคียงกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่เป็นฟังก์ชันลด เนื่องจากในช่วงแรกอุณหภูมิลดลงอย่างรวดเร็ว จากนั้นจึงค่อย ๆ ลดลง จนเข้าใกล้อุณหภูมิห้อง

7. 7.1



7.2 จากสมการ $y = k + ab^x$ จะได้ $\log(y-k) = \log a + x\log b$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ $\log(y-k)$ จึงมีแนวโน้มเป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น โดยสมการแสดงความสัมพันธ์ประมาณด้วย spreadsheet ได้เป็น

$\log(y-k) = -0.0005x + 1.4642$

หมายเหตุ จากข้อ 7.1 จะได้แผนภาพการกระจายของข้อมูล จากนั้นหารูปแบบของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลว่าควรอยู่ในรูปแบบใด ซึ่งเมื่อพิจารณาจากแผนภาพการกระจายของข้อมูลแล้ว พบว่าควรจะประมาณด้วยเส้นตรง ซึ่งจะได้สมการอยู่ในรูป $y = mx + c$ และจากเครื่องมือใน spreadsheet จะได้ $m = -0.0005$ และ $c = 1.4642$ จึงได้ $\log(y-k) = -0.0005x + 1.4642$

7.3 จากสมการแสดงความสัมพันธ์ที่ได้ในข้อ 7.2 คือ $\log(y-k)=-0.0005x+1.4642$ จะได้ $\log a=1.4642$ และ $\log b=-0.0005$ นั่นคือ $a=10^{1.4642}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 29.1206 และ $b=10^{-0.0005}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 0.9988 และจากข้อ 1 บันทึกอุณหภูมิห้องได้เป็น 29 องศาเซลเซียส ดังนั้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและอุณหภูมิของน้ำคือ $y=29+29.1206(0.9988)^x$

หมายเหตุ เมื่อแทนข้อมูลจากตารางในข้อ 4 ลงในสมการ $y=29+29.1206(0.9988)^x$ จะได้ว่าบางข้อมูลอาจทำให้สมการเป็นเท็จ เช่น เมื่อแทน x และ y ด้วย 0 และ 60 ตามลำดับ จะได้ $60=29+29.1206(0.9988)^0$ ซึ่งเป็นเท็จ เนื่องจากสมการ $y=29+29.1206(0.9988)^x$ หาได้จากสมการ $\log(y-k)=-0.0005x+1.4642$ ซึ่งได้จากการประมาณด้วย spreadsheet

แนวทางการจัดกิจกรรม : สำรวจการลดอุณหภูมิของน้ำร้อน

เวลาในการจัดกิจกรรม 50 นาที

กิจกรรมนี้เสนอไว้ให้นักเรียนเชื่อมโยงและใช้ความรู้ เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เพื่อแก้ปัญหาในสถานการณ์เกี่ยวกับการถ่ายโอนความร้อน โดยกิจกรรมนี้มีสื่อ/แหล่งการเรียนรู้ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรม “สำรวจการลดอุณหภูมิของน้ำร้อน”
2. ใบความรู้เรื่องการถ่ายโอนความร้อน

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนแบบคละความสามารถกลุ่มละ 3 – 4 คน
2. ครูแจกใบกิจกรรม “สำรวจการลดอุณหภูมิของน้ำร้อน” ให้กับนักเรียนทุกคน แล้วให้นักเรียนศึกษาขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 1 – 4 ในใบกิจกรรม
3. ครูให้นักเรียนลงมือทำกิจกรรมตามขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 1 – 4 ในใบกิจกรรม โดยในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรมครูควรเดินดูนักเรียนให้ทั่วถึงทุกกลุ่ม และคอยชี้แนะเมื่อนักเรียนพบปัญหา
4. เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มปฏิบัติตามขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 1 – 4 ในใบกิจกรรมเรียบร้อยแล้ว ครูให้นักเรียนลงมือเขียนกราฟตามขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 5 ในใบกิจกรรม โดยครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้เทคโนโลยีในการเขียนกราฟ ทั้งนี้ผลการทดลองของนักเรียนแต่ละกลุ่มอาจแตกต่างกัน แต่แนวโน้มของกราฟควรเป็นไปในทิศทางเดียวกัน
5. ในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 6 ในใบกิจกรรม ครูควรให้นักเรียนทบทวนความรู้เรื่องการถ่ายโอนความร้อนจากใบความรู้ จากนั้นจึงให้นักเรียนตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติข้อ 6 ในใบกิจกรรม
6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบของคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 6 ในใบกิจกรรม โดยมีประเด็นสำคัญดังนี้
   - ในการตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 6.1 ในใบกิจกรรม นักเรียนควรเชื่อมโยงคำตอบที่ได้กับข้อเท็จจริงของการถ่ายโอนความร้อน
   - ในการตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 6.2 ในใบกิจกรรม นักเรียนควรตั้งข้อสังเกตได้ว่าแนวโน้มของข้อมูลนั้นแสดงได้โดยใช้ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่เป็นฟังก์ชันลด ครูควรสนับสนุนให้นักเรียนให้เหตุผลประกอบคำตอบ

7. ครูให้นักเรียนปฏิบัติและตอบคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 7 ในใบกิจกรรม โดยครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้เทคโนโลยีในการเขียนกราฟในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 7.1 ในใบกิจกรรม
8. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายคำตอบของคำถามที่ปรากฏในขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรมข้อ 7 ในใบกิจกรรม รวมถึงอภิปรายว่าเพราะเหตุใดกิจกรรมนี้จึงสนใจสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x และ $\log(y-k)$

2.4 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนเป็นการวัดผลการเรียนรู้เพื่อปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม และทฤษฎีบทเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม	2.1ก	ข้อ 1, 2
รากที่สองของจำนวนจริง รากที่ n ของจำนวนจริง สมบัติของรากที่ n ของจำนวนจริง และการหาผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์	2.1ก	ข้อ 3 – 5
เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ และทฤษฎีบทเกี่ยวกับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	2.1ข	ข้อ 1, 2
การบวก ลบ คูณ และหารเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	2.1ข	ข้อ 3 – 7
การแก้สมการที่มีเครื่องหมายกรณฑ์	2.1ข	ข้อ 8, 9
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	2.2	ข้อ 1 – 4
ค่าของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	2.2	ข้อ 5
สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล	2.2	ข้อ 6 – 9
ฟังก์ชันลอการิทึมและกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม	2.3	ข้อ 1, 2, 4, 5
ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลอการิทึม	2.3	ข้อ 3, 6
การหาค่าลอการิทึม	2.4	ข้อ 1
แอนติลอการิทึม	2.4	ข้อ 2

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
การเปลี่ยนฐานของลอการิทึม	2.5	ข้อ 1 – 4
สมการลอการิทึม	2.6	ข้อ 1 – 5
อสมการลอการิทึม	2.6	ข้อ 6
การประยุกต์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	2.7	ข้อ 1 – 8

2.5 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 มีจุดมุ่งหมายว่าเมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม แล้วนักเรียนสามารถ

1. ใช้สมบัติของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์และจำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังในการแก้ปัญหา
2. บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
3. อธิบายลักษณะของกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
4. แก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล
5. แก้สมการและอสมการลอการิทึม
6. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย นอกจากนี้ประกอบด้วยโจทย์ฝึกทักษะที่มีความน่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้ แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 บทที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย					
		ใช้สมบัติของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์และจำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังในการแก้ปัญหา	บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	อธิบายลักษณะของกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	แก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล	แก้สมการและอสมการลอการิทึม	ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมในการแก้ปัญหา
1.	1)	✓					
	2)	✓					
	3)	✓					
	4)	✓					
	5)	✓					
	6)	✓					
	7)	✓					
	8)	✓					
	9)	✓					
	10)	✓					
	11)	✓					
	12)	✓					

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย					
		ใช้สมบัติของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์และจำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังในการแก้ปัญหา	บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	อธิบายลักษณะของกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	แก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล	แก้สมการและอสมการลอการิทึม	ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมในการแก้ปัญหา
	13)	✓					
	14)	✓					
2.	1)	✓					
	2)	✓					
	3)	✓					
	4)	✓					
3.		✓					
4.	1)			✓			
	2)			✓			
	3)		✓	✓			
5.	1)			✓			
	2)		✓	✓			
	3)		✓	✓			
6.	ก			✓			
	ข			✓			
	ค			✓			

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย					
		ใช้สมบัติของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์และจำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังในการแก้ปัญหา	บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	อธิบายลักษณะของกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	แก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล	แก้สมการและอสมการลอการิทึม	ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมในการแก้ปัญหา
	ง			✓			
	จ			✓			
	ฉ			✓			
7.	1)		✓				
	2)		✓				
	3)		✓				
	4)		✓				
8.	1)					✓	
	2)					✓	✓
	3)						✓
	4)						✓
	5)						✓
	6)						✓
	7)					✓	
	8)					✓	
	9)						✓

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย					
		ใช้สมบัติของจำนวนจริงในรูปกรณฑ์และจำนวนจริงในรูปเลขยกกำลังในการแก้ปัญหา	บอกความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	อธิบายลักษณะของกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม	แก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียล	แก้สมการและอสมการลอการิทึม	ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึมในการแก้ปัญหา
	10)						✓
9.							✓
10.					✓		
11.					✓		
12.	1)				✓		
	2)				✓		
13.					✓		
14.	1)				✓		
	2)				✓		
15.					✓		
16.	1)	โจทย์ท้าทาย					
	2)	โจทย์ท้าทาย					
17.		โจทย์ท้าทาย					

2.6 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม สำหรับรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

   1) $4^x - 2^x - 1 = 2^{x-1}$ 2) $4.5^x + 1.5^x = 0.5^{x-1}$

   3) $2^x + 2^{-x} = 2$

2. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

   1) $\log_6 x + \log_6 (x-5) = 2$ 2) $\log_3 (2+x^2) = 3$

   3) $\log_x (x+2) = 2$

3. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

   1) $6^x + 1 < 3^x + 2^x$ 2) $2^{2x} + 1 \le 2^{x+1}$

   3) $2^{2x} \le 3^x$

4. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

   1) $\ln(x+1) - \ln x < 1$ 2) $\log(x+1) - \log x \ge 1$

5. จงเขียนจำนวนจริงต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

   1) $\dfrac{\sqrt{1+5\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ 2) $\sqrt{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}$

6. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1) $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3$ 2) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{4}}$

7. กำหนดให้ $a=9$ และ $b=-7$ จงหาค่าของ $\sqrt[5]{ab^4}\sqrt[10]{a^3b^2}$

8. กำหนดให้ $a=\left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ จงเขียน $\dfrac{a-\sqrt{2}a^{-2}}{a^4}$ ให้อยู่ในรูป $m+\sqrt{2}n$ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็ม

9. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องสมการ $\left(128^x\right)\left(243^y\right)=\left(12^x\right)\left(8^x\right)\left(24^y\right)\left(3^{x+y}\right)$ จงหาค่าของ $\dfrac{x}{y}$

10. ให้ x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $10^x+10^{(-x)}=10$ จงหาค่าของ 100^x+100^{-x}

11. ให้ $f(x)=3\cdot 2^x+1$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงหาเรนจ์ของ f

12. ระดับความเป็นกรด-เบส (pH) ของสารละลายสามารถคำนวณได้จาก

$$\mathrm{pH}=-\log\left[\mathrm{H_3O^+}\right]$$

เมื่อ $\left[\mathrm{H_3O^+}\right]$ แทน ความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออน มีหน่วยเป็นโมลต่อลิตร ถ้าน้ำมะนาวมีสมบัติเป็นกรด มีค่า pH เท่ากับ 2.3 จงหาความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออนของน้ำมะนาว

13. การเพิ่มจำนวนของประชากรสามารถคาดการณ์ได้จาก

$$n(t)=n_0(1+r)^t$$

เมื่อ $n(t)$ แทนจำนวนประชากรเมื่อเวลาผ่านไป t ปี

n_0 แทนจำนวนประชากรเมื่อเวลาเริ่มต้น

และ r แทนอัตราการเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากรต่อปี

ถ้าใน พ.ศ. 2547 ประเทศไทยมีประชากร 65 ล้านคน และประชากรได้เพิ่มขึ้นเป็น 69 ล้านคน ใน พ.ศ. 2560

1) จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากรต่อปี

2) สมมติว่าจำนวนประชากรเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ ประเทศไทยจะมีประชากร 75 ล้านคน ใน พ.ศ. ใด

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. 1) จาก

$$4^x - 2^x - 1 = 2^{x-1}$$

$$\left(2^x\right)^2 - 2^x - 1 = \frac{2^x}{2}$$

$$\left(2^x\right)^2 - \frac{3}{2}\left(2^x\right) - 1 = 0$$

$$\left(2^x + \frac{1}{2}\right)\left(2^x - 2\right) = 0$$

เนื่องจาก $2^x > 0$ ดังนั้น $2^x + \frac{1}{2} > 0$

จะได้

$$2^x - 2 = 0$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย 1 ใน $4^x - 2^x - 1 = 2^{x-1}$

จะได้

$$4^1 - 2^1 - 1 = 2^{1-1}$$

$$4 - 2 - 1 = 2^0$$

$$1 = 1 \quad \text{เป็นจริง}$$

จะได้ว่า 1 สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{1\}$

2) จาก

$$\begin{aligned}
(4.5)^x + (1.5)^x &= (0.5)^{x-1} \\
2^x\left[(4.5)^x + (1.5)^x\right] &= 2^x \cdot \frac{(0.5)^x}{0.5} \\
9^x + 3^x &= 2 \\
(3^x)^2 + 3^x - 2 &= 0 \\
(3^x + 2)(3^x - 1) &= 0
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $3^x > 0$ ดังนั้น $3^x + 2 > 0$

จะได้

$$\begin{aligned}
3^x - 1 &= 0 \\
3^x &= 1 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย 0 ใน $(4.5)^x + (1.5)^x = (0.5)^{x-1}$

จะได้

$$\begin{aligned}
(4.5)^0 + (1.5)^0 &= (0.5)^{0-1} \\
1 + 1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \\
2 &= 2 \qquad \text{เป็นจริง}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า 0 สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{0\}$

3) จาก

$$\begin{aligned}
2^x + 2^{-x} &= 2 \\
2^x\left(2^x + 2^{-x}\right) &= 2^x \cdot 2 \\
2^{2x} + 1 &= 2 \cdot 2^x \\
(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 &= 0 \\
(2^x - 1)^2 &= 0 \\
2^x - 1 &= 0 \\
2^x &= 1
\end{aligned}$$

$$x = 0$$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย 0 ใน $2^x + 2^{-x} = 2$

จะได้
$$2^0 + 2^{-0} = 2$$
$$1+1 = 2$$
$$2 = 2 \quad \text{เป็นจริง}$$

จะได้ว่า 0 สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{0\}$

2. 1) จาก
$$\log_6 x + \log_6 (x-5) = 2$$
$$\log_6 x(x-5) = 2$$
$$x(x-5) = 6^2$$
$$x^2 - 5x - 36 = 0$$
$$(x+4)(x-9) = 0$$

จะได้ $x = -4$ หรือ $x = 9$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย -4 ใน $\log_6 x$

จะได้ $\log_6 x = \log_6(-4)$ ซึ่ง $-4 < 0$

จะได้ว่า $x = -4$ ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

แทน x ด้วย 9 ใน $\log_6 x + \log_6 (x-5)$

จะได้ $\log_6 x + \log_6 (x-5) = \log_6 9 + \log_6 (9-5) = 2$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่กำหนด

จะได้ว่า $x = 9$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{9\}$

2) จาก

$$\begin{aligned} \log_3\left(2+x^2\right) &= 3 \\ 2+x^2 &= 3^3 \\ x^2-25 &= 0 \\ (x-5)(x+5) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ $x=5$ หรือ $x=-5$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย 5 ใน $\log_3\left(2+x^2\right)=3$

จะได้

$$\begin{aligned} \log_3\left(2+5^2\right) &= 3 \\ \log_3 27 &= 3 \\ \log_3 3^3 &= 3 \\ 3\log_3 3 &= 3 \\ 3 &= 3 \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

จะได้ว่า 5 สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

แทน x ด้วย -5 ใน $\log_3\left(2+x^2\right)=3$

จะได้

$$\begin{aligned} \log_3\left[2+(-5)^2\right] &= 3 \\ \log_3 27 &= 3 \\ \log_3 3^3 &= 3 \\ 3\log_3 3 &= 3 \\ 3 &= 3 \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

จะได้ว่า -5 สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-5, 5\}$

3) จาก

$$\begin{aligned} \log_x(x+2) &= 2 \\ x+2 &= x^2 \\ x^2-x-2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ $x=-1$ หรือ $x=2$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย -1 ใน $\log_x(x+2)$

จะได้ $\log_{-1}1$ ซึ่ง $-1<0$

จะได้ว่า -1 ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

แทน x ใน $\log_x(x+2)=2$ ด้วย 2

จะได้

$$\begin{aligned} \log_2(2+2) &= 2 \\ \log_2 4 &= 2 \\ 2 &= 2 \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

จะได้ว่า 2 สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{2\}$

3. 1) จาก

$$\begin{aligned} 6^x+1 &< 3^x+2^x \\ 3^x2^x+1 &< 3^x+2^x \\ 3^x2^x-3^x-2^x+1 &< 0 \\ (3^x2^x-3^x)-(2^x-1) &< 0 \\ 3^x(2^x-1)-(2^x-1) &< 0 \\ (3^x-1)(2^x-1) &< 0 \end{aligned}$$

วิธีที่ 1 พิจารณากรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1

$3^x-1<0$ และ $2^x-1>0$

$3^x<1$ และ $2^x>1$

$x<0$ และ $x>0$

จะได้ว่า ไม่มี x ที่สอดคล้องกับอสมการที่กำหนด

กรณีที่ 2

$$3^x - 1 > 0 \quad \text{และ} \quad 2^x - 1 < 0$$

$$3^x > 1 \quad \text{และ} \quad 2^x < 1$$

$$x > 0 \quad \text{และ} \quad x < 0$$

จะได้ว่า ไม่มี x ที่สอดคล้องกับอสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\varnothing$

วิธีที่ 2 เมื่อ $x < 0$ จะได้ว่า $3^x - 1 < 0$ และ $2^x - 1 < 0$

นั่นคือ $(3^x - 1)(2^x - 1) > 0$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ว่า $3^x - 1 = 0$ และ $2^x - 1 = 0$

นั่นคือ $(3^x - 1)(2^x - 1) = 0$

เมื่อ $x > 0$ จะได้ว่า $3^x - 1 > 0$ และ $2^x - 1 > 0$

นั่นคือ $(3^x - 1)(2^x - 1) > 0$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\varnothing$

2) จาก

$$\begin{aligned} 2^{2x} + 1 &\leq 2^{x+1} \\ (2^x)^2 + 1 &\leq 2 \cdot 2^x \\ (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 &\leq 0 \\ (2^x - 1)^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(2^x - 1)^2 \geq 0$ เสมอ

จะได้ว่า คำตอบของอสมการที่กำหนด คือ คำตอบของสมการ $2^x - 1 = 0$

จะได้ $2^x = 1$

นั่นคือ $x = 0$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\{0\}$

3) จาก

$$\begin{aligned} 2^{2x} &\leq 3^x \\ 4^x &\leq 3^x \\ \frac{4^x}{3^x} &\leq 1 \\ \left(\frac{4}{3}\right)^x &\leq 1 \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการคือ $(-\infty, 0]$

4. 1) จาก

$$\begin{aligned} \ln(x+1)-\ln x &< 1 \\ \ln\frac{x+1}{x} &< 1 \\ \frac{x+1}{x} &< e^1 \\ \frac{x}{x}+\frac{1}{x} &< e \\ \frac{1}{x} &< e-1 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชันลด และ $x>0$ จะได้ว่า

$$x > \frac{1}{e-1}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\left(\frac{1}{e-1}, \infty\right)$

2) จาก

$$\begin{aligned} \log(x+1)-\log x &\geq 1 \\ \log\frac{x+1}{x} &\geq 1 \\ \frac{x+1}{x} &\geq 10^1 \\ \frac{x}{x}+\frac{1}{x} &\geq 10 \\ \frac{1}{x} &\geq 10-1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} \geq 9$$

เนื่องจาก $\frac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชันลด และ $x > 0$ จะได้ว่า

$$x \leq \frac{1}{9}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\left(0, \frac{1}{9}\right]$

5. 1)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+5\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} &= \sqrt{\frac{1+5\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{1+4\sqrt{2}-10}{1-2}} \\
&= \sqrt{\frac{-9+4\sqrt{2}}{-1}} \\
&= \sqrt{9-4\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{9-2\sqrt{8}} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{8}-1\right)^2} \\
&= \left|\sqrt{8}-1\right| \\
&= \sqrt{8}-1
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1} &= \sqrt{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}+1} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+2\sqrt[3]{2}+1} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^2} \\
&= \left|\sqrt[3]{2}+1\right| \\
&= \sqrt[3]{2}+1
\end{aligned}$$

6. 1)
$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3 &= \left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(2+3\sqrt[3]{2^2}+3\sqrt[3]{2}+1\right)\\ &= 3\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(1+\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}\right)\\ &= 3\left(\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{2^2}-1-\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}\right)\\ &= 3\times 1\\ &= 3\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{4}} &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{2^2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}\\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}{-\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)}\\ &= -1\end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned}\sqrt[5]{ab^4}\cdot\sqrt[10]{a^3b^2} &= \left(ab^4\right)^{\frac{1}{5}}\left(a^3b^2\right)^{\frac{1}{10}}\\ &= \left(a^2b^8\right)^{\frac{1}{10}}\left(a^3b^2\right)^{\frac{1}{10}}\\ &= \left(a^2b^8\cdot a^3b^2\right)^{\frac{1}{10}}\\ &= \left(a^5b^{10}\right)^{\frac{1}{10}}\\ &= a^{\frac{1}{2}}b\end{aligned}$$

เนื่องจาก a ด้วย 9 และ b ด้วย -7 ลงใน $a^{\frac{1}{2}}b$ จะได้

$$\begin{aligned}\left(9^{\frac{1}{2}}\right)(-7) &= 3(-7)\\ &= -21\end{aligned}$$

8. จาก
$$\begin{aligned}\frac{a-\sqrt{2}a^{-2}}{a^4} &= \frac{a-\sqrt{2}a^{-2}}{a^4}\cdot\frac{a^2}{a^2}\\ &= \frac{a^3-\sqrt{2}}{a^6}\end{aligned}$$

แทน $a=\left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ ใน $\dfrac{a^3-\sqrt{2}}{a^6}$

จะได้ $$\frac{a-\sqrt{2}a^{-2}}{a^4} = \frac{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3-\sqrt{2}}{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^6}$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+2\sqrt{2}+2}$$

$$= \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{3+2\sqrt{2}}\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}$$

$$= 3+\sqrt{2}(-2)$$

9. จาก $$\left(128^x\right)\left(243^y\right) = \left(12^x\right)\left(8^x\right)\left(24^y\right)\left(3^{x+y}\right)$$

$$\left(2^7\right)^x\left(3^5\right)^y = \left(2^2\cdot 3\right)^x\left(2^3\right)^x\left(2^3\cdot 3\right)^y\left(3^x\right)\left(3^y\right)$$

$$2^{7x}\cdot 3^{5y} = 2^{2x+3x+3y}\cdot 3^{x+y+x+y}$$

$$2^{7x}\cdot 3^{5y} = 2^{5x+3y}\cdot 3^{2x+2y}$$

$$2^{2x-3y} = 3^{2x-3y}$$

$$\frac{2^{2x-3y}}{3^{2x-3y}} = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3y} = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

จะได้ $$2x-3y = 0$$

$$2x = 3y$$

ดังนั้น $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

10. จาก $10^x + 10^{-x} = 10$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$\begin{aligned}
\left(10^x + 10^{-x}\right)^2 &= 10^2 \\
100^x + 2\left(10^x\right)\left(10^{-x}\right) + 100^{-x} &= 100 \\
100^x + 2 + 100^{-x} &= 100 \\
100^x + 100^{-x} &= 100 - 2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $100^x + 100^{-x} = 98$

11. เนื่องจาก $3 \cdot 2^x > 0$ เสมอ

จะได้ $3 \cdot 2^x + 1 > 1$

ดังนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $f(x) = 3 \cdot 2^x + 1$ คือ $(1, \infty)$

12. จาก $\text{pH} = -\log\left[H_3O^+\right]$

จะได้ $2.3 = -\log\left[H_3O^+\right]$

$$\begin{aligned}
\log\left[H_3O^+\right] &= -2.3 \\
\left[H_3O^+\right] &= 10^{-2.3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น น้ำมะนาวมีความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออนประมาณ $10^{-2.3}$ โมลต่อลิตร

13. 1) จาก $n(t) = n_0(1+r)^t$

ในที่นี้ $t = 13$, $n_0 = 65 \times 10^6$ และ $n(13) = 69 \times 10^6$

จะได้

$$\begin{aligned}
69 &= 65(1+r)^{13} \\
(1+r)^{13} &= \frac{69}{65} \\
13\log(1+r) &= \log(69) - \log(65) \\
\log(1+r) &= \frac{\log(69) - \log(65)}{13}
\end{aligned}$$

$$1+r = 10^{\frac{\log(69)-\log(65)}{13}}$$

$$r = 10^{\frac{\log(69)-\log(65)}{13}} - 1$$

$$r \approx 0.0046$$

ดังนั้น อัตราการเพิ่มขึ้นของจำนวนประชากรประมาณ 0.46% ต่อปี

2) จาก $n(t) = n_0(1+r)^t$

ในที่นี้ $n_0 = 69\times10^6$, $n(t) = 75\times10^6$ และ $r = 0.0046$

จะได้

$$75 = 69(1+0.0046)^t$$

$$\frac{75}{69} = (1.0046)^t$$

$$\log 75 - \log 69 = t\log(1.0046)$$

$$t = \frac{\log 75 - \log 69}{\log(1.0046)}$$

$$t \approx 18.17$$

ดังนั้น ประเทศไทยจะมีจำนวนประชากร 75 ล้านคน นับจาก พ.ศ. 2560 ไปอีกประมาณ 18 ปี หรือประมาณ พ.ศ. 2578

2.7 เฉลยแบบฝึกหัด

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 แบ่งการเฉลยแบบฝึกหัดเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่ 1 เฉลยคำตอบ และส่วนที่ 2 เฉลยคำตอบพร้อมวิธีทำอย่างละเอียด ซึ่งเฉลยแบบฝึกหัดที่อยู่ในส่วนนี้เป็นการเฉลยคำตอบของแบบฝึกหัด โดยไม่ได้นำเสนอวิธีทำ อย่างไรก็ตาม ครูสามารถศึกษาวิธีทำโดยละเอียดของแบบฝึกหัดได้ในส่วนท้ายของคู่มือครูเล่มนี้

แบบฝึกหัด 2.1ก

1. 1) $\frac{1}{8}$ 2) $16x^{10}$
   3) $\frac{4}{b^2}$ 4) $\frac{1}{a^7}$
   5) $\frac{2}{ab^5}$ 6) $\frac{16x^{12}}{y^8}$
   7) $\frac{9a^4}{b^6}$ 8) $\frac{1}{x^3y^{10}}$
2. 1) เป็นจริง
   2) เป็นเท็จ เช่น $x=2,\ m=3$ และ $n=2$
   3) เป็นเท็จ เช่น $x=2,\ m=3$ และ $n=2$
   4) เป็นเท็จ เช่น $x=2,\ m=3$ และ $n=2$
   5) เป็นจริง
   6) เป็นเท็จ เช่น $x=\frac{1}{2}$ และ $m=2$
3. 1) 4 2) 4
   3) -1 4) $\frac{1}{2}$
   5) $2\sqrt{2}\cdot|x|$ 6) $2x^2$
4. 1) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{15}}{10}$
   3) $\frac{\sqrt{35}}{5}$ 4) $\sqrt{2}$
   5) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ 6) $\frac{\sqrt[3]{18}}{2}$

5. 1) $11\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ 2) $15\sqrt{2}+30$
3) $7+4\sqrt{3}$ 4) $12-5\sqrt{5}$
5) 5 6) 2

แบบฝึกหัด 2.1ข

1. 1) 9 2) $\frac{1}{2}$
3) 0.125 4) $\frac{1}{25}$
5) $-\frac{1}{5}$ 6) 9
7) $\frac{27}{64}$ 8) $\frac{1}{4}$
2. 1) $\frac{9x^2}{y^4}$ 2) $\frac{1}{2x^2y^3}$
3) $x^{\frac{13}{2}}$ 4) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$
3. 1) $6\sqrt[3]{4}$ 2) $4\sqrt[3]{3}$
3) $5\sqrt{2}$ 4) $x\sqrt{x}\left(x^3-4x+2\right)$
4. 1) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$ 2) $\frac{4\left(9\sqrt{5}+5\sqrt{7}\right)}{23}$
3) $\frac{153+5\sqrt{30}}{91}$ 4) $8-\sqrt{42}$ $p\leftrightarrow q$
5. 1) 4 2) $6\left(5\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$
3) 1
6. 1) $2\left(p+\sqrt{p^2-q^2}\right)$ 2) $2\left(p+\sqrt{p^2-q^2}\right)$
3) $6x+11+4\sqrt{2x^2+5x-3}$

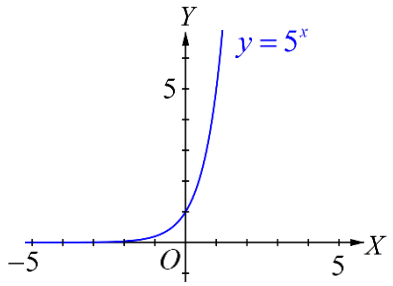
7. 1) 0.30323 2) 4.23607
   3) 0.6077

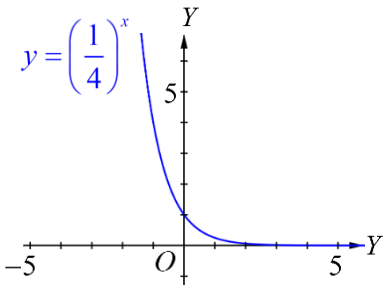
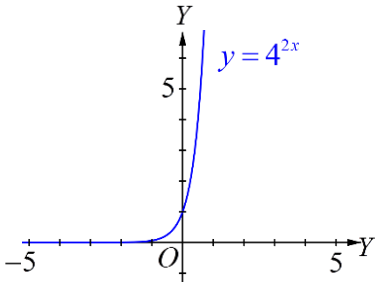
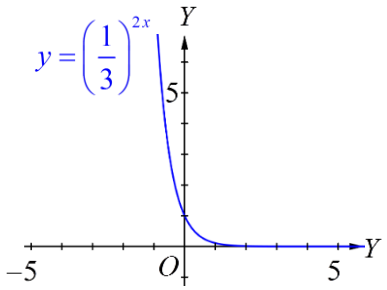
8. 1) $\{64\}$ 2) $\{3\}$
   3) $\varnothing$ 4) $\{9\}$
   5) $\varnothing$ 6) $\varnothing$
   7) $\varnothing$ 8) $\varnothing$
   9) $\varnothing$ 10) $\{7\}$
   11) $\{6\}$ 12) $\{2\}$

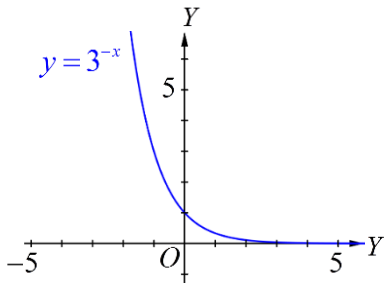
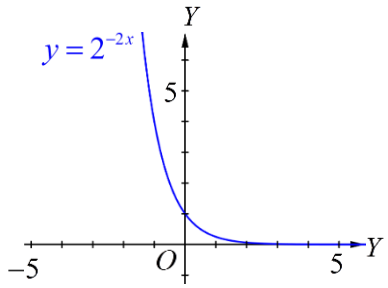
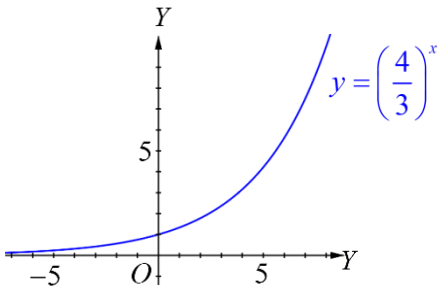
9. 1) ระยะทางเฉลี่ยจากดาวเนปจูนไปยังดวงอาทิตย์ประมาณ 30.0831 AU
   2) ดาวศุกร์จะมีเวลาโคจรรอบดวงอาทิตย์ประมาณ 0.6109 ปี

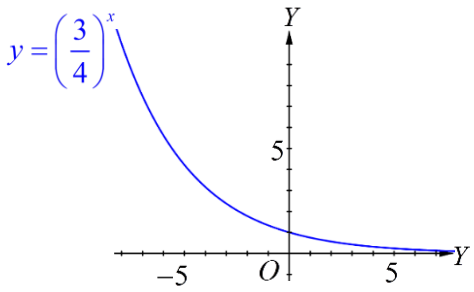
แบบฝึกหัด 2.2

1. แสดงการเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดและเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังตารางต่อไปนี้

ฟังก์ชันที่กำหนดให้	ฟังก์ชันเพิ่ม	ฟังก์ชันลด	กราฟของฟังก์ชัน
1) $y = 5^x$	✓	–	

ฟังก์ชันที่กำหนดให้	ฟังก์ชันเพิ่ม	ฟังก์ชันลด	กราฟของฟังก์ชัน
2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$	–	✓	
3) $y=4^{2x}$	✓	–	
4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$	–	✓	

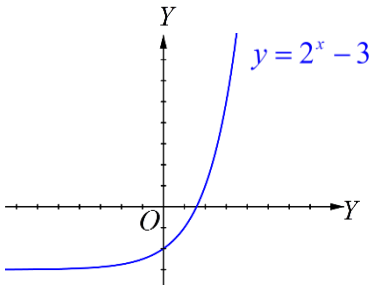
ฟังก์ชันที่กำหนดให้	ฟังก์ชันเพิ่ม	ฟังก์ชันลด	กราฟของฟังก์ชัน
5) $y = 3^{-x}$	–	✓	
6) $y = 2^{-2x}$	–	✓	
7) $y = \left(\frac{4}{3}\right)^{x}$	✓	–	

ฟังก์ชันที่กำหนดให้	ฟังก์ชันเพิ่ม	ฟังก์ชันลด	กราฟของฟังก์ชัน
8) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$	–	✓	

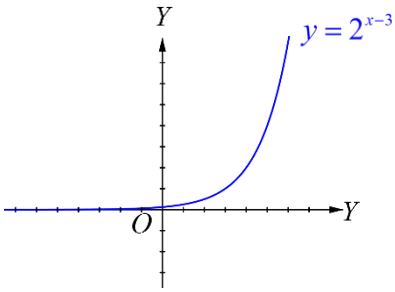
2. 1) $y=3^x$ 2) $y=5^x$

3) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 4) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

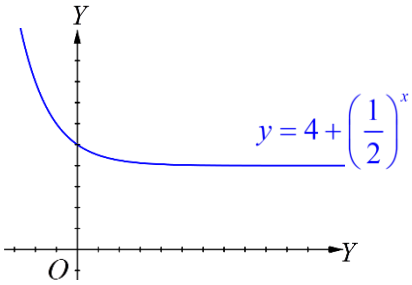
3. 1)



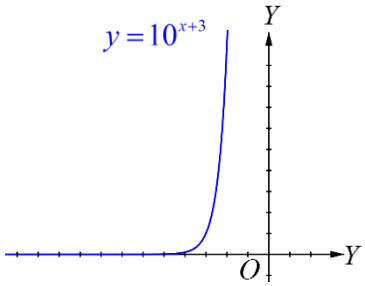
2)



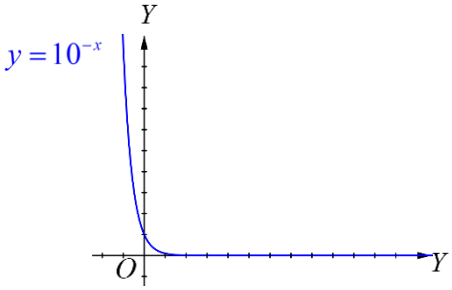
3)



4)



5)



4. 1) ค 2) ก

3) จ 4) ข

5) ง

5. 1) $\frac{1}{4}$ 2) 27

3) 2 4) $\frac{1295}{16}$

5) $\frac{3}{2}$ 6) $\frac{1}{72}$

7) $\frac{1}{8}$ 8) $\sqrt{3}$

6. 1) $\{2\}$ 2) $\{-3\}$
3) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ 4) $\{-4\}$
5) $\{3\}$ 6) $\{-3\}$
7) $(-\infty, 3]$ 8) $(-\infty, -4]$
9) $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ 10) $(-3, 0]$

7. 1) $\{-1, 1\}$ 2) $\{-2, 1\}$
3) $\{-1, 2\}$

8. จำนวนเริ่มต้นของแบคทีเรีย เท่ากับ 2,000 เซลล์
จำนวนของแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที ประมาณ 2,401 เซลล์
จำนวนของแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป 30 นาที ประมาณ 3,464 เซลล์
จำนวนของแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง เท่ากับ 6,000 เซลล์

9. $k = -\frac{1}{1600}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. 1) 2 2) $\frac{2}{3}$
3) 2 4) -4
5) -4 6) -3
7) -2 8) $-\frac{3}{2}$

2. 1) $10^2 = 100$ 2) $2^5 = 32$
3) $5^0 = 1$ 4) $4^{-3} = \frac{1}{64}$
5) $10^{-3} = 0.001$ 6) $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$

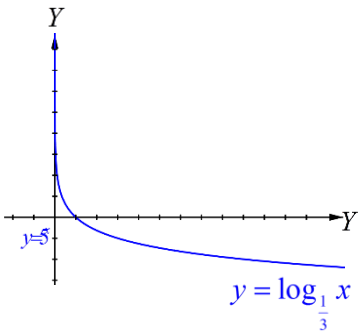
3. 1) $\frac{1}{3}$ 2) -2

3) 2 4) -1

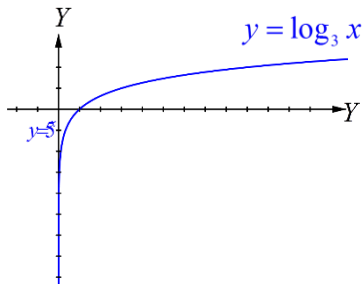
5) 24 6) -2

7) 2 8) 4

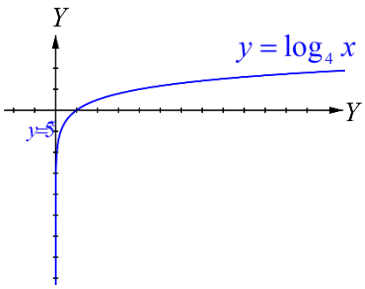
4. 1)



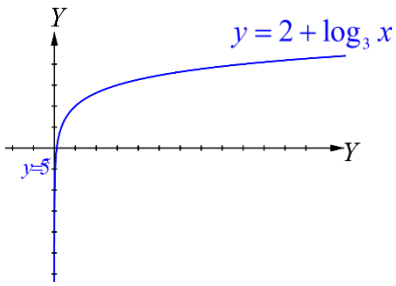
2)



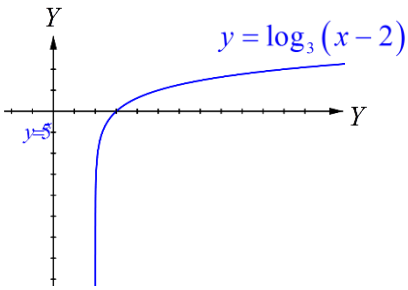
3)



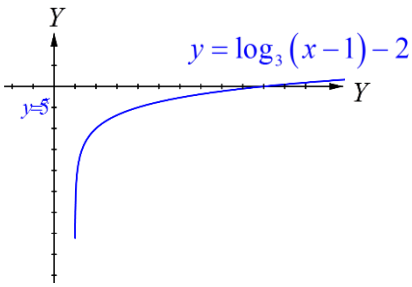
4)



5)



6)



5. 1) 32 2) 100
   3) 10 4) 2
   5) 36

6. $\log_5 45 \approx 2.3652$ และ $\log_{25} 15 \approx 0.8413$

แบบฝึกหัด 2.4

1. 1) $\log 37100 \approx 4.5694$ 2) $\log 0.00371 \approx -2.4306$
   3) $\log 832 \approx 2.9201$ 4) $\log 0.0832 \approx -1.0799$
2. 1) 2.56 2) 2560
   3) 0.256

แบบฝึกหัด 2.5

1. $\log_{36} 5 \approx 0.4491$
2. $\log_{64} 46 \approx 0.9206$
3. $\ln 423 \approx 6.0472$ และ $\ln 0.163 \approx -1.8140$
4. 1) 2.5237 2) 3.4829
   3) 0.4930 4) 6.5903
   5) 4.7362 6) 4.5951
   7) 4.6728 8) –4.3901

แบบฝึกหัด 2.6

1. 1) e^{10} 2) 0.01
   3) 500 4) $\frac{95}{3}$
   5) $100,000$
2. 1) $\varnothing$ 2) $\left\{-\frac{998}{999}\right\}$
   3) $\{10\}$ 4) $\{5\}$
   5) $\left\{\frac{13}{12}\right\}$ 6) $\{6\}$
   7) $\{3^{16}\}$ 8) $\left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$
3. 1) $2+\log_3 4$ 2) จำนวนจริงทุกจำนวน
   3) $\frac{1}{\log_4 5-1}$ 4) $\frac{\log 2+2\log 3}{\log 3-3\log 2}$
4. 1) $x=0$ หรือ $x=\frac{4}{3}$ 2) $x=0$ หรือ $x=\ln 2$
   3) $x=\frac{\ln 3}{2}$
5. 1) 0.8154 2) 1.0124
   3) 13.5917
6. 1) $[3\log_5 3, \infty)$ 2) $\left(\frac{\ln 11}{2}, \infty\right)$
   3) $(10^{-3.5}, \infty)$ 4) $\left(-\frac{1}{7}, \frac{10^{4.5}-1}{7}\right]$
   5) $(-1, \infty)$

แบบฝึกหัด 2.7

1. 1) ใน พ.ศ. 2569 จะมีจำนวนประชากรประมาณ 165,787 คน
   2) จังหวัดนี้จะมีจำนวนประชากร 200,000 คน ใน พ.ศ. 2574
2. 1) จำนวนเงินฝากในบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 10 ประมาณ 53,879 บาท
   2) จะต้องฝากเงินต้นไว้ประมาณ 139,201 บาท
   3) ต้องใช้เวลาอย่างน้อย 93 ปี จึงจะมีเงินในบัญชี 200,000 บาท
3. เงิน 20,000 บาท ที่มีในปัจจุบัน จะมีมูลค่าประมาณ 16,375 บาท ในอีก 5 ปีข้างหน้า
4. 1) เมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง จะมีจำนวนแบคทีเรียประมาณ 1,928 เซลล์
   2) จะใช้เวลานานประมาณ 7 ชั่วโมง จึงจะมีจำนวนแบคทีเรีย 10,000 เซลล์
5. 1) เมื่อเวลาผ่านไป 80 ปี จะมีปริมาณของธาตุ–137 เหลืออยู่ประมาณ 1.5749 กรัม
   2) จะใช้เวลาอย่างน้อย $\frac{25426.2441}{365} \approx 69.6610$ หรือ 70 ปี จึงจะมีธาตุซีเซียม–137 เหลืออยู่ 2 กรัม
6. ครึ่งชีวิตของสารนี้ประมาณ 6.2134 วัน
7. ความเข้มเสียงของรถไฟฟ้าขบวนนี้เท่ากับ $10^{-2.2}$ วัตต์ต่อตารางเมตร
8. นมชนิดนี้มีความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออนอยู่ $10^{-6.5}$ โมลต่อลิตร

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. 1) $6x^7y^5$
   2) $\frac{z^3}{x^7y^6}$
   3) $\frac{1}{3^4xy}$
   4) $-\frac{2}{x^2y}$
   5) $-\frac{1}{4}$
   6) $-\frac{1}{x^2}$

7) $7+2\cdot 10^{\frac{1}{2}}$ 8) 3

9) $33\cdot 2^{\frac{1}{2}}$ 10) $7\cdot 3^{\frac{1}{2}}$

11) 0.09 12) 4

13) $\frac{5}{3}x^3y$ 14) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}-1}$

2. 1) 5 2) $5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

3) $-\dfrac{5\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}$ 4) $3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+4$

3. 4

4. 1) $a=-12)$ $b = 2$

3) $D_{f^{-1}} = R_f = (-1, \infty)$

5. 1) โดเมนของ f คือ $(-\infty, 2]$ 2) $D_{f^{-1}} = R_f = [0, 4)$

3) $b = \frac{15}{4}$

6. (ก) q (ข) p

(ค) h (ง) f

(จ) r (ฉ) s

7. 1) $f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{x-1}{2}\right)$ 2) $f^{-1}(x) = 1-\log_2 x$

3) $f^{-1}(x) = \frac{5^x-1}{2}$ 4) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}e^{x+5}$

8. 1) $\{-1\}$ $\{-1\}$ 2) $\{\log_{22} 242\}$

3) $\{3\}$ 4) $\left\{\frac{26}{25}\right\}$

5) $\varnothing$ 6) $\{2\}$

7) $(-3, 2]$ 8) $(1, 2)$

9) $\left(\frac{1}{3^{16}}, \infty\right)$ 10) $(-\infty, -1)$

9. $2^{\log_2(5+x)} = 3$

10. ในอีก 10 ปีข้างหน้า จะมีจำนวนประชากรในเมืองนี้ประมาณ 13,000 คน

11. จะใช้เวลาฝากเงินอย่างน้อย 38 ปี

12. 1) เมื่อเวลาเริ่มต้น มีแบคทีเรียชนิด A จำนวน 500 เซลล์ และมีแบคทีเรีย B จำนวน 400 เซลล์

    2) เป็นไปได้ที่จะมีจำนวนแบคทีเรียชนิด B มากกว่าจำนวนแบคทีเรียชนิด A เมื่อเวลาผ่านไปประมาณ 4.4629 ชั่วโมง

13. ต้องใช้เวลานานประมาณ 5.4190 วัน เมื่อคำนวนจากเวลาเริ่มต้น

14. 1) ชาวอียิปต์โบราณตายไปแล้วประมาณ 4,223 ปี

    2) ภูเขาไฟระเบิดไปแล้วอย่างน้อยประมาณ 6,601 ปี

15. จะต้องใช้เวลาอย่างน้อย 10.32 ชั่วโมง

16. 1) แผ่นดินไหวที่เมืองซานฟรานซิสโก รัฐแคลิฟอร์เนีย ใน ค.ศ. 1906 มีขนาดแผ่นดินไหวประมาณ 7.8 ตามมาตราขนาดโมเมนต์แผ่นดินไหว

    2) โมเมนต์แผ่นดินไหวของการเกิดแผ่นดินไหวที่ฝั่งตะวันตกของเกาะสุมาตราของประเทศอินโดนีเซีย ใน ค.ศ. 2004 คือ $10^{29.7}$

17. ผู้ตายเสียชีวิตมาแล้วอย่างน้อยประมาณ 12 ชั่วโมง

บทที่ 3

เรขาคณิตวิเคราะห์

เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นเรื่องสำคัญเรื่องหนึ่งในคณิตศาสตร์ เพราะเรขาคณิตวิเคราะห์เป็นวิชาที่เชื่อมโยงความรู้พีชคณิตและเรขาคณิตเข้าด้วยกัน โดยเรขาคณิตวิเคราะห์คือวิชาที่ใช้พีชคณิตมาช่วยศึกษาเรขาคณิต เนื้อหาเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ที่นำเสนอในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 มีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนนำความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ไปใช้ในการแก้ปัญหา โดยแบ่งเป็นสองหัวข้อใหญ่ คือ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวย ในบทเรียนนี้มุ่งให้นักเรียนบรรลุผลการเรียนรู้ตามสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม และบรรลุจุดมุ่งหมายดังต่อไปนี้

ผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

ผลการเรียนรู้

- เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

- จุดและเส้นตรง
- วงกลม
- พาราโบลา
- ไฮเพอร์โบลา

จุดมุ่งหมาย

1. หาระยะทางระหว่างจุดสองจุด และหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง
2. หาความชันของเส้นตรง และใช้ความชันในการอธิบายเกี่ยวกับเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก
3. เขียนกราฟและหาสมการเส้นตรง
4. หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและเส้นคู่ขนาน
5. เขียนกราฟและหาสมการวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา
6. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิต ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สมการเชิงเส้นสองตัวแปร พาราโบลา และการแยกตัวประกอบของพหุนามในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

goo.gl/QwPfJz

3.1 เนื้อหาสาระ

1. ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. กำหนดจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ถ้าจุด $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง P_1P_2 แล้ว

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{และ} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

3. ให้ ℓ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$

   ความชันของเส้นตรง ℓ คือ $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

4. เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน

5. ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีความชันเท่ากันและมีจุดร่วมกัน แล้วเส้นตรงทั้งสองจะเป็นเส้นตรงเดียวกัน

6. เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1

7. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = b\}$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว

8. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = a\}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

9. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$

10. สมการ $y = mx + c$ เป็นสมการที่มีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และตัดแกน Y ที่จุด $(0, c)$

11. กราฟของสมการ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะเป็นเส้นตรง และเรียกสมการในรูปนี้ว่า “รูปทั่วไปของสมการเส้นตรง”

12. ถ้าเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด $(a, 0)$ จะเรียก a ว่า ระยะตัดแกน X

    และถ้าเส้นตรงตัดแกน Y ที่จุด $(0, b)$ จะเรียก b ว่า ระยะตัดแกน Y

13. ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ กับจุด (x_1, y_1) เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัว ที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน คือ $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

14. ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax+By+C_1=0$ กับเส้นตรง $Ax+By+C_2=0$ เมื่อ $A, B,$ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงตัวที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน คือ

$$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

15. ภาคตัดกรวย คือ รูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย
16. วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า “จุดศูนย์กลางของวงกลม” และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย เรียกว่า “รัศมีของวงกลม”
17. วงรี คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนั้นไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า “โฟกัสของวงรี”
18. สำหรับวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ หรือ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ เมื่อ $a>b>0$

    ความเยื้องศูนย์กลางของวงรี แทนด้วย e คือ อัตราส่วนของ c ต่อ a

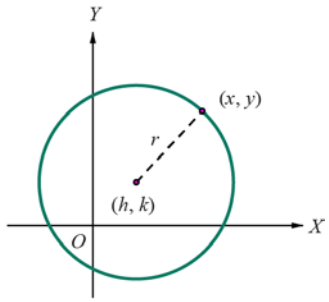
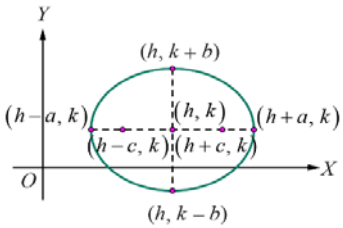
    เมื่อ $c=\sqrt{a^2-b^2}$ นั่นคือ $e=\frac{c}{a}$ โดยที่ $0<e<1$

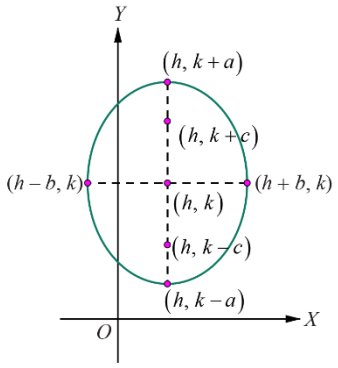
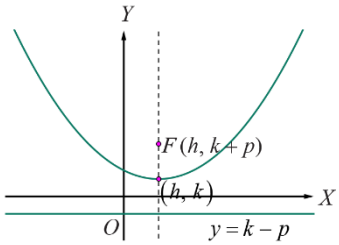
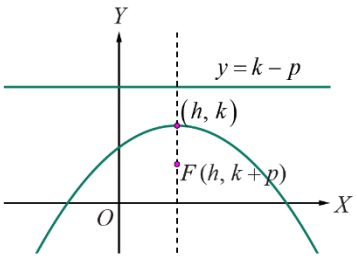
    ถ้า e มีค่าใกล้ 1 หรือ c มีค่าเกือบจะเท่ากับ a แล้ววงรีมีความรีมาก (มีรูปร่างเรียวยาว)

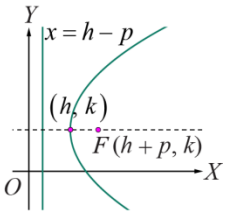
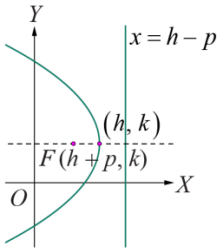
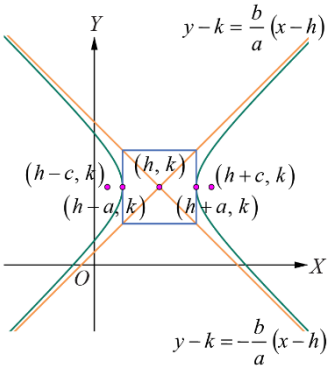
    แต่ถ้า e มีค่าใกล้ 0 แล้ววงรีมีความรีน้อย (รูปร่างใกล้เคียงกับวงกลม)
19. พาราโบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า “โฟกัสของพาราโบลา” และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า “เส้นบังคับ” หรือ “ไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา”
20. เลตัสเรกตัม คือ คอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านโฟกัสของพาราโบลา (ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่ที่พาราโบลา เรียกว่า “คอร์ดของพาราโบลา”)

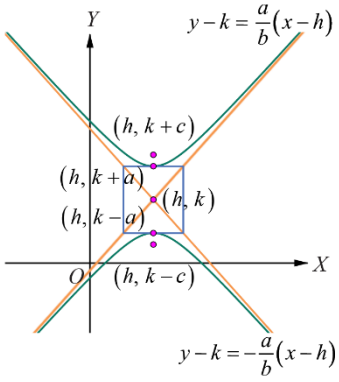
21. ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า “โฟกัสของไฮเพอร์โบลา”

22. สรุปเกี่ยวกับกราฟและสมการของภาคตัดกรวยแต่ละชนิดได้ดังนี้

ภาคตัดกรวย	สมการรูปแบบมาตรฐาน และรายละเอียดที่ควรทราบ
วงกลม	
	สมการ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ จุดศูนย์กลาง (h, k) รัศมียาว r หน่วย
วงรี	
	สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, $a>b>0$ แกนเอกอยู่ในแนวนอน จุดศูนย์กลาง (h, k) จุดยอด $(h-a, k), (h+a, k)$ โฟกัส $(h-c, k), (h+c, k); c^2=a^2-b^2$ แกนเอกยาว $2a$ หน่วย แกนโทยาว $2b$ หน่วย

ภาคตัดกรวย	สมการรูปแบบมาตรฐาน และรายละเอียดที่ควรทราบ
	สมการ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, $a>b>0$ แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง จุดศูนย์กลาง (h, k) จุดยอด $(h, k-a), (h, k+a)$ โฟกัส $(h, k-c), (h, k+c)$; $c^2=a^2-b^2$ แกนเอกยาว $2a$ หน่วย แกนโทยาว $2b$ หน่วย
พาราโบลา	
 $p>0$  $p<0$	สมการ $(x-h)^2=4p(y-k)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง จุดยอด (h, k) โฟกัส $(h, k+p)$ ไดเรกตริกซ์ $y=k-p$ $p>0$ เส้นโค้งหงายขึ้น $p<0$ เส้นโค้งคว่ำลง

ภาคตัดกรวย	สมการรูปแบบมาตรฐาน และรายละเอียดที่ควรทราบ
 $p>0$  $p<0$	สมการ $(y-k)^2=4p(x-h)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน จุดยอด (h,k) โฟกัส $(h+p,k)$ ไดเรกตริกซ์ $x=h-p$ $p>0$ เส้นโค้งเปิดไปทางขวา $p<0$ เส้นโค้งเปิดไปทางซ้าย
ไฮเพอร์โบลา	
	สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,\ (a>0,b>0)$ แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน จุดศูนย์กลาง (h,k) จุดยอด $(h-a,k),\ (h+a,k)$ โฟกัส $(h-c,k),(h+c,k);\ c^2=a^2+b^2$ แกนตามขวางยาว $2a$ หน่วย แกนสังยุคยาว $2b$ หน่วย สมการเส้นกำกับ คือ $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

ภาคตัดกรวย	สมการรูปแบบมาตรฐาน และรายละเอียดที่ควรทราบ
	สมการ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1, (a>0, b>0)$ แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง จุดศูนย์กลาง (h, k) จุดยอด $(h, k-a), (h, k+a)$ โฟกัส $(h, k-c), (h, k+c); c^2=a^2+b^2$ แกนตามขวางยาว $2a$ หน่วย แกนสังยุคยาว $2b$ หน่วย สมการเส้นกำกับ คือ $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

3.2 ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการสอน

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

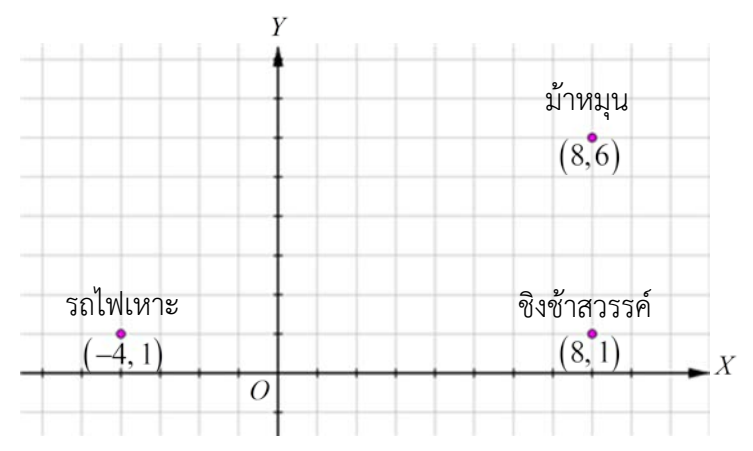
ในบทนี้ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนใช้กราฟเพื่อช่วยในการแก้ปัญหา

ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

ครูอาจนำเข้าสู่บทเรียนโดยให้นักเรียนทำกิจกรรมเที่ยวสวนสนุก ดังนี้

กิจกรรม : เที่ยวสวนสนุก

เดือนและดาวไปเที่ยวสวนสนุกแห่งหนึ่ง และได้รับแจกแผนผังแสดงตำแหน่งเครื่องเล่นต่าง ๆ เนื่องจากเดือนและดาววางแผนไปเล่นม้าหมุน ชิงช้าสวรรค์ และรถไฟเหาะ ในสวนสนุก จึงเขียนแผนผังแสดงที่ตั้งเครื่องเล่นทั้งสามชนิดในแกนพิกัดฉากเดียวกัน ดังนี้



ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคละความสามารถ และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มอ่านสถานการณ์ที่กำหนด
2. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันหาว่า
   2.1 ม้าหมุนอยู่ห่างจากชิงช้าสวรรค์กี่หน่วย
   2.2 ชิงช้าสวรรค์อยู่ห่างจากรถไฟเหาะกี่หน่วย
3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้ระยะห่างระหว่างม้าหมุนกับชิงช้าสวรรค์ ระยะห่างระหว่างชิงช้าสวรรค์กับรถไฟเหาะ และทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ในการหาระยะห่างระหว่างม้าหมุนกับรถไฟเหาะ

4. จากข้อ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับระยะห่างระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ซึ่งเป็นจุดในระนาบว่าคือ $P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

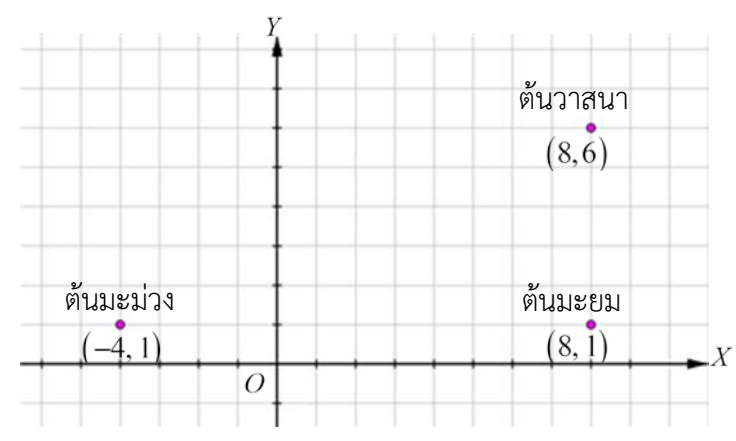
- ในการสอนเกี่ยวกับระยะทางระหว่างจุดสองจุด ครูควรเริ่มจากการหาระยะของจุดสองจุดที่นักเรียนสามารถใช้ความรู้ที่เคยเรียนมาแล้วในการหาได้ เช่น การหาระยะระหว่างจุดสองจุดที่อยู่ในแนวเส้นตรงที่ขนานกับแกน X หรือจุดสองจุดที่อยู่ในแนวเส้นตรงขนานแกน Y (ในลักษณะเดียวกับตัวอย่างที่ 1) แล้วจึงเชื่อมโยงไปสู่การหาระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ (ในลักษณะเดียวกับตัวอย่างที่ 2 และ 3)

จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง

ครูอาจนำเข้าสู่บทเรียนโดยให้นักเรียนทำกิจกรรมตามหาสมบัติ ดังนี้

กิจกรรม : ตามหาสมบัติ

ฟ้าและฝนพบลายแทงที่ซ่อนสมบัติ 3 ชิ้น ของคุณยายซึ่งอยู่ในบริเวณบ้าน โดยลายแทงระบุว่าสมบัติชิ้นที่ 1 ซ่อนไว้ที่จุดกึ่งกลางระหว่างต้นวาสนากับต้นมะยม สมบัติชิ้นที่ 2 ซ่อนไว้ที่จุดกึ่งกลางระหว่างต้นมะยมกับต้นมะม่วง และสมบัติชิ้นที่ 3 ซ่อนไว้ที่จุดกึ่งกลางระหว่างต้นมะม่วงกับต้นวาสนา ฟ้าและฝนจึงเขียนแผนผังแสดงตำแหน่งที่ซ่อนสมบัติดังกล่าวในแกนพิกัดฉากเดียวกัน ดังนี้



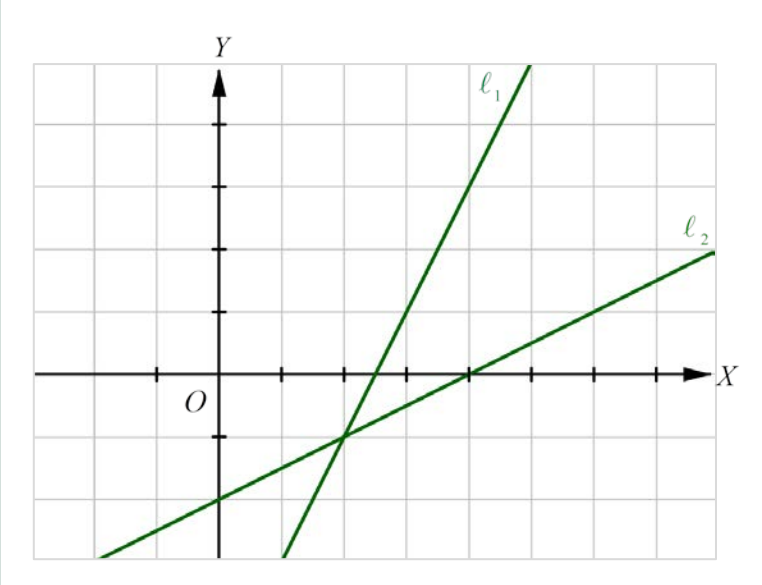
ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนกลุ่มละ 3 – 4 คน แบบคละความสามารถ และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มอ่านสถานการณ์ที่กำหนด
2. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันหาว่า
   2.1 เมื่อกำหนดให้ตำแหน่งของต้นวาสนาและต้นมะยมในแกนพิกัดฉากเป็นดังภาพที่กำหนดให้ สมบัติชิ้นที่ 1 จะซ่อนอยู่ที่ตำแหน่งใดในแกนพิกัดฉาก
   2.2 เมื่อกำหนดให้ตำแหน่งของต้นมะยมและต้นมะม่วงในแกนพิกัดฉากเป็นดังภาพที่กำหนดให้ สมบัติชิ้นที่ 2 จะซ่อนอยู่ที่ตำแหน่งใดในแกนพิกัดฉาก
3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้ตำแหน่งของสมบัติชิ้นที่ 1 หรือตำแหน่งของสมบัติชิ้นที่ 2 ในแกนพิกัดฉาก และความรู้เรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้าย หาว่าสมบัติชิ้นที่ 3 จะซ่อนอยู่ที่ตำแหน่งใดในแกนพิกัดฉาก
4. จากข้อ 3 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับจุด $P(x, y)$ ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ ว่าคือ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ และ $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

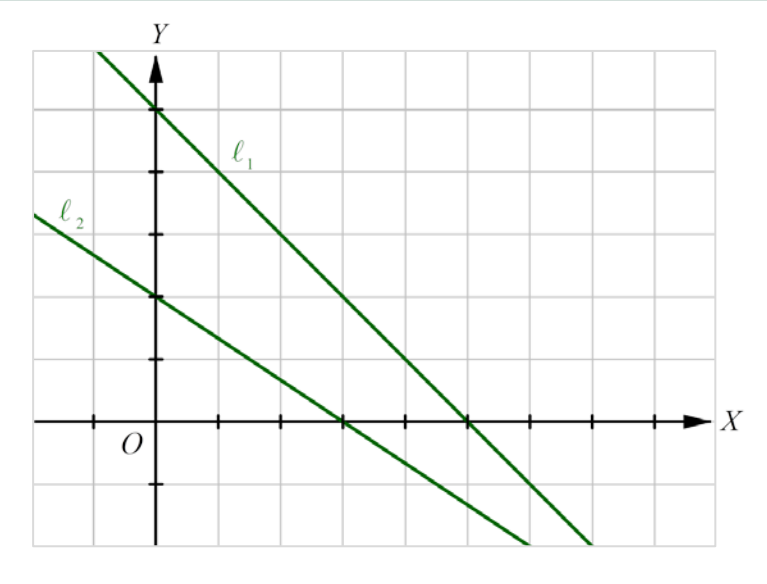
ความชันของเส้นตรง

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ความชันของเส้นตรงที่ขนานแกน Y ให้ใช้ว่า “ไม่นิยาม”
- **ความชัน**ในบทเรียนนี้มีความแตกต่างกับ**ความลาดชัน** โดยในกรณีที่เส้นตรงมีความชันเป็นจำนวนบวก ยิ่งเส้นตรงนั้นมีความชันมากก็จะมีความลาดชันมากด้วย แต่ในกรณีที่เส้นตรงมีความชันเป็นจำนวนลบ ยิ่งเส้นตรงนั้นมีความชันมากก็จะมีความลาดชันน้อย แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 1 ℓ_1 มีความลาดชันมากกว่า ℓ_2 และความชันของ ℓ_1 มากกว่าความชันของ ℓ_2



รูปที่ 2 ℓ_1 มีความลาดชันมากกว่า ℓ_2 และความชันของ ℓ_1 น้อยกว่าความชันของ ℓ_2

หรืออาจกล่าวได้ว่าการเปรียบเทียบความชันกรณีที่เส้นตรงทำมุมป้านกับแกน X (ความชันน้อยกว่า 0) ต้องพิจารณาค่าสัมบูรณ์ของความชัน โดยเส้นตรงที่มีค่าสัมบูรณ์ของความชันมากกว่าจะลาดชันมากกว่าเส้นตรงที่มีค่าสัมบูรณ์ของความชันน้อยกว่า

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 3.1.3

6. กำหนดให้ $A(-6,-2), B(2,-2), C$ และ D เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีด้าน AB เป็นฐานที่ยาวเป็น 2 เท่าของด้านคู่ขนาน DC มีมุม A เป็นมุมฉากและมีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย จงหาความชันที่เป็นไปได้ทั้งหมดของด้าน BC

สถานการณ์ในแบบฝึกหัดข้อนี้อาจเป็นได้ 2 กรณี คือ กรณีที่จุด C และจุด D อยู่เหนือแกน X และกรณีที่จุด C และจุด D อยู่ใต้แกน X ซึ่งทำให้ความชันของด้าน BC ที่เป็นไปได้มี 2 คำตอบ

เส้นขนาน

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ถึงแม้ว่าไม่ได้มีการนิยามความชันของเส้นตรงที่ขนานแกน Y แต่สามารถอธิบายการขนานกันของเส้นตรงที่ขนานแกน Y สองเส้น เช่น เส้นตรง $x=2$ และ $x=4$ ได้ โดยใช้การสังเกตจากกราฟ

เส้นตั้งฉาก

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ถึงแม้ว่าไม่ได้มีการนิยามความชันของเส้นตรงที่ขนานแกน Y แต่สามารถอธิบายการตั้งฉากกันของเส้นตรงที่ขนานแกน Y กับเส้นตรงที่ขนานแกน X เช่น เส้นตรง $x = 2$ และ $y = 4$ ได้ โดยใช้การสังเกตจากกราฟ

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

นักเรียนอาจเข้าใจผิดว่าระยะตัดแกน X (X -intercept) และระยะตัดแกน Y (Y -intercept) เป็นจำนวนบวกได้เท่านั้น เนื่องจากคำว่า “ระยะ” อาจทำให้เข้าใจผิดว่าต้องเป็นจำนวนบวกเท่านั้น แต่ระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y เป็นได้ทั้งจำนวนบวก จำนวนลบ และศูนย์ ดังแสดงในหมายเหตุท้ายตัวอย่างที่ 16

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 3.1.6

11. ให้ $(0,0), (4,0)$ และ (x, y) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ 4 ตารางหน่วย จงหาว่า (x, y) เป็นคู่อันดับใดได้บ้าง

สถานการณ์ในแบบฝึกหัดข้อนี้อาจเป็นได้ 2 กรณี คือ กรณีที่จุด (x, y) ที่ต้องการหาอยู่เหนือแกน X และกรณีที่จุด (x, y) ที่ต้องการหาอยู่ใต้แกน X ซึ่งทำให้คำตอบที่เป็นไปได้มี 2 คำตอบ

ภาคตัดกรวย

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

- ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนเขียนสมการภาคตัดกรวยซึ่งเป็นคำตอบของโจทย์ปัญหาในรูปแบบมาตรฐานหรือรูปแบบทั่วไปก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับบริบทของโจทย์
- สมการรูปแบบมาตรฐานของภาคตัดกรวยช่วยให้หารายละเอียดที่สำคัญของภาคตัดกรวย เช่น จุดศูนย์กลาง โฟกัส ได้ง่ายขึ้น
- ครูไม่ควรให้นักเรียนท่องจำสมการรูปทั่วไปของภาคตัดกรวย แต่ต้องให้นักเรียนสามารถจัดสมการรูปทั่วไปให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้

วงกลม

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ครูควรเน้นย้ำว่า สมการ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ อาจมีกราฟเป็นวงกลม หรือจุดหนึ่งจุด หรือไม่มีกราฟก็ได้ ขึ้นกับค่าของ a, b และ c

วงรี

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับเนื้อหาและสิ่งที่ควรตระหนักเกี่ยวกับการสอน

ในการสอนเกี่ยวกับความเยื้องศูนย์กลางของวงรี ครูอาจเขียนความเยื้องศูนย์กลางของวงรีให้อยู่ในรูป $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ซึ่งจะทำให้เห็นว่าเมื่อ a และ b มีค่าใกล้เคียงกัน จะทำให้ e มีค่าใกล้ 0 นั่นคือวงรีมีความรีน้อย ซึ่งจะมีรูปร่างใกล้เคียงวงกลม

ไฮเพอร์โบลา

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 3.2.4

3. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

   9) เส้นกำกับ คือ $y = \pm x$ และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(5, 3)$

สถานการณ์ในแบบฝึกหัดข้อนี้อาจเป็นได้ 2 กรณี คือ กรณีที่แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง และกรณีที่แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ซึ่งเมื่อตรวจสอบแล้วจะพบว่ากรณีที่แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้งนั้นเป็นไปไม่ได้

การเลื่อนกราฟ

ประเด็นสำคัญเกี่ยวกับแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 3.2.5

6. จงพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้มีกราฟเป็นวงรี พาราโบลา หรือไฮเพอร์โบลา หรือภาคตัดกรวยลดรูป ถ้าเป็นกราฟวงรี จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวของแกนเอก และความยาวของแกนโท ถ้ากราฟเป็นพาราโบลา จงหาจุดยอด โฟกัส และไดเรกตริกซ์ ถ้ากราฟเป็นไฮเพอร์โบลา จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส และเส้นกำกับ แล้วเขียนกราฟของสมการ ถ้าสมการไม่มีกราฟในระนาบจำนวนจริง จงบอกเหตุผล

11) $3x^2+4y^2-6x-24y+39=0$

12) $x^2+4y^2+20x-40y+300=0$

8. จงหาค่าของ F ถ้ากราฟของสมการ $4x^2+y^2+4(x-2y)+F=0$ เป็น

1) วงรี 2) จุดจุดเดียว 3) เซตว่าง

ในการทำแบบฝึกหัดสองข้อนี้ เมื่อจัดรูปสมการแล้ว ต้องใช้ความรู้ว่ากำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ จะเป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์เสมอ มาช่วยในการแก้สมการ

3.3 การวัดผลประเมินผลระหว่างเรียน

การวัดผลระหว่างเรียนเป็นการวัดผลการเรียนรู้เพื่อปรับปรุงและพัฒนาการเรียนการสอน และตรวจสอบนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้ความเข้าใจในเรื่องที่ครูสอนมากน้อยเพียงใด การให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นแนวทางหนึ่งที่ครูอาจใช้เพื่อประเมินผลด้านความรู้

ระหว่างเรียนของนักเรียน ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดที่ครอบคลุมเนื้อหาที่สำคัญของแต่ละบทไว้ สำหรับในบทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์ ครูอาจใช้แบบฝึกหัดเพื่อวัดผลประเมินผลความรู้ในแต่ละเนื้อหาได้ดังนี้

เนื้อหา	แบบฝึกหัด	
ระยะทางระหว่างจุดสองจุด	3.1.1	ข้อ 1 – 12
จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง	3.1.2	ข้อ 1 – 12
ความชันของเส้นตรง	3.1.3	ข้อ 1 – 6
เส้นขนาน	3.1.4	ข้อ 1 – 10
เส้นตั้งฉาก	3.1.5	ข้อ 1 – 12
ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง	3.1.6	ข้อ 1 – 13
ระยะห่างระหว่างจุดกับเส้นตรง	3.1.7	ข้อ 1 – 6
วงกลม	3.2.1	ข้อ 1 – 15
วงรี	3.2.2	ข้อ 1 – 5
พาราโบลา	3.2.3	ข้อ 1 – 4
ไฮเพอร์โบลา	3.2.4	ข้อ 1 – 11
การเลื่อนกราฟของสมการ	3.2.5	ข้อ 1 – 9

3.4 การวิเคราะห์แบบฝึกหัดท้ายบท

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 มีจุดมุ่งหมายว่าเมื่อนักเรียนได้เรียนจบบทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์ แล้วนักเรียนสามารถ

1. หาระยะทางระหว่างจุดสองจุด และหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง
2. หาความชันของเส้นตรง และใช้ความชันในการอธิบายเกี่ยวกับเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก
3. เขียนกราฟและหาสมการเส้นตรง
4. หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและเส้นคู่ขนาน
5. เขียนกราฟและหาสมการวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา
6. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา

ซึ่งหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ได้นำเสนอแบบฝึกหัดท้ายบทที่ประกอบด้วยโจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียน ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมาย นอกจากนี้ประกอบด้วยโจทย์ฝึกทักษะที่มีความน่าสนใจและโจทย์ท้าทาย ครูอาจเลือกใช้แบบฝึกหัดท้ายบทวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบทเพื่อตรวจสอบว่านักเรียนมีความสามารถตามจุดมุ่งหมายเมื่อเรียนจบบทเรียนหรือไม่

ทั้งนี้ แบบฝึกหัดท้ายบทแต่ละข้อในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 บทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์ สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายของบทเรียน ดังนี้

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย					
		หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดและหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง	หาความชันของเส้นตรงและใช้ความชันในการอธิบายเกี่ยวกับเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก	เขียนกราฟและหาสมการเส้นตรง	หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและเส้นคู่ขนาน	เขียนกราฟและหาสมการวงกลม วงรี พาราโบลาและไฮเพอร์โบลา	ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา
1.				✓			
2.			✓				
3.						✓	
4.						✓	
5.		✓				✓	
6.	1)					✓	
	2)					✓	
7.			✓	✓		✓	
8.			✓	✓		✓	
9.	1)		✓	✓	✓	✓	
	2)	โจทย์ท้าทาย					
	3)	โจทย์ท้าทาย					
10.	1)					✓	
	2)					✓	
	3)					✓	

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย					
		หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดและหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง	หาความชันของเส้นตรงและใช้ความชันในการอธิบายเกี่ยวกับเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก	เขียนกราฟและหาสมการเส้นตรง	หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและเส้นคู่ขนาน	เขียนกราฟและหาสมการวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา	ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา
	4)					✓	
11.	1)					✓	
	2)					✓	
	3)					✓	
	4)					✓	
12.	1)					✓	
	2)					✓	
	3)					✓	
	4)					✓	
13.	1)					✓	
	2)					✓	
	3)					✓	
	4)					✓	
14.	1)					✓	
	2)					✓	
	3)					✓	

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย					
		หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดและหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง	หาความชันของเส้นตรงและใช้ความชันในการอธิบายเกี่ยวกับเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก	เขียนกราฟและหาสมการเส้นตรง	หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและเส้นคู่ขนาน	เขียนกราฟและหาสมการวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา	ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา
	4)					✓	
	5)					✓	
	6)					✓	
	7)					✓	
	8)					✓	
	9)					✓	
	10)					✓	
15.	1)					✓	
	2)					✓	
	3)					✓	
	4)					✓	
	5)					✓	
	6)					✓	
	7)					✓	
	8)					✓	
	9)					✓	

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย					
		หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดและหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง	หาความชันของเส้นตรงและใช้ความชันในการอธิบายเกี่ยวกับเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก	เขียนกราฟและหาสมการเส้นตรง	หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและเส้นคู่ขนาน	เขียนกราฟและหาสมการวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา	ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา
	10)					✓	
16.	1)					✓	
	2)					✓	
	3)					✓	
	4)					✓	
	5)					✓	
	6)					✓	
	7)					✓	
	8)					✓	
17.	1)						✓
	2)						✓
	3)						✓
	4)						✓
18.	1)						✓
	2)						✓
	3)						✓

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย					
		หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดและหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง	หาความชันของเส้นตรงและใช้ความชันในการอธิบายเกี่ยวกับเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก	เขียนกราฟและหาสมการเส้นตรง	หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและเส้นคู่ขนาน	เขียนกราฟและหาสมการวงกลม วงรี พาราโบลาและไฮเพอร์โบลา	ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา
	4)						✓
19.	1)						✓
	2)	โจทย์ท้าทาย					
20.							✓
21.		โจทย์ท้าทาย					
22.					✓	✓	
23.				✓	✓	✓	
24.				✓		✓	
25.						✓	
26.	1)					✓	
	2)					✓	
	3)					✓	
	4)					✓	
27.	1)					✓	
	2)					✓	
	3)			✓			

ข้อ	ข้อย่อย	จุดมุ่งหมาย					
		หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดและหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง	หาความชันของเส้นตรงและใช้ความชันในการอธิบายเกี่ยวกับเส้นขนานและเส้นตั้งฉาก	เขียนกราฟและหาสมการเส้นตรง	หาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดและเส้นคู่ขนาน	เขียนกราฟและหาสมการวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา	ใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในการแก้ปัญหา
	4)					✓	
	5)					✓	
	6)						✓
28.						✓	
29.							✓
30.							✓
31.	1)						✓
	2)						✓
32.							✓
33.		โจทย์ท้าทาย					

3.5 ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

- สมบัติการคล้ายกันของวงกลม สมบัติการคล้ายกันของพาราโบลา และความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับค่าความเยื้องศูนย์กลาง สามารถศึกษาได้จากหนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ หน้า 48 – 50
- สมบัติการสะท้อนของแสงบนวงรีและพาราโบลา สามารถศึกษาได้จากหนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ หน้า 76 – 80
- การพิสูจน์สมบัติของโฟกัสของภาคตัดกรวย สามารถศึกษาได้จากหนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ หน้า 83 – 86
- รูปแบบทั่วไปของสมการของภาคตัดกรวย $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ เมื่อ A, B และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ในกรณีที่ $B \neq 0$ จะมีกราฟเป็นภาคตัดกรวยที่แกนของกราฟไม่ขนานกับแกน X และแกน Y หรือภาคตัดกรวยลดรูป สามารถศึกษาได้จากหนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์ หน้า 50 – 52

3.6 ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทและเฉลยแบบทดสอบประจำบท

ในส่วนนี้จะนำเสนอตัวอย่างแบบทดสอบประจำบทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์ สำหรับรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ซึ่งครูสามารถเลือกนำไปใช้ได้ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ต้องการวัดผลประเมินผล

ตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. จงหาจุดบนเส้นตรง $y=2x$ ทั้งหมด ซึ่งอยู่ห่างจากจุด $(1,3)$ เป็นระยะทาง $\sqrt{13}$ หน่วย
2. จุด A และ B มีพิกัดเป็น $(0,0)$ และ $(3,4)$ ตามลำดับ ถ้าทั้งสองจุดต่างเคลื่อนที่เข้าหากันในแนวเส้นตรงเดียวกันด้วยความเร็ว 1 หน่วยต่อนาที อยากทราบว่าทั้งสองจุดจะพบกันเมื่อเวลาผ่านไปกี่นาที และพบกันที่พิกัดใด
3. ถ้าจุด $(-2,3)$, $(4,15)$ และ $(6,y)$ เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน แล้ว y มีค่าเท่าใด
4. กำหนดให้ $A(-3,6)$ และ $B(1,5)$ เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรง จงหาพิกัดของจุดบนส่วนของเส้นตรงนี้ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ $\frac{3}{8}$ ของระยะทางระหว่างจุด A และ B
5. ถ้าจุดปลายของเส้นมัธยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม คือ จุด $(3.5,8.5)$, $(2,5)$ และ $(1.5,5.5)$ จงหาพิกัดของจุดยอดทั้งสาม
6. กำหนด $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ถ้าจุด A, B และ C มีพิกัดเป็น $(1,4)$, $(3,7)$ และ $(5,2)$ ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุด D
7. กำหนดให้ $A(-2,2)$ และ $B(2,4)$ เป็นจุดปลายของส่วนของเส้นตรง จงหาพิกัดของจุด C บนเส้นตรง $y=x$ ที่ทำให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก
8. ถ้าเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด (x,y) กับจุด $(-1,3)$ มีความชันเป็น 4 จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y
9. ให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่แตกต่างกันทั้งหมด จงแสดงว่าจุด $(a+b,-c)$, $(b+c,-a)$ และ $(c+a,-b)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
10. กำหนด $A(-1,1)$ $B(3,5)$ และ $C(2,4)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม จงหาพิกัดของจุดปลายของเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปตั้งฉากกับด้าน BC

11. กำหนด $A(0,0)$, $B(a,b)$, $C(a+c,b+d)$ และ $D(c,d)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ตัดกันเป็นมุมฉาก ก็ต่อเมื่อ $AB = AD$
12. กำหนดจุด A, B และ C มีพิกัดเป็น $(0,0)$, $(4,2)$ และ $(2,4)$ ตามลำดับ ให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากและผ่านจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB และ L_2 เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากและผ่านจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง BC ถ้า L_1 และ L_2 ตัดกันที่ D จงแสดงว่า $DA = DB = DC$ (นั่นคือจุด D เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C)
13. จงแสดงว่าในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมและตั้งฉากกับด้านตรงข้าม จะพบกันที่จุด ๆ เดียว
14. จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 4 ซึ่งพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงนี้กับแกน x และแกน y เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ 8 ตารางหน่วย
15. จงหาเส้นตรงที่อยู่กึ่งกลางเส้นคู่ขนาน $3x - y = 0$ และ $3x - y + 6 = 0$
16. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ และ $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$
17. จงหาวงกลมที่ผ่านจุด $(0,0)$, $(-1,2)$ และ $(3,3)$
18. จงหาสมการวงกลมที่มีรัศมี 4 หน่วย และมี $x - y = 0$ และ $x + y = 0$ เป็นเส้นสัมผัส
19. กำหนดวงรี E มีความยาวครึ่งแกนเอก a หน่วย และความยาวครึ่งแกนโท b หน่วย ให้ L เป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกนโทของวงรีและผ่านโฟกัสจุดหนึ่งของวงรี ถ้าเส้นตรง L ตัดวงรี E ที่จุด A และ B จงเขียนแสดงความยาวของส่วนของเส้นตรง AB ในรูปของ a และ b

    หมายเหตุ ส่วนของเส้นตรง AB มีชื่อเรียกว่า latus rectum
20. จงหาสมการวงรีที่ผ่านจุด $(1,1)$ และมีแกนเอกอยู่บนแกน x โดยแกนเอก และแกนโทยาว 6 และ 4 หน่วย ตามลำดับ

21. จงหาพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(4,3)$ และไดเรกตริกซ์ คือ $y=-5$

22. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2,3)$ จุดยอดอยู่ที่จุด $(2,7)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(2,11)$

23. จงหาเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไป ยังจุด $(1,1)$ และ $(-1,-1)$ มีค่าคงตัวเท่ากับ 1 หน่วย

24. สะพานรูปโค้งพาราโบลาคว่ำ มีจุดปลายห่างกัน 100 เมตร และจุดสูงสุดของสะพานอยู่สูงจากพื้นดิน 50 เมตร ถ้ายศเดินขึ้นสะพานโดยวัดระยะตามแนวราบได้ 20 เมตร จงหาว่ายศจะอยู่สูงจากพื้นดินกี่เมตร

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบประจำบท

1. ให้ จุด (a,b) เป็นจุดบน $y=2x$ ซึ่งอยู่ห่างจากจุด $(1,3)$ เป็นระยะทาง $\sqrt{13}$ หน่วย

จากจุด (a,b) เป็นจุดบน $y=2x$ ดังนั้น $b=2a$

จากจุด (a,b) อยู่ห่างจาก $(1,3)$ เป็นระยะทาง $\sqrt{13}$ หน่วย จะได้

$$\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2} = \sqrt{13} \qquad \text{---------- } (1)$$

แทน b ด้วย $2a$ ใน (1) จะได้

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a-1)^2+(2a-3)^2} &= \sqrt{13} \\
(a-1)^2+(2a-3)^2 &= 13 \\
a^2-2a+1+4a^2-12a+9 &= 13 \\
5a^2-14a-3 &= 0 \\
(5a+1)(a-3) &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a=-\frac{1}{5}$ หรือ $a=3$

ถ้า $a=-\frac{1}{5}$ จะได้ $b=-\frac{2}{5}$

ถ้า $a=3$ จะได้ $b=6$

ดังนั้น จุดทั้งหมดคือ $\left(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$ และ $(3,6)$

2. หาระยะทางระหว่างจุด A และ B ได้เป็น $\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2}=5$ หน่วย เพราะทั้งสองเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 หน่วยต่อนาทีเท่ากัน จึงจะพบกันเมื่อแต่ละจุดเคลื่อนที่ได้ $\frac{5}{2}=2.5$ หน่วย ซึ่งใช้เวลา 2.5 นาที และพบกันที่จุดกึ่งกลางของสองจุดนั้น คือ $\left(\frac{0+3}{2},\frac{0+4}{2}\right)=(1.5,2)$

ดังนั้น ทั้งสองจุดจะพบกันเมื่อผ่านไป 2.5 นาที ที่พิกัด $(1.5,2)$

3. ให้ A, B และ C มีพิกัดเป็น $(-2,\ 3)$ $(4,\ 15)$ และ $(6,\ y)$ ตามลำดับ

เนื่องจาก

$$AB = \sqrt{(4-(-2))^2+(15-3)^2} = \sqrt{36+144} = \sqrt{180}$$

$$BC = \sqrt{(6-4)^2+(y-15)^2} = \sqrt{y^2-30y+229}$$

$$AC = \sqrt{(6-(-2))^2+(y-3)^2} = \sqrt{y^2-6y+73}$$

และ จุด A, B และ C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $AB+BC=AC$

จะได้ว่า

$$\sqrt{180}+\sqrt{y^2-30y+229} = \sqrt{y^2-6y+73}$$

$$180+\left(2\sqrt{180}\right)\sqrt{y^2-30y+229}+\left(y^2-30y+229\right) = y^2-6y+73$$

$$\left(2\sqrt{180}\right)\sqrt{y^2-30y+229} = 24y-336$$

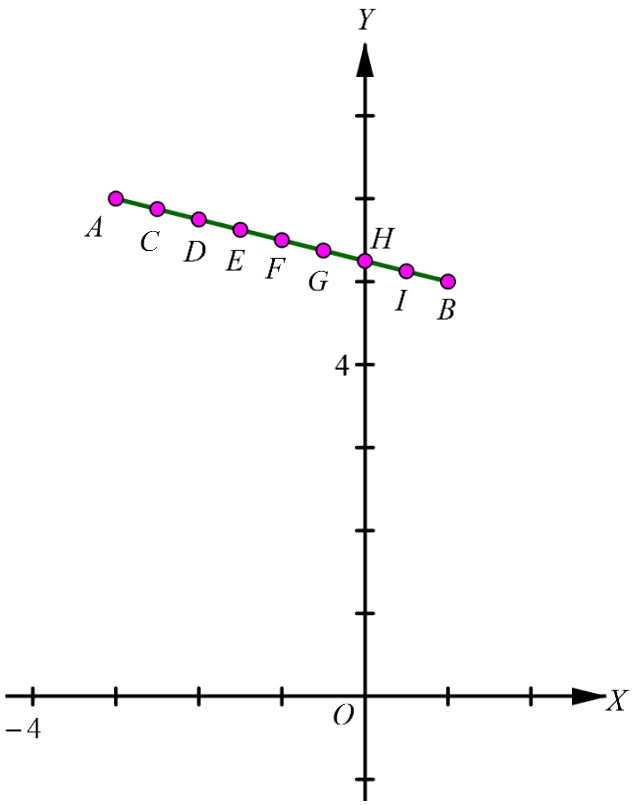
$$\left(12\sqrt{5}\right)\sqrt{y^2-30y+229} = 24y-336$$

$$\left(\sqrt{5}\right)\sqrt{y^2-30y+229} = 2y-28$$

$$5\left(y^2-30y+229\right) = 4y^2-112y+784$$
$$5y^2-150y+1145 = 4y^2-112y+784$$
$$y^2-38y+361 = 0$$
$$(y-19)^2 = 0$$

ดังนั้น $y = 19$

4. ให้จุด C, D, E, F, G, H และ I เป็นจุดที่แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็น 8 ส่วนเท่า ๆ กัน ดังรูป



ต้องการหาพิกัดของ จุด E

เนื่องจากจุด F เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และ B

ดังนั้น จุด F มีพิกัด $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{6+5}{2}\right)=(-1, 5.5)$

เนื่องจากจุด D เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A และ F

ดังนั้น จุด D มีพิกัด $\left(\frac{-3+(-1)}{2}, \frac{6+5.5}{2}\right)=(-2, 5.75)$

เนื่องจากจุด E เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด D และ F

ดังนั้น จุด E มีพิกัด $\left(\frac{-2+(-1)}{2}, \frac{5.75+5.5}{2}\right)=(-1.5, 5.625)$

5. ให้ จุดยอดทั้งสามมีพิกัดเป็น (a, b), (c, d) และ (e, f)

โดยที่ $(3.5, 8.5)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง (a, b) และ (c, d)

$(2, 5)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง (c, d) และ (e, f)

$(1.5, 5.5)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง (e, f) และ (a, b)

จะได้

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) = (3.5, 8.5)$$

$$\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right) = (2, 5)$$

$$\left(\frac{e+a}{2}, \frac{f+b}{2}\right) = (1.5, 5.5)$$

นั่นคือ

$$(a+c, b+d) = (7, 17) \quad \text{----------} (1)$$

$$(c+e, d+f) = (4, 10) \quad \text{----------} (2)$$

$$(e+a, f+b) = (3, 11) \quad \text{----------} (3)$$

จาก $(1), (2)$ และ (3) จะได้

$$(2a+2c+2e, 2b+2d+2f) = (14, 38)$$

$$(a+c+e, b+d+f) = (7, 19) \quad \text{----------} (4)$$

จาก (4) และ (1) จะได้ $(e, f)=(0, 2)$

จาก (4) และ (2) จะได้ $(a, b)=(3, 9)$

จาก (4) และ (3) จะได้ $(c, d)=(4, 8)$

ดังนั้น พิกัดของจุดยอดทั้งสามคือ $(3, 9)$, $(4, 8)$ และ $(0, 2)$

6. ให้จุด D มีพิกัดเป็น (x, y)

หาความชันของ $\overline{AB}$ ได้เป็น $\frac{7-4}{3-1}=\frac{3}{2}$

หาความชันของ $\overline{CD}$ ได้เป็น $\frac{y-2}{x-5}$

หาความชันของ $\overline{AD}$ ได้เป็น $\frac{y-4}{x-1}$

เนื่องจาก $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้น $\overline{AB}//\overline{CD}$ และ $\overline{AD}//\overline{BC}$

หาความชันของ $\overline{BC}$ ได้เป็น $\frac{2-7}{5-3}=-\frac{5}{2}$

นั่นคือ $\frac{y-2}{x-5} = \frac{3}{2}$ และ $\frac{y-4}{x-1} = -\frac{5}{2}$

$2y-4 = 3x-15$ และ $2y-8 = 5-5x$

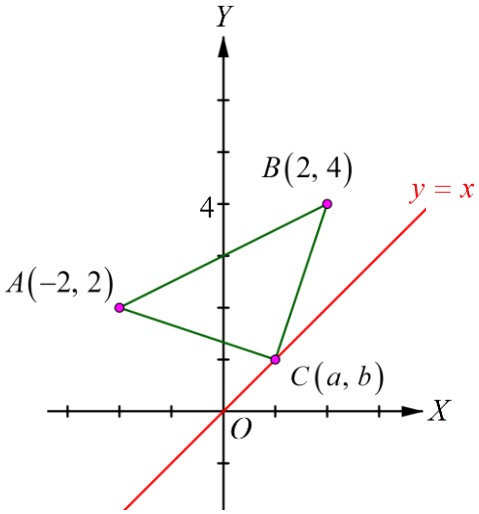
จะได้ $x=3$ และ $y=-1$

ดังนั้น จุด D มีพิกัด $(3,-1)$

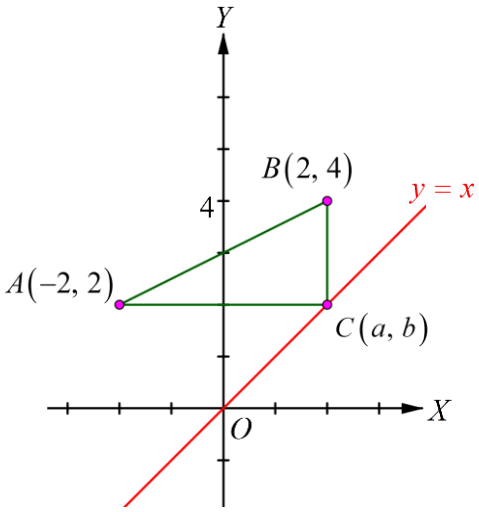
7. ให้จุด C มีพิกัดเป็น (a, b)

เนื่องจากจุด C อยู่บนเส้นตรง $y=x$ ดังนั้น $a=b$

เขียนกราฟได้ดังนี้



หรือ



เนื่องจากมุม C เป็นมุมฉาก ดังนั้น ผลคูณของความชันของส่วนของเส้นตรง CA กับ CB เท่ากับ -1

นั่นคือ $$\frac{b-2}{a+2}\cdot\frac{b-4}{a-2} = -1$$

$$\frac{b-2}{a+2} = -\frac{a-2}{b-4}$$
$$b^2-6b+8 = -\left(a^2-4\right)$$

เนื่องจาก $a=b$

จะได้ว่า
$$b^2-6b+8 = -(b^2-4)$$
$$b^2-6b+8 = 4-b^2$$
$$2b^2-6b+4 = 0$$
$$b^2-3b+2 = 0$$
$$(b-1)(b-2) = 0$$

ดังนั้น $b=1$ หรือ $b=2$

นั่นคือ จุด C บนเส้นตรง $y=x$ ที่ทำให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก มีพิกัดเป็น $(1,\ 1)$ หรือ $(2,\ 2)$

8. จากโจทย์ จะได้
$$\frac{y-3}{x+1} = 4$$
$$y-3 = 4x+4$$
$$y = 4x+7$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y คือ $y = 4x+7$

9. ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง $(a+b,-c)$ และ $(b+c,-a)$ คือ $\frac{c-a}{c-a}=1$

ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่าง $(b+c,-a)$ และ $(c+a,-b)$ คือ $\frac{a-b}{a-b}=1$

เนื่องจากเส้นตรงทั้งสองมีความชันเท่ากัน ดังนั้น เส้นตรงทั้งสองขนานกัน

เนื่องจากเส้นตรงทั้งสองผ่านจุด $(b+c,-a)$ ดังนั้นเส้นตรงทั้งสองเป็นเส้นเดียวกัน

จะได้ว่า จุด $(a+b,-c)$, $(b+c,-a)$ และ $(c+a,-b)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

10. ให้ $D(x,\ y)$ เป็นจุดปลายของเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปยังด้าน BC

เนื่องจากความชันของด้าน BC เท่ากับ $\frac{4-5}{2-3}=1$

ดังนั้น ความชันของส่วนของเส้นตรง DB เท่ากับ 1 ด้วย

จะได้ $\frac{y-5}{x-3}=1$ นั่นคือ $y=x+2$ ---------- (1)

เนื่องจากส่วนของเส้นตรง AD ตั้งฉากกับด้าน BC ซึ่งมีความชัน 1

จะได้ว่า ความชันของส่วนของเส้นตรง AD คือ -1

จะได้ $\frac{y-1}{x+1}=-1$ นั่นคือ $y=-x$ ---------- (2)

จาก (1) และ (2)

จะได้ว่า $x=-1$ และ $y=1$

ดังนั้น จุดปลายของเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปตั้งฉากกับด้าน BC มีพิกัดเป็น $(-1, 1)$

11. เนื่องจากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ตัดกันเป็นมุมฉาก

ดังนั้น ผลคูณของความชันของเส้นตรง AC กับ BD เท่ากับ -1

จะได้
$$\begin{aligned}\frac{b+d}{a+c}\cdot\frac{d-b}{c-a} &= -1\\ d^2-b^2 &= a^2-c^2\\ a^2+b^2 &= c^2+d^2\\ AB^2 &= AD^2\\ AB &= AD\end{aligned}$$

ดังนั้น เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ตัดกันเป็นมุมฉาก ก็ต่อเมื่อ $AB=AD$

12. จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB คือ $(2, 1)$

และความชันของส่วนของเส้นตรง AB คือ $\frac{1}{2}$

ดังนั้น L_1 มีความชัน -2 และผ่านจุด $(2, 1)$

นั่นคือ L_1 มีสมการเป็น $y=-2x+5$ ---------- (1)

จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง BC คือ $(3, 3)$

และความชันของส่วนของเส้นตรง BC คือ -1

ดังนั้น L_2 มีความชัน 1 และผ่านจุด (3, 3)

นั่นคือ L_2 มีสมการเป็น $y = x$ ---------- (2)

จาก (1) และ (2) จะหาพิกัดของจุดตัด D ได้เป็น $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

จะเห็นว่า

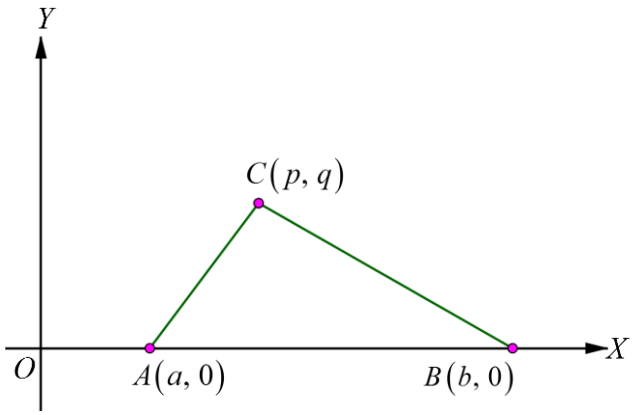
$$DA = \sqrt{\left(\frac{5}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-0\right)^2} = \frac{\sqrt{50}}{3}$$

$$DB = \sqrt{\left(\frac{5}{3}-4\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-2\right)^2} = \frac{\sqrt{50}}{3}$$

$$DC = \sqrt{\left(\frac{5}{3}-2\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-4\right)^2} = \frac{\sqrt{50}}{3}$$

นั่นคือ $DA = DB = DC$

13. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่ง A, B และ C มีพิกัดเป็น $(a, 0)$, $(b, 0)$ และ (p, q) ตามลำดับ เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด C และตั้งฉากกับด้าน AB คือ $x = p$

เนื่องจาก BC มีความชัน $\dfrac{q}{p-b}$ ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่านจุด A และตั้งฉากกับ BC มีความชัน $\dfrac{b-p}{q}$ คือ $y=\dfrac{(b-p)x}{q}+\dfrac{(p-b)a}{q}$

เนื่องจาก AC มีความชัน $\dfrac{q}{p-a}$ ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่านจุด B และตั้งฉากกับ AC มีความชัน $\dfrac{a-p}{q}$ คือ $y=\dfrac{(a-p)x}{q}+\dfrac{(p-a)b}{q}$

ให้ L_1, L_2 และ L_3 เป็นเส้นตรง $x=p$, $y=\dfrac{(b-p)x}{q}+\dfrac{(p-b)a}{q}$ และ $y=\dfrac{(a-p)x}{q}+\dfrac{(p-a)b}{q}$ ตามลำดับ

จะได้ว่าเส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกันที่จุด $\left(p,\ \dfrac{(b-p)p}{q}+\dfrac{(p-b)a}{q}\right)$

โดยที่ $\left(p,\ \dfrac{(b-p)p}{q}+\dfrac{(p-b)a}{q}\right)=\left(p,\ \dfrac{bp+ap-ab-p^2}{q}\right)$

และจะได้ว่าเส้นตรง L_1 และ L_3 ตัดกันที่จุด $\left(p,\ \dfrac{(a-p)p}{q}+\dfrac{(p-a)b}{q}\right)$

โดยที่ $\left(p,\ \dfrac{(a-p)p}{q}+\dfrac{(p-a)b}{q}\right)=\left(p,\ \dfrac{ap+bp-ab-p^2}{q}\right)$

ดังนั้น เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมและตั้งฉากกับด้านตรงข้าม จะพบกันที่จุด ๆ เดียว

14. เนื่องจากเส้นตรงมีความชันเท่ากับ 4 จึงได้สมการเส้นตรงเป็น $y=4x+c$

จะได้ว่าเส้นตรงนี้ตัดแกน X ที่ $\left(-\dfrac{c}{4},\ 0\right)$ และตัดแกน Y ที่ $(0,\ c)$

ดังนั้น พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงนี้กับแกน x และแกน y เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ $\left|\frac{1}{2}\left(-\frac{c}{4}\right)(c)\right| = \left|\frac{c^2}{8}\right|$ ตารางหน่วย

นั่นคือ
$$\frac{c^2}{8} = 8$$
$$c^2 = 64$$

จะได้ว่า $c = 8$ หรือ $c = -8$

ดังนั้น สมการเส้นตรงคือ $y = 4x + 8$ หรือ $y = 4x - 8$

15. เนื่องจาก เส้นตรงที่อยู่กึ่งกลางเส้นคู่ขนาน ย่อมขนานกับเส้นคู่ขนานด้วย

ดังนั้น สมมติให้เส้นตรงที่ต้องการมีสมการเป็น $3x - y + c = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก เส้นตรงที่ต้องการอยู่ห่างจากเส้นตรง $3x - y = 0$ และ $3x - y + 6 = 0$ เป็นระยะทางเท่ากัน

จะได้
$$\frac{|c-0|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|c-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$
$$|c| = |c-6|$$
$$c^2 = (c-6)^2$$
$$c^2 = c^2 - 12c + 36$$
$$12c = 36$$
$$c = 3$$

ดังนั้น เส้นตรงที่ต้องการคือ $3x - y + 3 = 0$

16. จาก $x^2 + y^2 = 4$ ---------- (1)

และ $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ ---------- (2)

จะได้ $2x - 2y = -4$ นั่นคือ $x = y - 2$

แทน x ใน (1) ด้วย $y - 2$

จะได้
$$(y-2)^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{aligned}(y^2-4y+4)+y^2 &= 4\\ 2y^2-4y &= 0\\ y(y-2) &= 0\end{aligned}$$

นั่นคือ $y=0$ หรือ $y=2$

จะได้ $x=-2$ หรือ $x=0$

ดังนั้น วงกลมทั้งสองวงตัดกันที่จุด $(-2, 0)$ และ $(0, 2)$

จะได้ว่า เส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลมทั้งสองมีความชัน $\frac{2-0}{0-(-2)}=1$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลมทั้งสอง คือ $y-2=1(x-0)$

นั่นคือ $x-y=-2$ หรือ $x-y+2=0$

17. ให้สมการวงกลม คือ $x^2+y^2+ax+by+c=0$

เนื่องจากวงกลมผ่านจุด $(0,\ 0)$ จะได้ $c=0$ ---------- (1)

เนื่องจากวงกลมผ่านจุด $(-1,\ 2)$ จะได้ $(-1)^2+2^2+a(-1)+b(2)+c=0$

นั่นคือ $2b-a+c=-5$ ---------- (2)

เนื่องจากวงกลมผ่านจุด $(3,\ 3)$ จะได้ $3^2+3^2+a(3)+b(3)+c=0$

นั่นคือ $3a+3b+c=-18$ ---------- (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $a=-\frac{7}{3}$, $b=-\frac{11}{3}$ และ $c=0$

ดังนั้น สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-\frac{7}{3}x-\frac{11}{3}y=0$ หรือ $3x^2+3y^2-7x-11y=0$

18. ให้จุดศูนย์กลางของวงกลมมีพิกัดเป็น $(h,\ k)$

เนื่องจาก $x-y=0$ และ $x+y=0$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

และวงกลมมีรัศมี 4 หน่วย

ดังนั้น $(h,\ k)$ อยู่ห่างจาก $x-y=0$ และ $x+y=0$ เป็นระยะทาง 4 หน่วย

นั่นคือ $\dfrac{|h-k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4$ และ $\dfrac{|h+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4$

ดังนั้น $h^2-2hk+k^2=32$ และ $h^2+2hk+k^2=32$

นั่นคือ $4hk=0$ จะได้ว่า $h=0$ หรือ $k=0$

กรณี $h=0$ จะได้ $k=4\sqrt{2}$ หรือ $k=-4\sqrt{2}$

กรณี $k=0$ จะได้ $h=4\sqrt{2}$ หรือ $h=-4\sqrt{2}$

ดังนั้น สมการวงกลมที่มีรัศมียาว 4 หน่วย และมี $x-y=0$ และ $x+y=0$ เป็นเส้นสัมผัส คือ

$$x^2+\left(y-4\sqrt{2}\right)^2=16$$

$$x^2+\left(y+4\sqrt{2}\right)^2=16$$

$$\left(x-4\sqrt{2}\right)^2+y^2=16$$

$$\left(x+4\sqrt{2}\right)^2+y^2=16$$

19. ให้วงรีมีสมการเป็น $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ มีจุดโฟกัสที่ $(c,\ 0)$ เมื่อ $c^2=a^2-b^2$

เนื่องจากเส้นตรง L ผ่านจุด $(c,\ 0)$ และขนานแกนโทของวงรี (แกน Y) พิกัด x ของจุดตัด L กับ E คือ c

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} &= 1\\
y^2 &= b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\\
y^2 &= b^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)\\
y^2 &= b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\\
y^2 &= \frac{b^4}{a^2}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $y = \frac{b^2}{a}$ หรือ $y = -\frac{b^2}{a}$

จะได้ จุด A และ B มีพิกัด $\left(c,\ \frac{b^2}{a}\right)$ และ $\left(c,\ -\frac{b^2}{a}\right)$ ตามลำดับ

จะได้ ส่วนของเส้นตรง AB ยาว $\sqrt{(c-c)^2+\left[\frac{b^2}{a}-\left(-\frac{b^2}{a}\right)\right]^2}=\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

20. เนื่องจากแกนเอกและแกนโทยาว 6 หน่วย และ 4 หน่วย ตามลำดับ

ดังนั้น $a=3$ และ $b=2$

เนื่องจากแกนเอกคือ แกน X ดังนั้น สมมติให้จุดศูนย์กลางของวงรี คือ $(h,\ 0)$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{(x-h)^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$

เนื่องจาก วงรีผ่านจุด (1, 1) จะได้

$$\frac{(1-h)^2}{3^2}+\frac{1^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{(1-h)^2}{3^2} = \frac{3}{4}$$

$$(1-h)^2 = \frac{27}{4}$$

$$1-h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{หรือ} \quad 1-h = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

จะได้ $h = 1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ หรือ $h=1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น วงรีที่ต้องการ คือ $\frac{\left(x-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ หรือ $\frac{\left(x-1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$

21. พาราโบลาที่โจทย์กำหนดเป็นพาราโบลาหงาย ซึ่งมีสมการรูปมาตรฐานเป็น

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

เนื่องจาก โฟกัส คือ $(4,\ 3)$ จึงได้ $h=4$, $k+p=3$

เนื่องจาก เส้นไดเรกตริกซ์ คือ $y=-5$ จึงได้ $k-p=-5$

นั่นคือ $k=-1$, $p=4$

ดังนั้น พาราโบลา คือ $(x-4)^2 = 16(y+1)$

22. จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ จะได้ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานแกน Y

จากจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ $(2,\ 3)$ จะได้ $(h,\ k)=(2,\ 3)$

จากจุดยอดของไฮเพอร์โบลา คือ $(2,\ 7)$ จะได้ $(h,\ k+a)=(2,\ 7)$ นั่นคือ $a=4$

จากจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา คือ $(2,\ 11)$ จะได้ $(h,\ k+c)=(2,\ 11)$ นั่นคือ $c=8$

ดังนั้น $b^2 = c^2 - a^2 = 8^2 - 4^2 = 48$

เพราะว่าสมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานแกน Y คือ $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลาที่ต้องการ คือ $\dfrac{(y-3)^2}{16} - \dfrac{(x-2)^2}{48} = 1$

23. ให้ $(x,\ y)$ เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ

เนื่องจากผลต่างของระยะทางจากจุด $(x,\ y)$ ไปยังจุด $(1,1)$ กับ $(-1,-1)$ เป็น 1 หน่วย

จะได้
$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} - \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} &= 1 \\
\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} &= 1+\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} \\
\left[\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\right]^2 &= \left[1+\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\right]^2 \\
(x-1)^2+(y-1)^2 &= 1+2\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}+(x+1)^2+(y+1)^2 \\
x^2-2x+1+y^2-2y+1 &= 1+2\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}+x^2+2x+1+y^2+2y+1
\end{aligned}$$

$$-2\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2} = 4x+4y+1$$

$$\left[-2\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\right]^2 = (4x+4y+1)^2$$

$$4\left[(x+1)^2+(y+1)^2\right] = 16x^2+16y^2+1+32xy+8x+8y$$

$$4x^2+8x+4+4y^2+8y+4 = 16x^2+16y^2+1+32xy+8x+8y$$

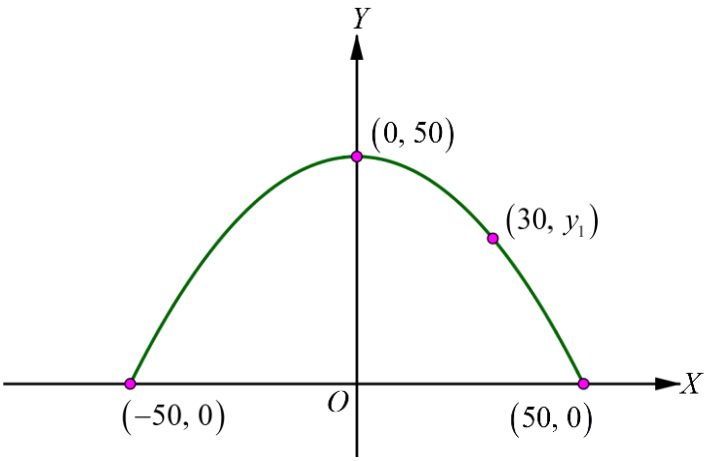
$$12x^2+12y^2+32xy-7 = 0$$

ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างระยะทางจากจุดใด ๆ ไป ยังจุดตรึง $(1,1)$ กับ $(-1,-1)$ มีค่าคงตัว 1 หน่วยคือ $\{(x, y) \mid 12x^2+12y^2+32xy-7=0\}$

24. สมมติให้ปลายสะพานมีพิกัดเป็น $(-50,\ 0)$ และ $(50,\ 0)$

และให้จุดสูงสุดของสะพานอยู่ที่ $(0,\ 50)$

เขียนกราฟแสดงได้ดังนี้



เนื่องจากสะพานโค้งเป็นรูปพาราโบลาคว่ำ

ดังนั้น สมการมาตรฐานอยู่ในรูป $(x-h)^2=4p(y-k)$

เนื่องจากจุดสูงสุดของสะพานอยู่ที่ $(0,\ 50)$

ดังนั้น $(h,\ k)=(0,\ 50)$

นั่นคือ $x^2 = 4p(y-50)$

เนื่องจาก พาราโบลาผ่านจุด $(50,\ 0)$

จะได้

$$\begin{aligned} 50^2 &= 4p(0-50) \\ 2500 &= 4p(-50) \\ 4p &= -50 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการพาราโบลานี้ คือ $x^2 = -50(y-50)$

เนื่องจาก นายยศเดินขึ้นสะพานโดยวัดระยะตามแนวราบได้ 20 เมตร

นั่นคือ นายยศอยู่ที่ตำแหน่ง $(30,\ y_1)$

โดยที่

$$\begin{aligned} 30^2 &= -50(y_1-50) \\ 900 &= -50(y_1-50) \\ -18 &= y_1-50 \\ y &= 32 \end{aligned}$$

ดังนั้น นายยศอยู่สูงจากพื้นดิน 32 เมตร

3.7 เฉลยแบบฝึกหัด

คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 แบ่งการเฉลยแบบฝึกหัดเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่ 1 เฉลยคำตอบ และส่วนที่ 2 เฉลยคำตอบพร้อมวิธีทำอย่างละเอียด ซึ่งเฉลยแบบฝึกหัดที่อยู่ในส่วนนี้เป็นการเฉลยคำตอบของแบบฝึกหัด โดยไม่ได้นำเสนอวิธีทำ อย่างไรก็ตาม ครูสามารถศึกษาวิธีทำโดยละเอียดของแบบฝึกหัดได้ในส่วนท้ายของคู่มือครูเล่มนี้

แบบฝึกหัด 3.1.1

1. 1) 3 หน่วย 2) 13 หน่วย
   3) 7 หน่วย 4) $\sqrt{29}$ หน่วย
   5) $2\sqrt{2}$ หน่วย 6) 10 หน่วย
   7) $2\sqrt{5}$ หน่วย 8) $\sqrt{s^2+t^2}$ หน่วย
   9) $\sqrt{s^2+t^2}$ หน่วย 10) $\sqrt{2}|s+t|$ หน่วย
2. 1) $(7,4)$ 2) 5 หน่วย
   3) $(12,0)$
4. $4\sqrt{2}+2\sqrt{13}+2\sqrt{41}$ หน่วย
5. -2
6. $\left(0,-\frac{29}{24}\right)$
7. รูปสามเหลี่ยมนี้ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
   เนื่องจากไม่มีสองด้านใดเลยของรูปสามเหลี่ยมนี้ที่มีความยาวเท่ากัน
8. 88 ตารางหน่วย
9. ให้ $A(0,0)$, $B(8,18)$ และ $C(12,27)$
   จะได้ว่า จุด A, B และ C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
   เนื่องจาก $AB+BC = 2\sqrt{97}+\sqrt{97} = 3\sqrt{97} = AC$
10. $P_1P_2+P_2P_3 = P_1P_3$ หรือ $P_1P_3+P_2P_3 = P_1P_2$ หรือ $P_1P_2+P_1P_3 = P_2P_3$
11. 1) $117t$ กิโลเมตร 2) 585 กิโลเมตร
    3) 20 นาที
12. เวลา 10.00 น.

แบบฝึกหัด 3.1.2

1. 1) $\left(\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right)$ 2) $\left(0,-\frac{23}{4}\right)$
   3) $(2,0)$ 4) $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$
2. 1) $(-1,0)$ 2) $(-5,16)$
4. $(2x_1,2y_1)$
5. $\sqrt{17}$ หน่วย
6. $\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$
7. $\frac{\sqrt{373}}{2}$ หน่วย
8. $4\sqrt{13}+2\sqrt{37}$ หน่วย
9. $\left(-\frac{13}{4},\frac{25}{4}\right)$

แบบฝึกหัด 3.1.3

1. 1) 3 2) -3
   3) $\frac{4}{7}$ 4) $\frac{4}{3}$
   5) $-\frac{15}{8}$ 6) $\frac{3}{1-t}$ เมื่อ $t\neq 1$
2. 1) 6 2) $\frac{9}{2}$
   3) -5 4) x คือ จำนวนจริงทุกจำนวนยกเว้น 5
   5) -1 6) $\frac{1}{3}$

3. $\dfrac{a+b}{ab}$ โดยที่ $a \neq 0,\ b \neq 0$ และ $a \neq b$

4. ด้าน AB ยาว $3\sqrt{2}$ หน่วย และมีความชัน -1

   ด้าน BC ยาว $3\sqrt{2}$ หน่วย และมีความชัน 1

   และด้าน AC ยาว 6 หน่วย และไม่นิยามความชัน

5. $\dfrac{5}{9}$ และ -1

6. -1 หรือ 1

แบบฝึกหัด 3.1.4

2. 0

4. ให้ $A(1,2),\ B(6,7)$ และ $(-3,4)$

   จะได้ว่า จุด A, B และ C ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

   เนื่องจาก ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B ไม่เท่ากับ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C

5. 2

แบบฝึกหัด 3.1.5

1. $-\dfrac{4}{3}$

2. $-\dfrac{m}{k}$ เมื่อ $k \neq 0$

3. $-\dfrac{2}{3}$

4. เส้นตรงที่ผ่านจุด $(4,3)$ และ $(-3,-5)$ ไม่ตั้งฉากกับเส้นตรงผ่านจุด $(-2,-3)$ และ $(-8,2)$

6. ให้ $A(1,6)$, $B(8,8)$ และ $(-7,2)$

จุด A, B และ C ไม่ได้เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจาก ไม่มีด้านใดเลยของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่ตั้งฉากกัน

7. -30

10. 1) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า 2) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

11. 1) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน 2) $ABCD$ ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

แบบฝึกหัด 3.1.6

1. 1) $(1,0)$ ไม่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t

2) $(-8,6)$ ไม่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t

3) $(0,-2)$ เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t

4) $(2,-1)$ เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t

5) $(6\sqrt{2},\sqrt{2})$ ไม่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t

2. 1) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \middle| y=\frac{3}{7}\right\}$

2) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \middle| x=-\frac{2}{3}\right\}$

3) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} | y=7\}$ และ $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} | y=-1\}$

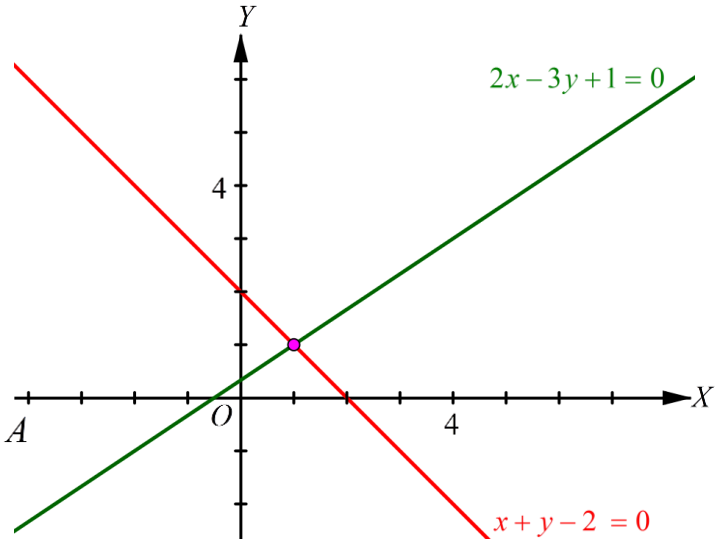
4) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} | x=3\}$ และ $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} | x=-7\}$

3. ความชัน ระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y ของกราฟของสมการที่กำหนดให้เป็นดังนี้

สมการ	ความชัน	ระยะตัดแกน X	ระยะตัดแกน Y
1) $2x-3y=7$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{3}$
2) $5x+4y-2=0$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$
3) $x-4y+5=0$	$\frac{1}{4}$	-5	$\frac{5}{4}$
4) $3x+2y+7=0$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{7}{2}$
5) $5x-y-11=0$	5	$\frac{11}{5}$	-11
6) $\frac{3}{4}x-\frac{4}{3}y=24$	$\frac{9}{16}$	32	-18
7) $x-y=0$	1	0	0
8) $2y+3=0$	0	ไม่ตัดแกน X	$-\frac{3}{2}$
9) $x=4$	ไม่นิยาม	4	ไม่ตัดแกน Y
10) $3(y-1)=-2(x-2)$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$

6. $x+2y-17=0$
7. $2x+3y-12=0$

8. กราฟของเส้นตรง $2x-3y+1=0$ และ $x+y-2=0$ เป็นดังนี้



จุดตัดของกราฟทั้งสองคือ $(1,1)$

9. 1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+2y+1=0\}$

2) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+5y+21=0\}$

3) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x=4\}$

10. $7x+y-27=0$

11. $(x,2)$ หรือ $(x,-2)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

แบบฝึกหัด 3.1.7

1. 1) 4 หน่วย 2) 2 หน่วย

3) $\sqrt{13}$ หน่วย 4) 0 หน่วย

5) 0 หน่วย

2. 1) 2 หน่วย 2) 3 หน่วย

3) $\frac{3}{2}$ หน่วย 4) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ หน่วย

5) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ หน่วย

3. $3x-4y-10=0$ และ $3x-4y=0$

4. $4x-3y+2=0$ และ $4x-3y-18=0$

5. $12x+5y+41=0$ และ $12x+5y-37=0$

6. $12x-5y-62=0$ และ $12x-5y+42=0$

แบบฝึกหัด 3.2.1

1. $2\sqrt{26}$ หน่วย

2. $(4, 0)$

3. วงกลมนี้มีรัศมียาว 5 หน่วย

จุด $(0, 0)$ อยู่บนวงกลมนี้

4. วงกลมนี้มีรัศมียาว 5 หน่วย

สมการวงกลมนี้ คือ $(x-4)^2+(y-7)^2=25$

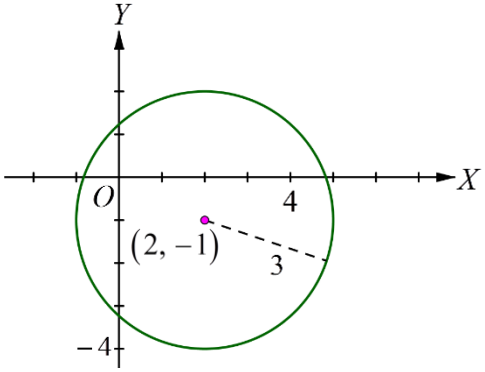
5. สมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $(x+1)^2+(y-3)^2=8^2$ กราฟของสมการดังกล่าวเกิดจากการเลื่อนขนานกราฟของ $x^2+y^2=64$ ไปทางซ้าย 1 หน่วย และเลื่อนขึ้นบน 3 หน่วย

6. ต้นข้าวเข้าใจผิด เนื่องจากวงกลมที่กำหนดให้มีรัศมียาว $\sqrt{10}$ หน่วย

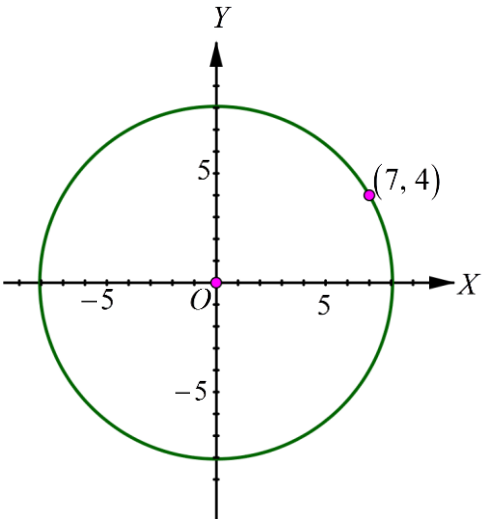
7. 1) $x^2+y^2=9$

2) $(x+4)^2+(y+3)^2=9$

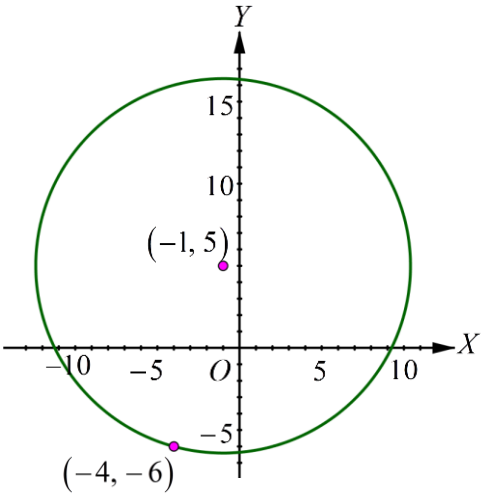
8. 1) สมการวงกลมนี้ คือ $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ หรือ $x^2+y^2-4x+2y-4=0$



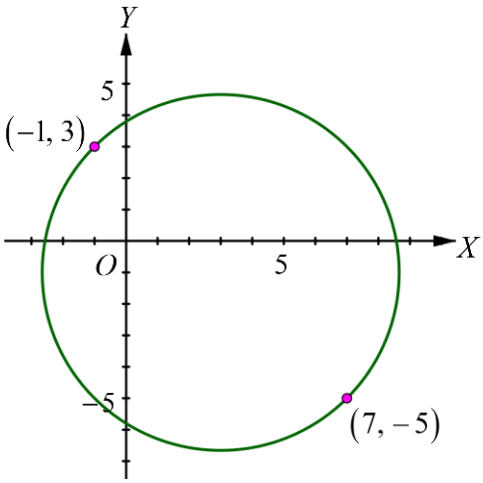
2) สมการวงกลมนี้ คือ $x^2+y^2=65$



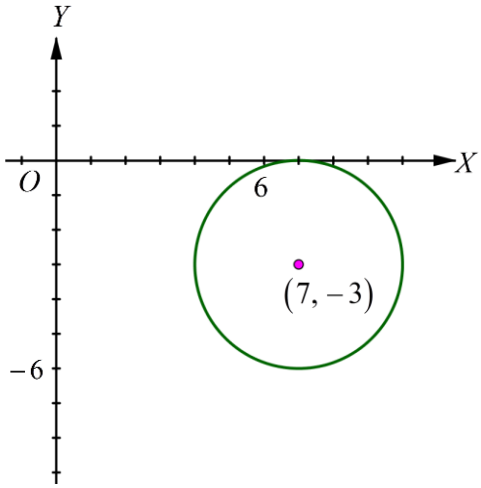
3) สมการวงกลมนี้ คือ $(x+1)^2+(y-5)^2=130$ หรือ $x^2+y^2+2x-10y-104=0$



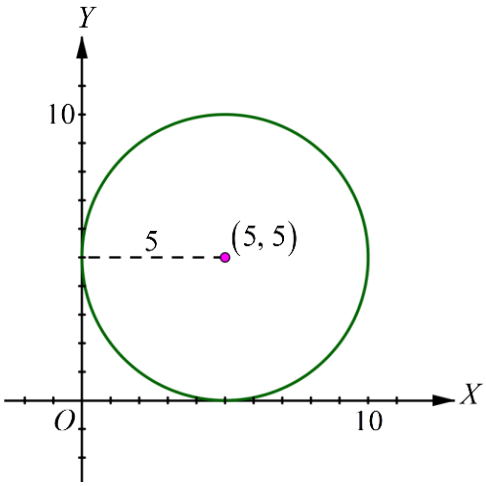
4) สมการวงกลมนี้ คือ $(x-3)^2+(y+1)^2=32$ หรือ $x^2+y^2-6x+2y-22=0$



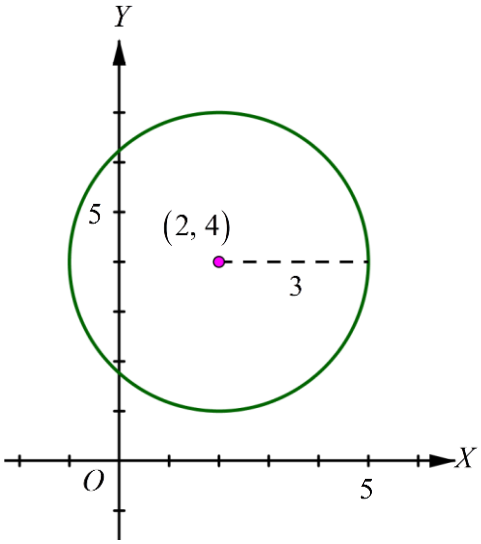
5) สมการวงกลมนี้ คือ $(x-7)^2+(y+3)^2=9$ หรือ $x^2+y^2-14x+6y+49=0$



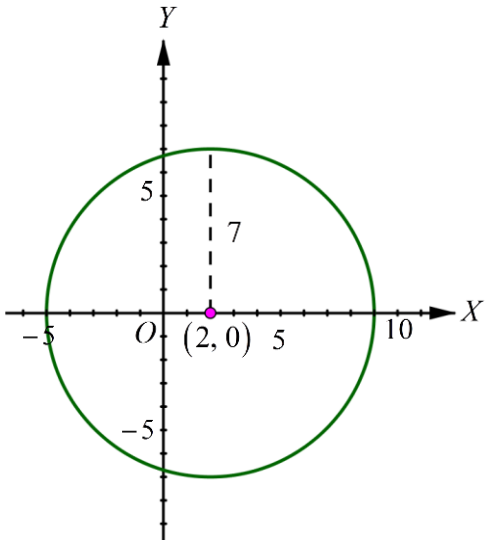
6) สมการวงกลมนี้ คือ $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ หรือ $x^2+y^2-10x-10y+25=0$



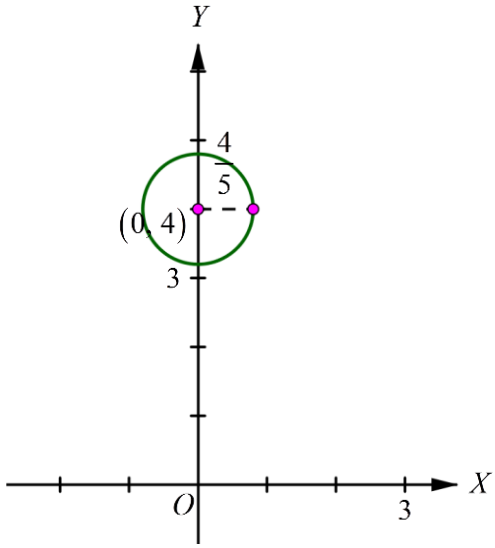
9. 1) วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(2,4)$ และมีรัศมียาว 3 หน่วย



2) วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(2,0)$ และมีรัศมียาว 7 หน่วย

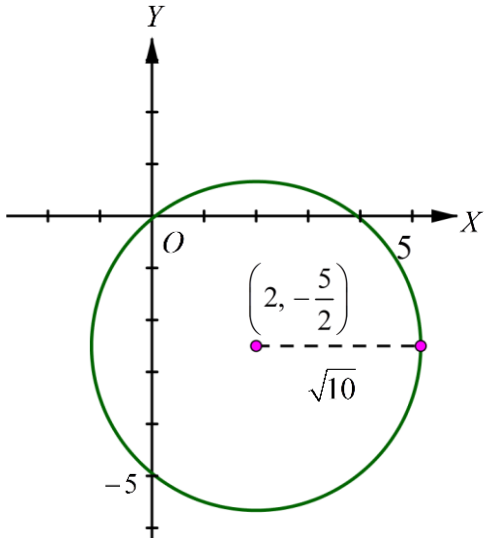


3) วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,4)$ และมีรัศมียาว $\frac{4}{5}$ หน่วย



4) วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\left(2,-\frac{5}{2}\right)$ และมีรัศมียาว $\sqrt{10}$ หน่วย

เขียนวงกลมได้ดังนี้



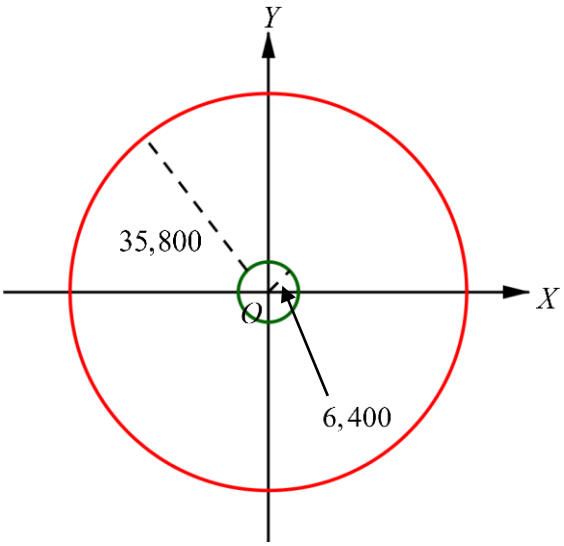
11. $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

12. $\pi(4^2)-\pi(2^2)=12\pi$ ตารางหน่วย

13. $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$ และ $y=\frac{3}{4}x-10$

14. 1) $x^2+y^2=42,200^2$

2) เขียนกราฟได้ดังนี้



หมายเหตุ เส้นสีน้ำเงินแทนโลก และเส้นสีฟ้าแทนวงโคจรของดาวเทียมไทยคม

15. 1) $6-3\sqrt{5}-(-2)=8-3\sqrt{5}$ กิโลเมตร หรือประมาณ 1.29 กิโลเมตร

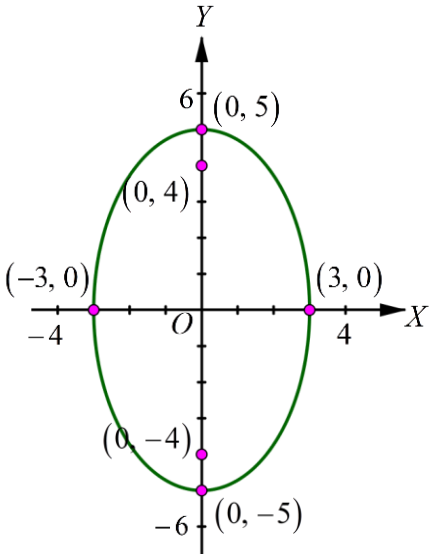
2) $\sqrt{68}-7$ กิโลเมตร หรือประมาณ 1.25 กิโลเมตร

แบบฝึกหัด 3.2.2

1. 1) จุดยอดคือ $(0,-5)$ และ $(0,5)$ โฟกัสของวงรีคือ $(0,-4)$ และ $(0,4)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{4}{5}$ แกนเอกมีความยาว 10 หน่วย

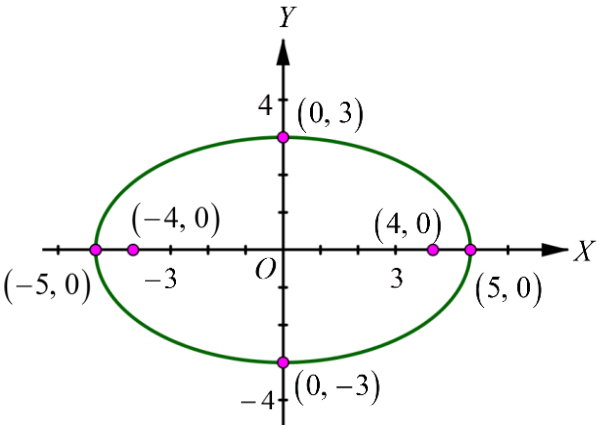
แกนโทมีความยาว 6 หน่วย



2) จุดยอดคือ $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ โฟกัสของวงรีคือ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{4}{5}$ แกนเอกมีความยาว 10 หน่วย

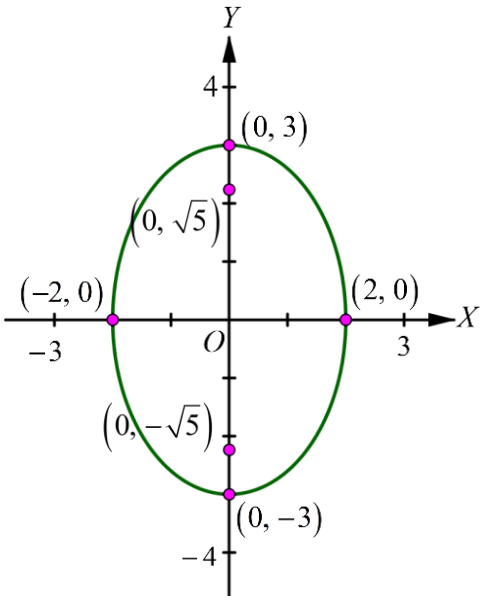
แกนโทมีความยาว 6 หน่วย



3) จุดยอดคือ $(0, -3)$ และ $(0, 3)$ โฟกัสของวงรีคือ $\left(0, -\sqrt{5}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{5}\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ แกนเอกมีความยาว 6 หน่วย

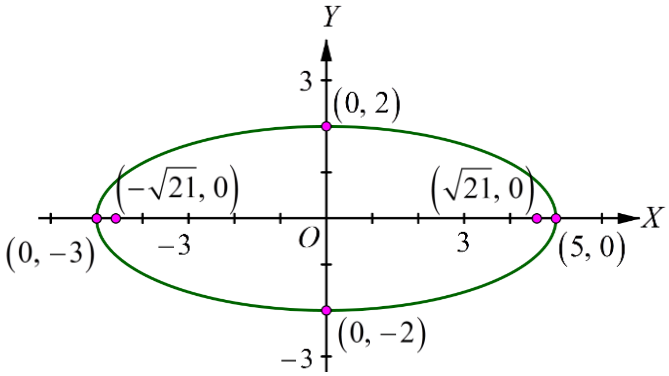
แกนโทมีความยาว 4 หน่วย



4) จุดยอดคือ $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ โฟกัสของวงรีคือ $\left(-\sqrt{21}, 0\right)$ และ $\left(\sqrt{21}, 0\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{21}}{5}$ แกนเอกมีความยาว 10 หน่วย

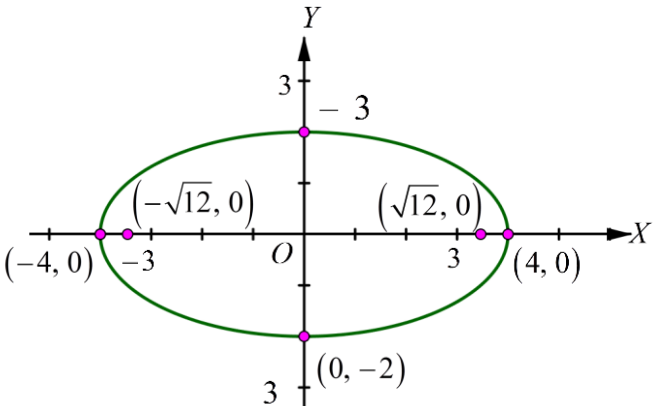
แกนโทมีความยาว 4 หน่วย



5) จุดยอดคือ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$ โฟกัสของวงรีคือ $(-\sqrt{12}, 0)$ และ $(\sqrt{12}, 0)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ แกนเอกมีความยาว 8 หน่วย

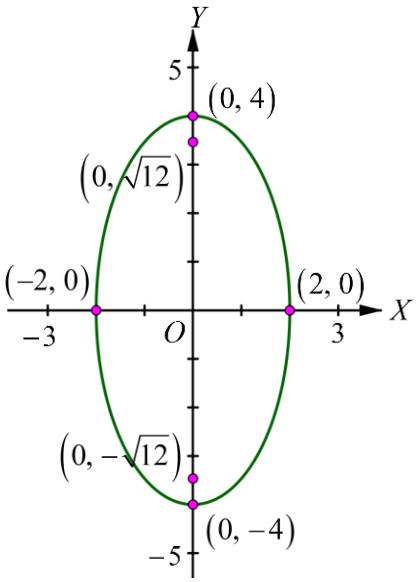
แกนโทมีความยาว 4 หน่วย



6) จุดยอดคือ $(0, -4)$ และ $(0, 4)$ โฟกัสของวงรีคือ $\left(0, -\sqrt{12}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{12}\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ แกนเอกมีความยาว 8 หน่วย

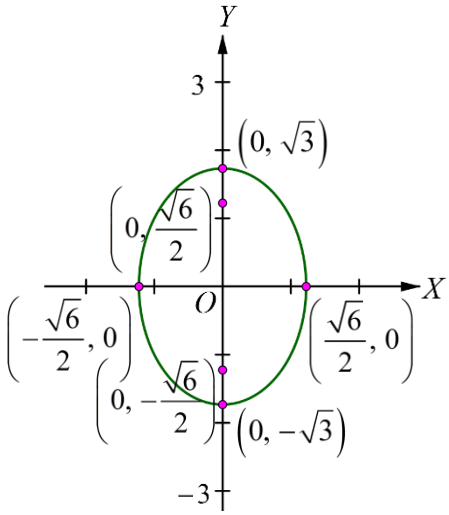
แกนโทมีความยาว 4 หน่วย



7) จุดยอดคือ $\left(0, -\sqrt{3}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{3}\right)$ โฟกัสของวงรีคือ $\left(0, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ แกนเอกมีความยาว $2\sqrt{3}$ หน่วย

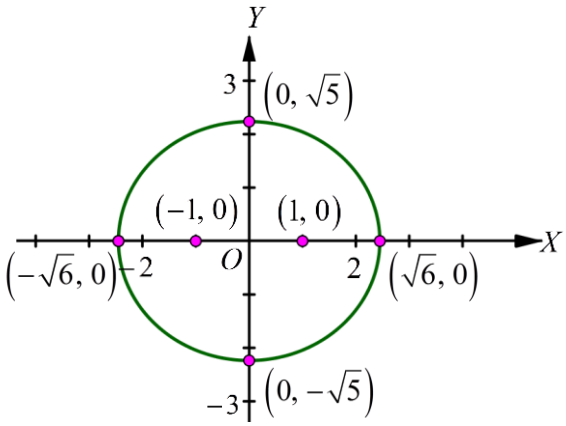
แกนโทมีความยาว $\sqrt{6}$ หน่วย



8) จุดยอดคือ $(-\sqrt{6}, 0)$ และ $(\sqrt{6}, 0)$ โฟกัสของวงรีคือ $(-1, 0)$ และ $(1, 0)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ แกนเอกมีความยาว $2\sqrt{6}$ หน่วย

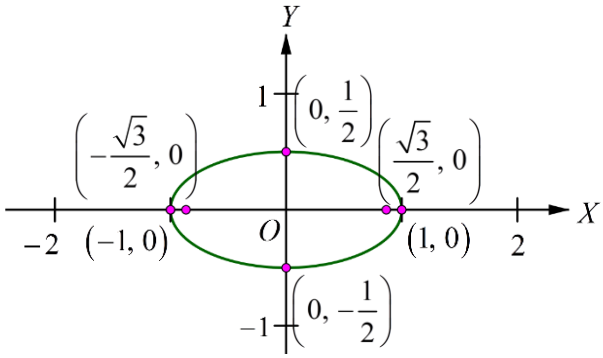
แกนโทมีความยาว $2\sqrt{5}$ หน่วย



9) จุดยอดคือ $(-1, 0)$ และ $(1, 0)$ โฟกัสของวงรีคือ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ แกนเอกมีความยาว 2 หน่วย

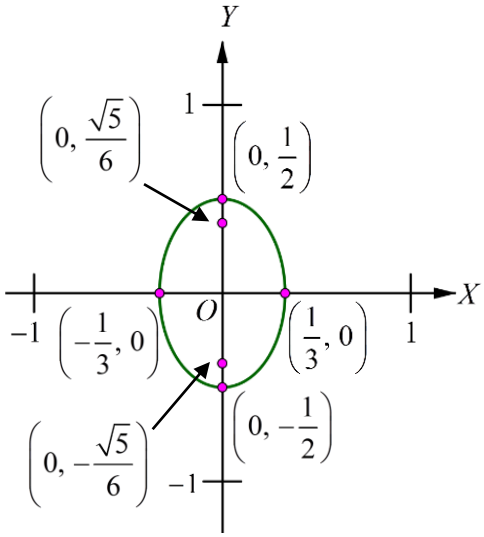
แกนโทมีความยาว 1 หน่วย



10) จุดยอดคือ $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ โฟกัสของวงรีคือ $\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$ และ $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ แกนเอกมีความยาว 1 หน่วย

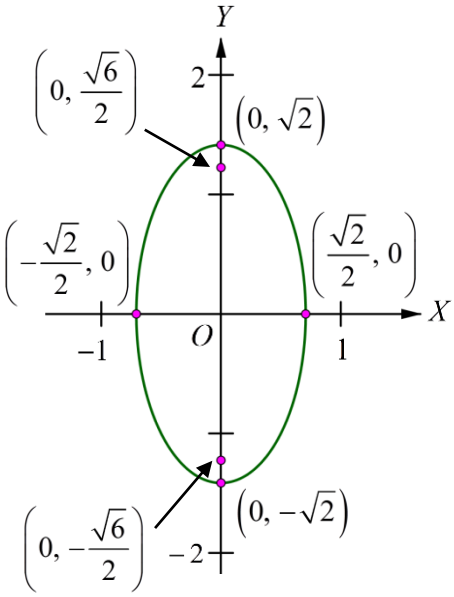
แกนโทมีความยาว $\frac{2}{3}$ หน่วย



11) จุดยอดคือ $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{2}\right)$ โฟกัสของวงรีคือ $\left(0, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ แกนเอกมีความยาว $2\sqrt{2}$ หน่วย

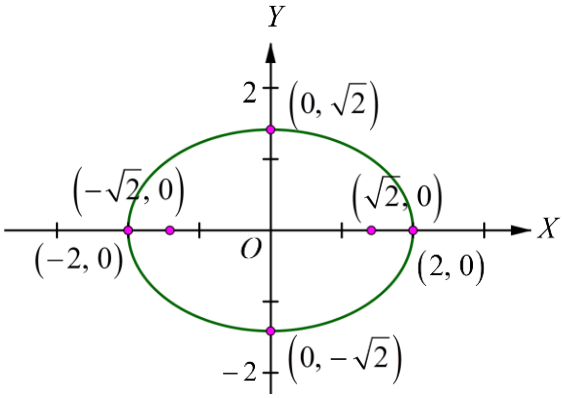
แกนโทมีความยาว $\sqrt{2}$ หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



12) จุดยอดคือ $(-2, 0)$ และ $(2, 0)$ โฟกัสของวงรีคือ $(-\sqrt{2}, 0)$ และ $(\sqrt{2}, 0)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ แกนเอกมีความยาว 4 หน่วย

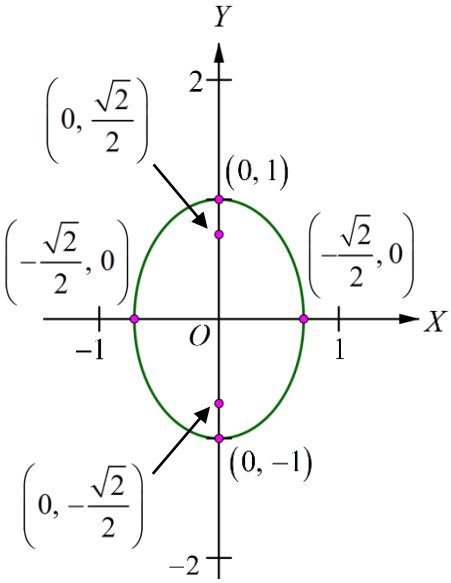
แกนโทมีความยาว $2\sqrt{2}$ หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



13) จุดยอดคือ $(0,-1)$ และ $(0,1)$ โฟกัสของวงรีคือ $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ และ $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ แกนเอกมีความยาว 2 หน่วย

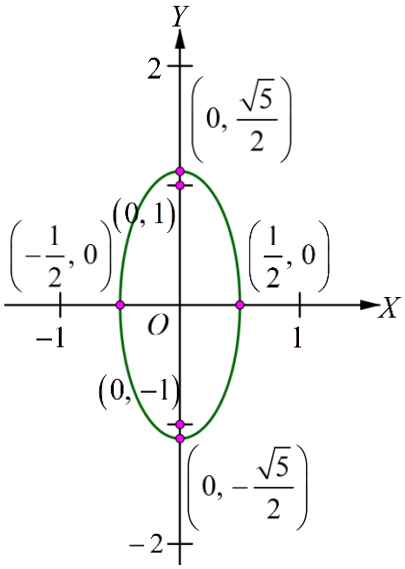
แกนโทมีความยาว $\sqrt{2}$ หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



14) จุดยอดคือ $\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ และ $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ โฟกัสของวงรีคือ $(0,-1)$ และ $(0,1)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ แกนเอกมีความยาว $\sqrt{5}$ หน่วย

แกนโทมีความยาว 1 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



2. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$

   3) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$ 4) $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{48}=1$

3. 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

   3) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 4) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

   5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{13}=1$ 6) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$

   7) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{91}=1$ 8) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

   9) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{5}=1$ 10) $\frac{x^2}{320}+\frac{y^2}{324}=1$

   11) $\frac{64x^2}{225}+\frac{64y^2}{81}=1$ 12) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

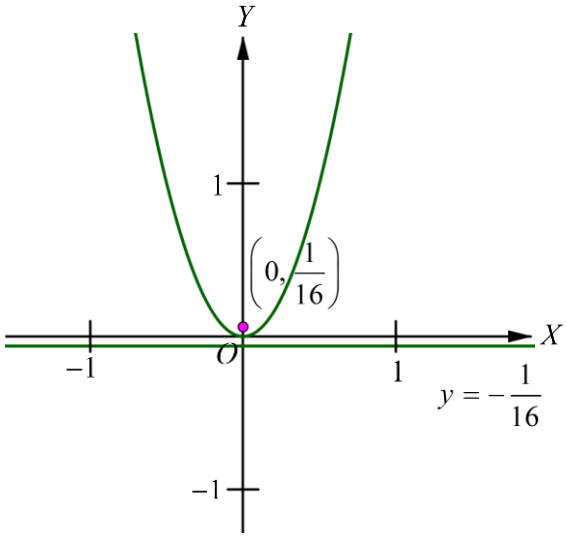
4. $\frac{x^2}{2.25\times10^{16}}+\frac{y^2}{2.2491\times10^{16}}=1$

5. $(5.16+1.29)\times10^9 = 6.45\times10^9$ กิโลเมตร

แบบฝึกหัด 3.2.3

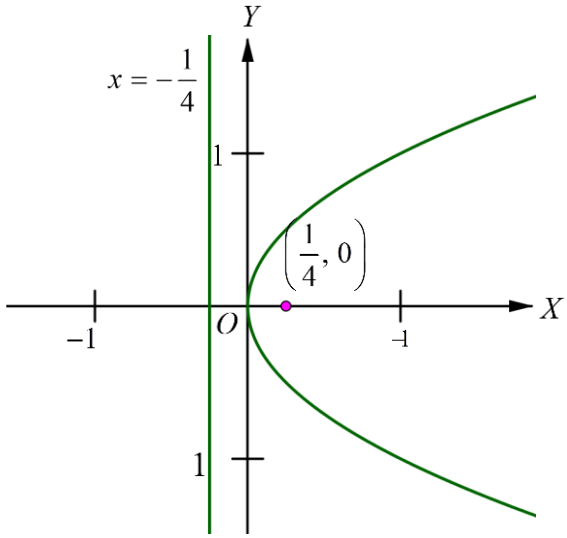
1. 1) โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(0, \frac{1}{16}\right)$ ไดเรกตริกซ์คือ $y = -\frac{1}{16}$

เลตัสเรกตัมยาว $\frac{1}{4}$ หน่วย



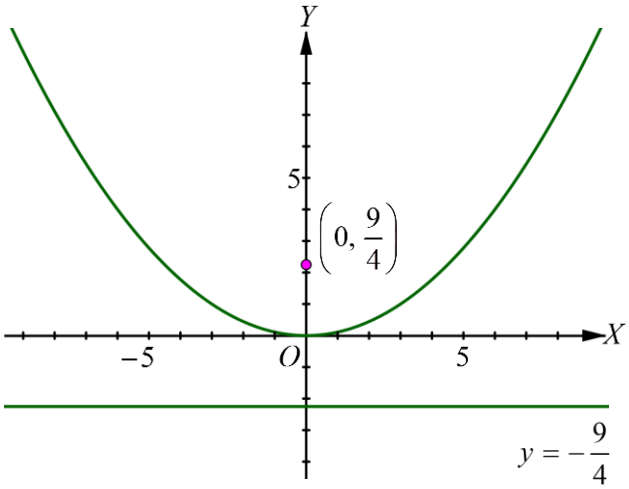
2) โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ ไดเรกตริกซ์คือ $x = -\frac{1}{4}$

เลตัสเรกตัมยาว 1 หน่วย



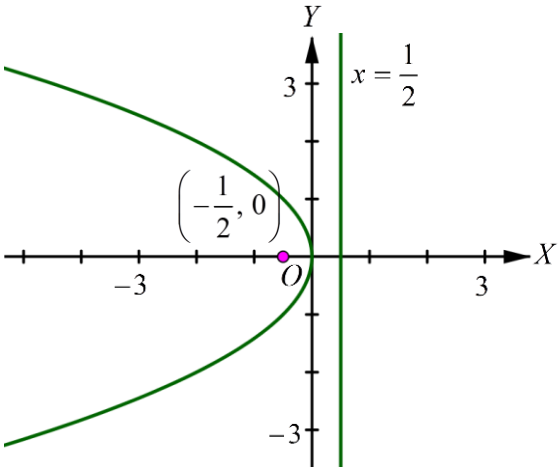
3) โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ ไดเรกตริกซ์คือ $y = -\frac{9}{4}$

เลตัสเรกตัมยาว 9 หน่วย



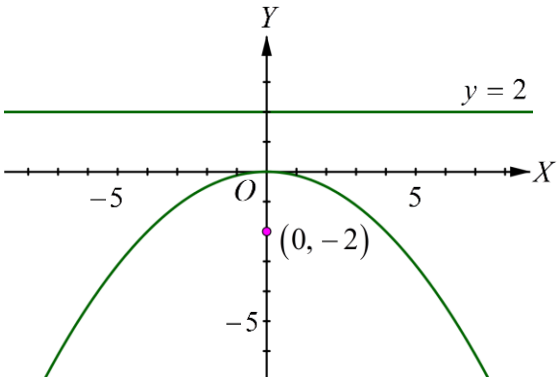
4) โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ไดเรกตริกซ์คือ $x = \frac{1}{2}$

เลตัสเรกตัมยาว 2 หน่วย



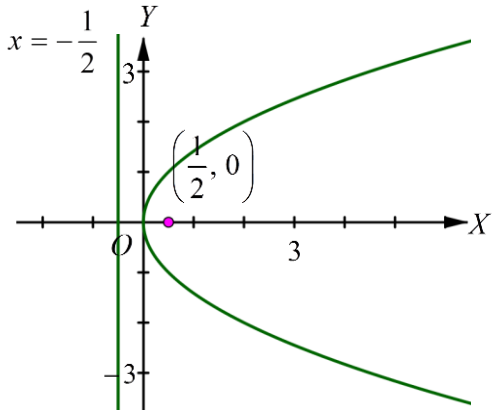
5) โฟกัสของพาราโบลาคือ $(0, -2)$ ไดเรกตริกซ์คือ $y = 2$

เลตัสเรกตัมยาว 8 หน่วย



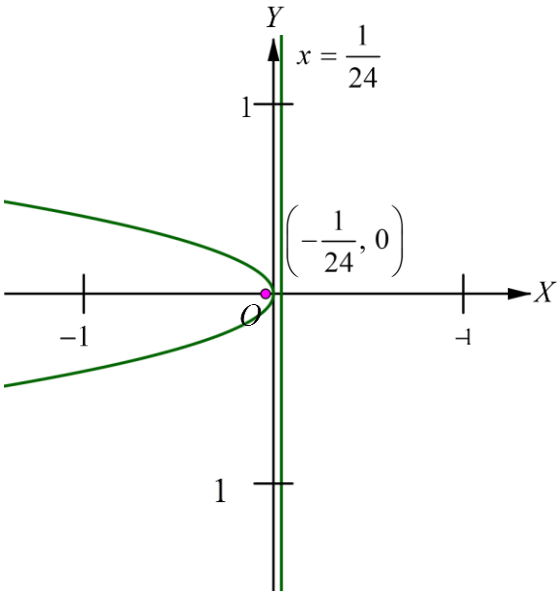
6) โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ไดเรกตริกซ์คือ $x = -\frac{1}{2}$

เลตัสเรกตัมยาว 2 หน่วย



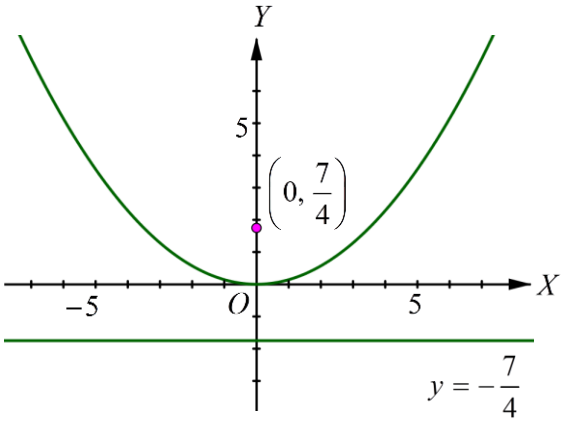
7) โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(-\frac{1}{24}, 0\right)$ ไดเรกตริกซ์คือ $x = \frac{1}{24}$

เลตัสเรกตัมยาว $\frac{1}{6}$ หน่วย



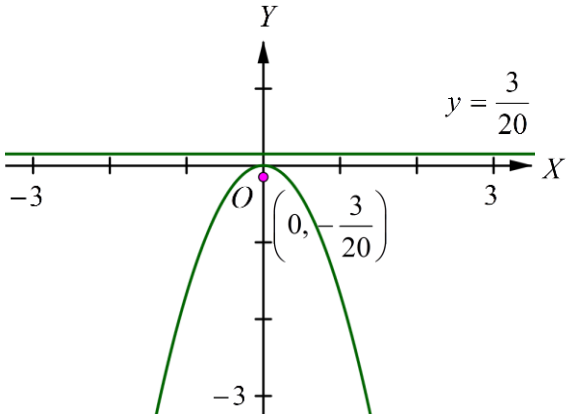
8) โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(0, \frac{7}{4}\right)$ ไดเรกตริกซ์คือ $y = -\frac{7}{4}$

เลตัสเรกตัมยาว 7 หน่วย



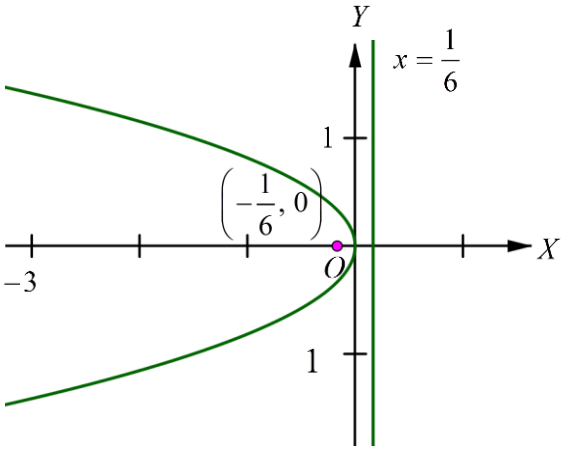
9) โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(0, -\frac{3}{20}\right)$ ไดเรกตริกซ์คือ $y = \frac{3}{20}$

เลตัสเรกตัมยาว $\frac{3}{5}$ หน่วย



10) โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$ ไดเรกตริกซ์คือ $x = \frac{1}{6}$

เลตัสเรกตัมยาว $\frac{2}{3}$ หน่วย



2. 1) $y^2 = 8x$ 2) $y^2 = -2x$

3) $x^2 = -32y$ 4) $x^2 = 20y$

5) $x^2 = -8y$ 6) $y^2 = -24x$

7) $y^2 = 40x$ 8) $x^2 = 2y$

9) $y^2 = 4x$ 10) $x^2 = -24y$

11) $x^2 = 32y$ 12) $x^2 = -8y$

3. 1) $x^2 = -12y$ 2) $y^2 = 8x$

3) $y^2 = -8x$ 4) $x^2 = 4y$

5) $y^2 = 8x$ 6) $x^2 = -16y$

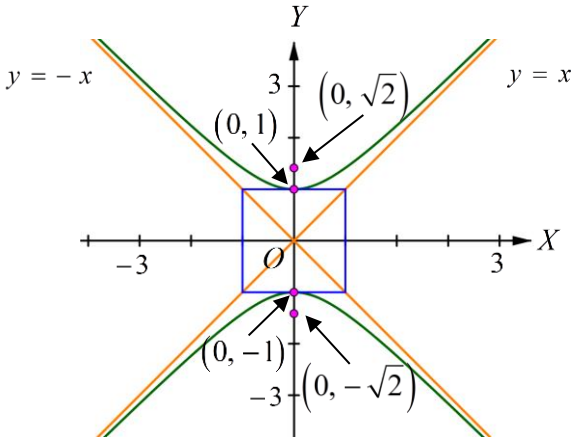
4. 1) $x^2 = 15y$

2) ควรติดตั้งอุปกรณ์รวมสัญญาณไว้ที่โฟกัส คือ $\left(0, \frac{15}{4}\right)$ ซึ่งห่างจากจุดยอดไปทางด้านบน $\frac{15}{4}$ หน่วย

แบบฝึกหัด 3.2.4

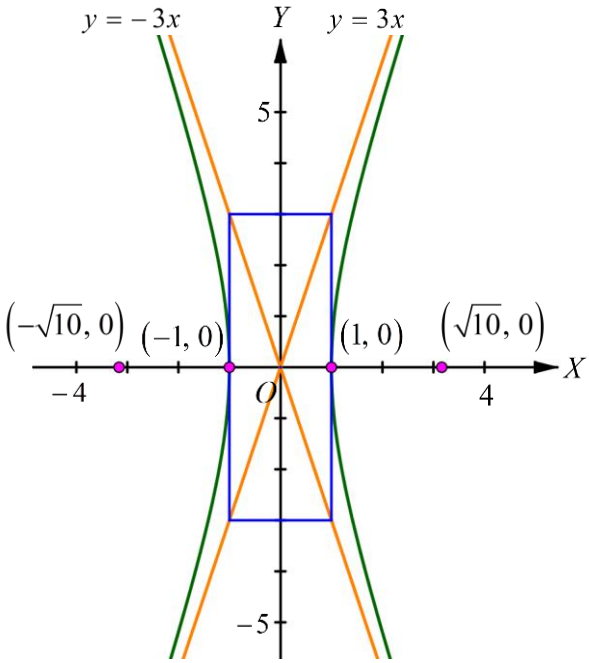
1. 1) จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -1)$ และ $(0, 1)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{2}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm x$



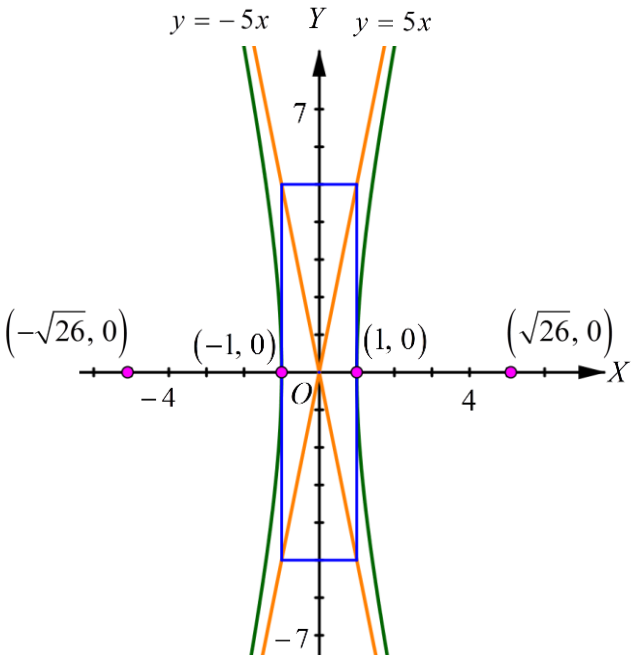
2) จุดยอดอยู่ที่จุด $(-1, 0)$ และ $(1, 0)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(-\sqrt{10}, 0\right)$ และ $\left(\sqrt{10}, 0\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm 3x$



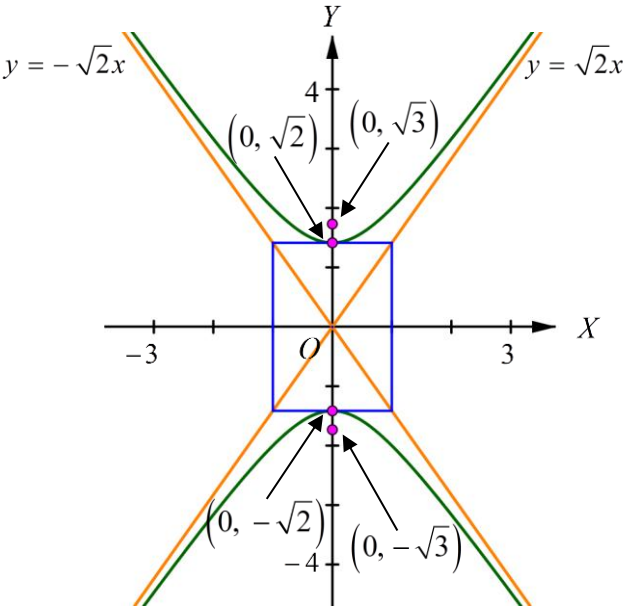
3) จุดยอดอยู่ที่จุด $(-1, 0)$ และ $(1, 0)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(-\sqrt{26}, 0\right)$ และ $\left(\sqrt{26}, 0\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm 5x$

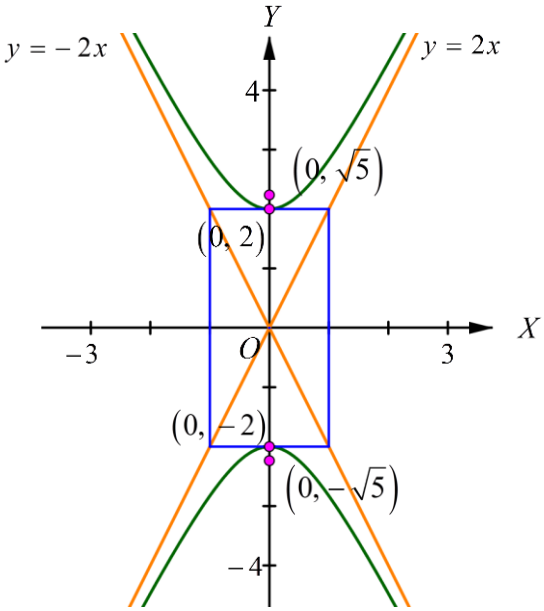


4) จุดยอดอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{2}\right)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{3}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{3}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\sqrt{2}x$

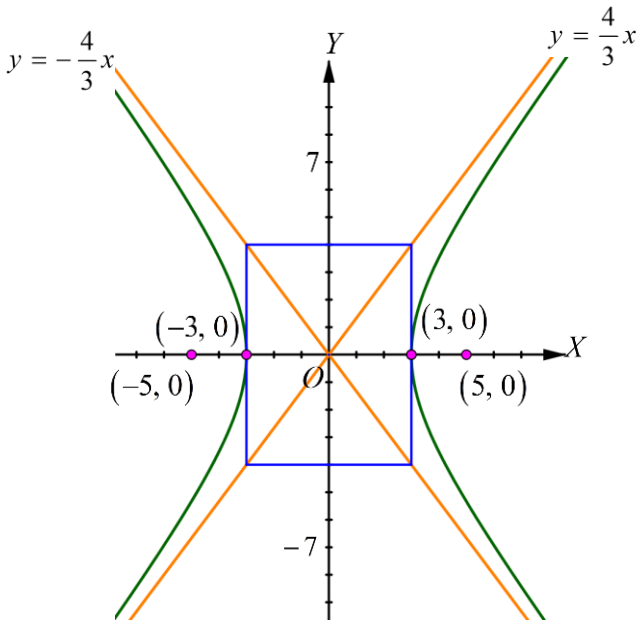


5) จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -2)$ และ $(0, 2)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, -\sqrt{5})$ และ $(0, \sqrt{5})$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm 2x$



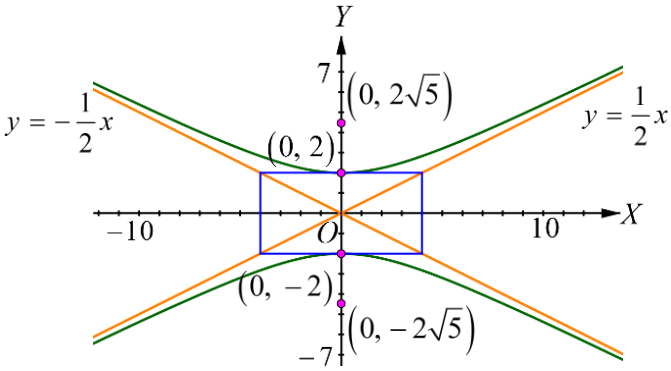
6) จุดยอดอยู่ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{4}{3}x$



7) จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -2)$ และ $(0, 2)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, -2\sqrt{5})$ และ $(0, 2\sqrt{5})$

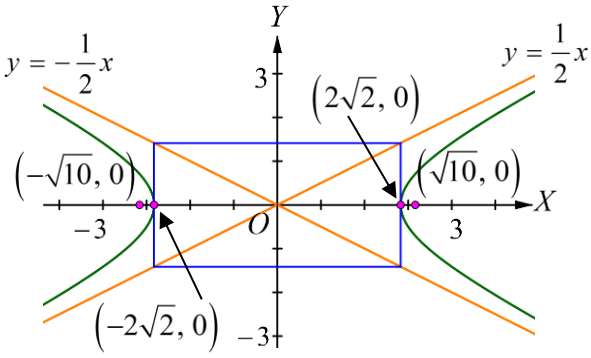
เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{1}{2}x$



8) จุดยอดอยู่ที่จุด $(-2\sqrt{2}, 0)$ และ $(2\sqrt{2}, 0)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $(-\sqrt{10}, 0)$ และ $(\sqrt{10}, 0)$

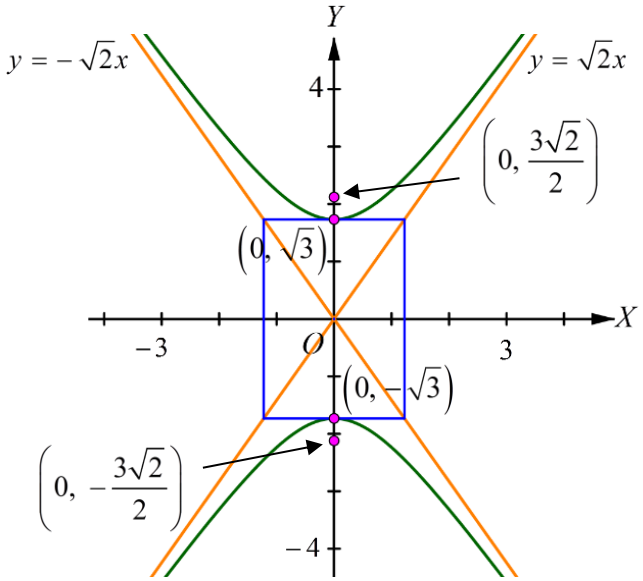
เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{1}{2}x$



9) จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -\sqrt{3})$ และ $(0, \sqrt{3})$

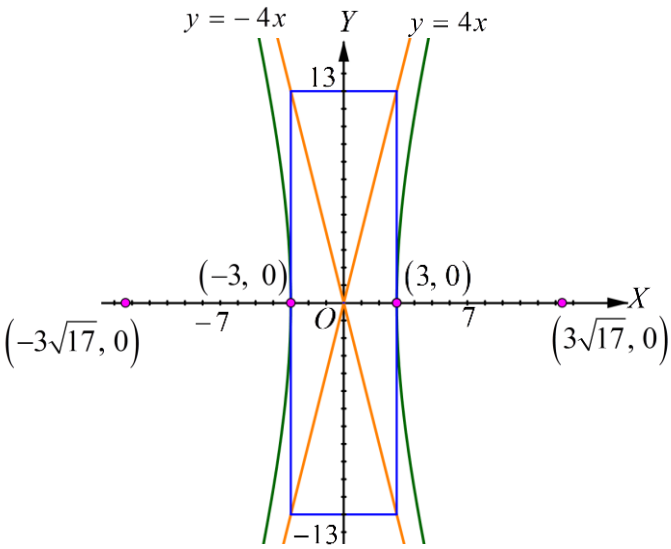
โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\sqrt{2}x$



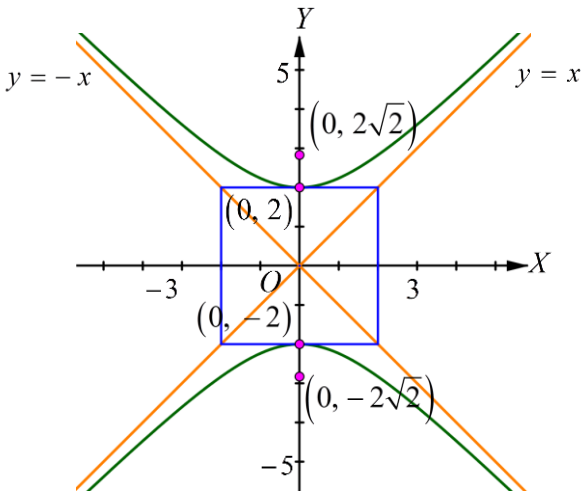
10) จุดยอดอยู่ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(-3\sqrt{17}, 0\right)$ และ $\left(3\sqrt{17}, 0\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm 4x$



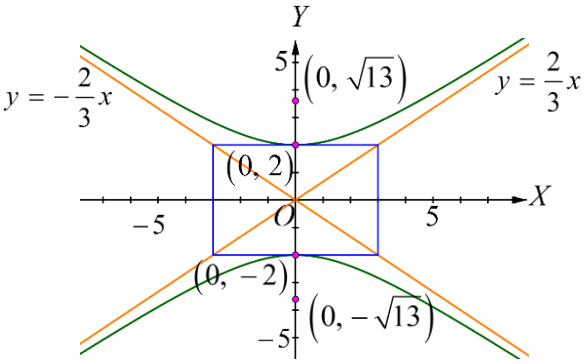
11) จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -2)$ และ $(0, 2)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -2\sqrt{2}\right)$ และ $\left(0, 2\sqrt{2}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm x$



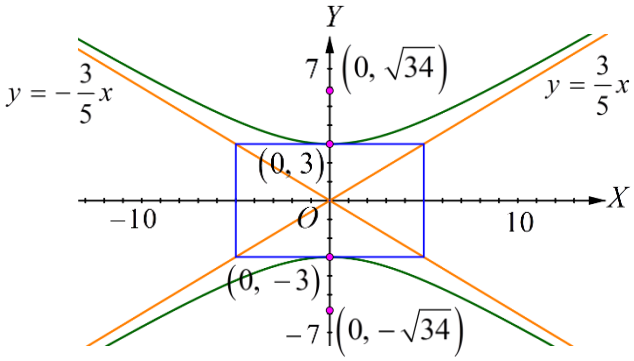
12) จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -2)$ และ $(0, 2)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{13}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{13}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm \frac{2}{3}x$



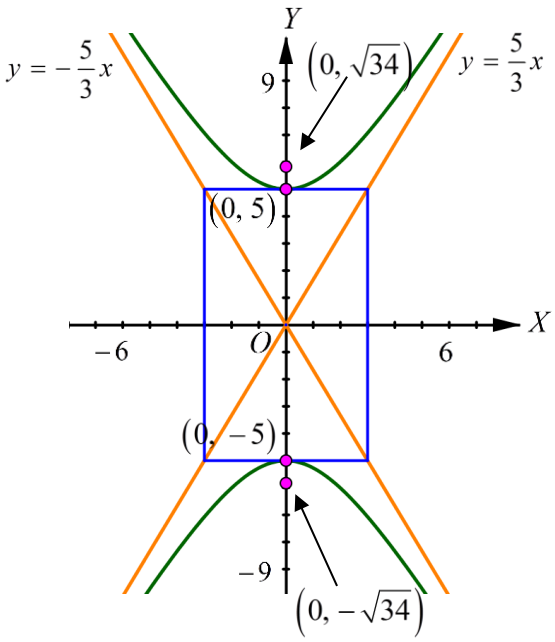
13) จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -3)$ และ $(0, 3)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{34}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{34}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm \frac{3}{5}x$



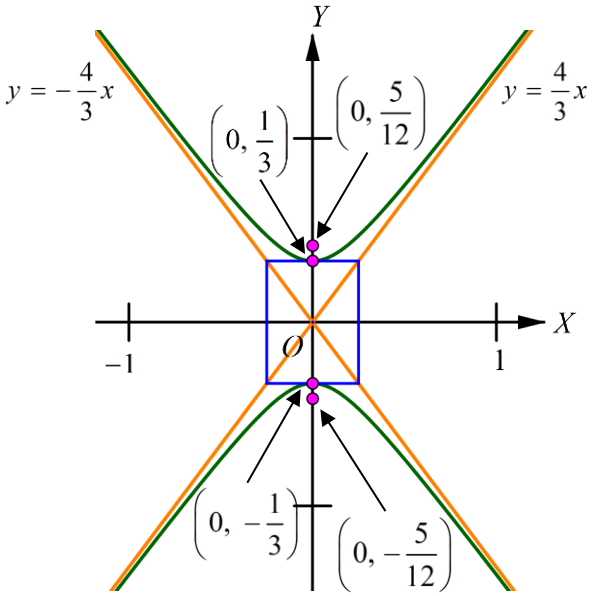
14) จุดยอดอยู่ที่จุด $(0,-5)$ และ $(0,5)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0,-\sqrt{34}\right)$ และ $\left(0,\sqrt{34}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm\frac{5}{3}x$



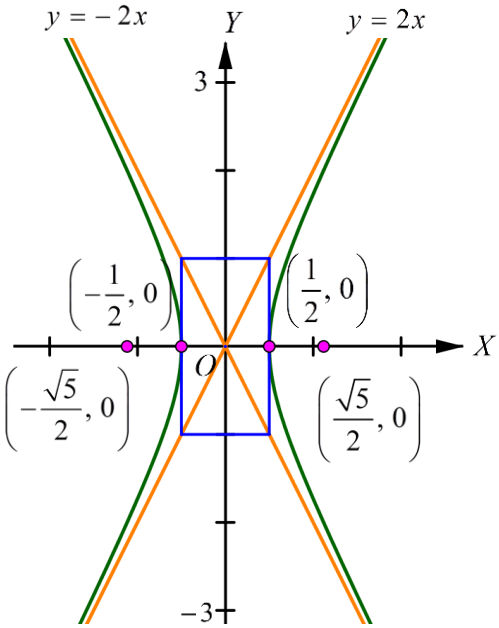
15) จุดยอดอยู่ที่จุด $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ และ $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0,-\frac{5}{12}\right)$ และ $\left(0,\frac{5}{12}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm\frac{4}{3}x$



16) จุดยอดอยู่ที่จุด $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm 2x$



2. 1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 2) $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$

3) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1$ 4) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{48} = 1$

5) $\frac{x^2}{9} - \frac{4y^2}{9} = 1$ 6) $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$

3. 1) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ 2) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

3) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 4) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$

5) $x^2 - \frac{y^2}{25} = 1$ 6) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{324} = 1$

7) $\frac{5y^2}{64} - \frac{5x^2}{256} = 1$ 8) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{20} = 1$

9) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$ 10) $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$

11) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 12) $4y^2-\frac{4x^2}{3}=1$

5. $\frac{2x^2}{c^2}-\frac{2y^2}{c^2}=1$

6. ตัวอย่างคำตอบ $x^2-\frac{y^2}{25}=1$ เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ซึ่ง $a=1$ และ $b=5$

นั่นคือ $a<b$

7. เมื่อ k เพิ่มขึ้นในช่วง $(0,\infty)$ กิ่งของไฮเพอร์โบลาจะขยับเข้าหาแกน Y

นั่นคือ ไฮเพอร์โบลาจะยิ่งกางมากขึ้นเรื่อย ๆ ตามค่า k ที่เพิ่มขึ้น

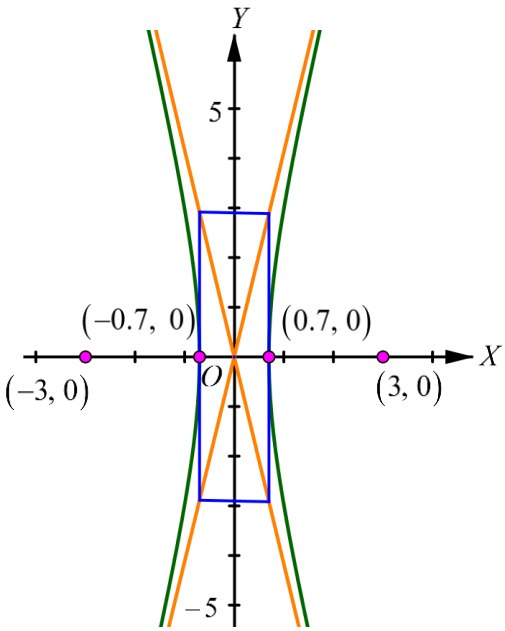
8. $\frac{x^2}{\left(4.83\times10^9\right)^2}-\frac{y^2}{\left(4.83\times10^9\right)^2}=1$ หรือ $\frac{x^2}{23.33\times10^{18}}-\frac{y^2}{23.33\times10^{18}}=1$

9. $2\times\frac{\sqrt{13}}{6}=\frac{\sqrt{13}}{3}\approx1.2$ เมตร

10. $\frac{x^2}{625}-\frac{y^2}{1875}=1$

11. 1) $\frac{x^2}{0.49}-\frac{y^2}{8.51}=1$

2)



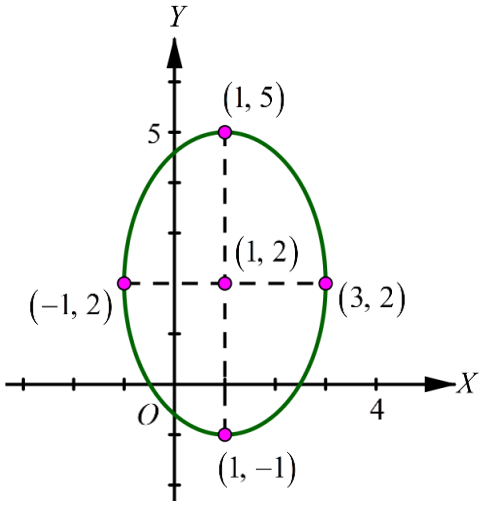
และหน่วยย่อยของเจ้าหน้าที่ป่าไม้ทั้งสองอยู่ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$

แบบฝึกหัด 3.2.5

1. 1) จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 2)$ โฟกัส คือ $\left(1, 2 \pm \sqrt{5}\right)$

จุดยอด คือ $(1, -1)$ และ $(1, 5)$ แกนเอกยาว 6 หน่วย

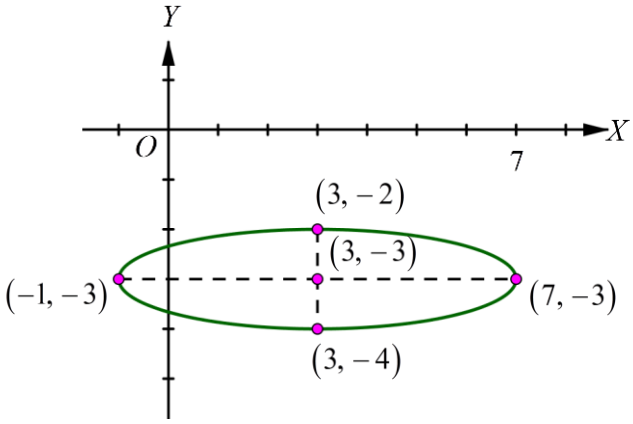
แกนโทยาว 4 หน่วย



2) จุดศูนย์กลาง คือ $(3, -3)$ โฟกัส คือ $\left(3 \pm \sqrt{15},\ -3\right)$

จุดยอด คือ $(-1, -3)$ และ $(7, -3)$ แกนเอกยาว 8 หน่วย

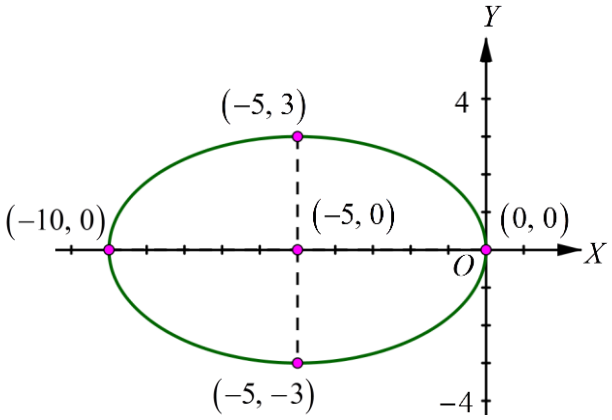
แกนโทยาว 2 หน่วย



3) จุดศูนย์กลาง คือ $(-5, 0)$ โฟกัส คือ $(-9, 0)$ และ $(-1, 0)$

จุดยอด คือ $(-10, 0)$ และ $(0, 0)$ แกนเอกยาว 10 หน่วย

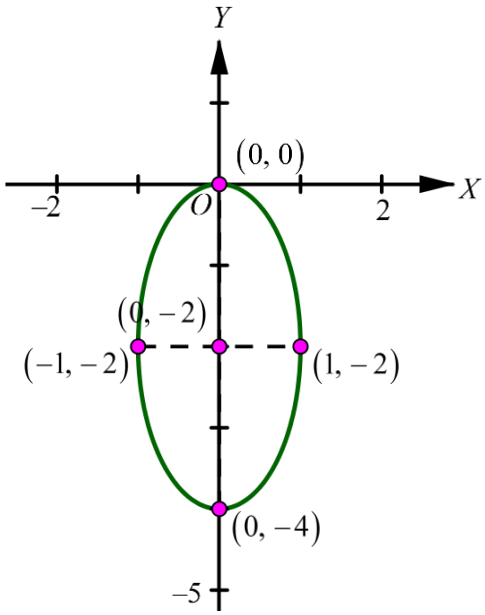
แกนโทยาว 6 หน่วย



4) จุดศูนย์กลาง คือ $(0, -2)$ โฟกัส คือ $\left(0, -2 \pm \sqrt{3}\right)$

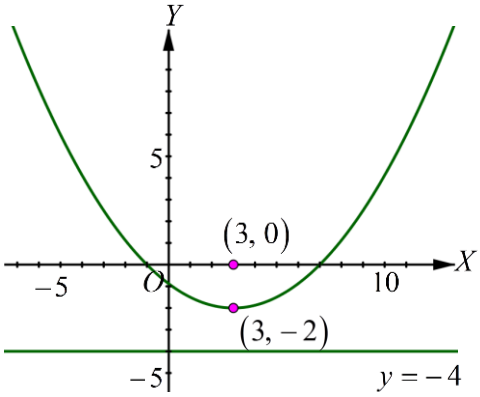
จุดยอด คือ $(0, -4)$ และ $(0, 0)$ แกนเอกยาว 4 หน่วย

แกนโทยาว 2 หน่วย



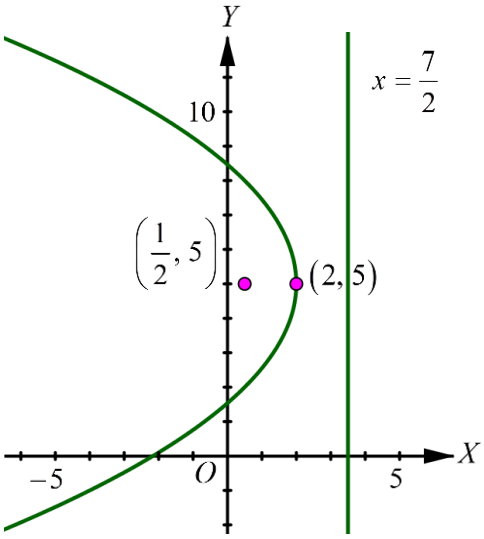
2. 1) จุดยอด คือ $(3, -2)$ โฟกัส คือ $(3, 0)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y = -4$



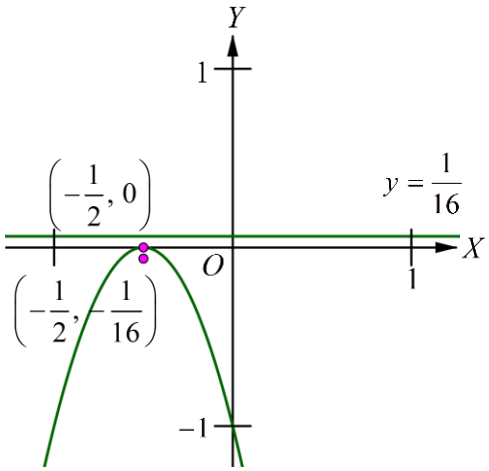
2) จุดยอด คือ $(2, 5)$ โฟกัส คือ $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x = \frac{7}{2}$



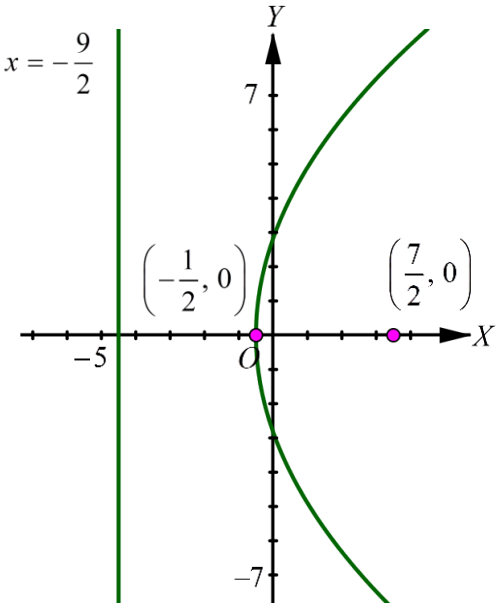
3) จุดยอด คือ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ โฟกัส คือ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y = \frac{1}{16}$



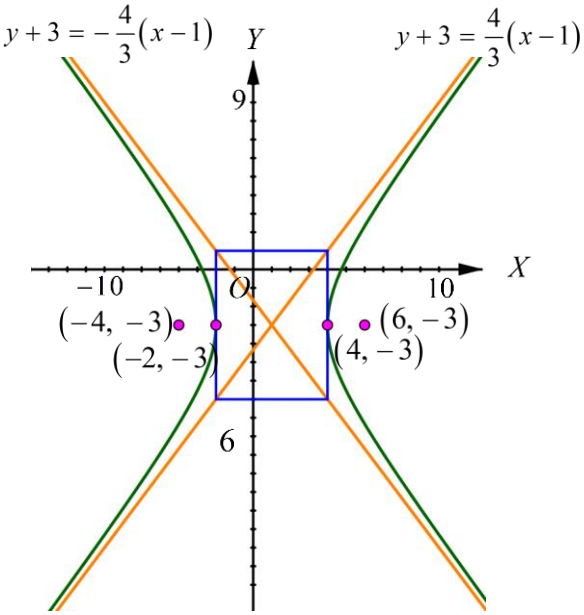
4) จุดยอด คือ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ โฟกัส คือ $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x = -\frac{9}{2}$



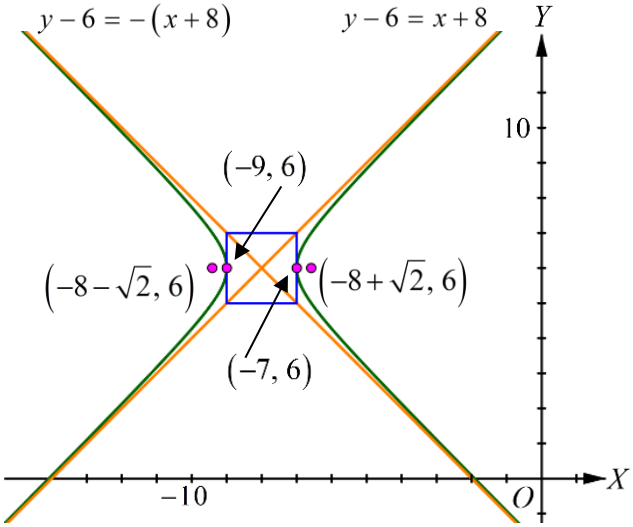
3. 1) จุดศูนย์กลาง คือ $(1, -3)$ โฟกัส คือ $(-4, -3)$ และ $(6, -3)$

จุดยอด คือ $(-2, -3)$ และ $(4, -3)$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y+3 = \pm\frac{4}{3}(x-1)$



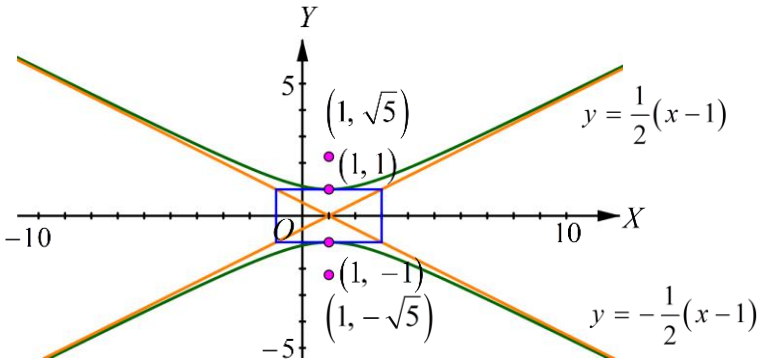
2) จุดศูนย์กลาง คือ $(-8, 6)$ โฟกัส คือ $\left(-8-\sqrt{2}, 6\right)$ และ $\left(-8+\sqrt{2}, 6\right)$

จุดยอด คือ $(-9, 6)$ และ $(-7, 6)$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y-6=\pm(x+8)$



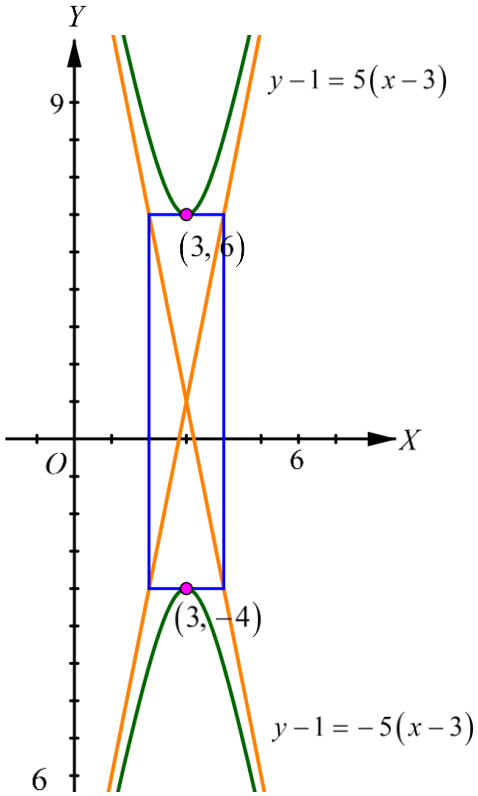
3) จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 0)$ โฟกัส คือ $\left(1, -\sqrt{5}\right)$ และ $\left(1, \sqrt{5}\right)$

จุดยอด คือ $(1, -1)$ และ $(1, 1)$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm\frac{1}{2}(x-1)$



4) จุดศูนย์กลาง คือ $(3, 1)$ โฟกัส คือ $\left(3, 1-\sqrt{26}\right)$ และ $\left(3, 1+\sqrt{26}\right)$

จุดยอด คือ $(3, -4)$ และ $(3, 6)$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y-1=\pm 5(x-3)$



4. 1) $x^2=-\frac{1}{4}(y-4)$ หรือ $4x^2+y-c=0$

2) $y^2=24(x+6)$ หรือ $y^2=24x+144$

3) $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

4) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

5) $(y-1)^2-x^2=1$

6) $\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{3y^2}{16}=1$

5. 1) จุดศูนย์กลางของวงรีนี้ คือ $(-1,-1)$

ความยาวของแกนเอก 8 หน่วย และความยาวของแกนโท 4 หน่วย

2) ต้องเลื่อนขนานกราฟ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ไปทางซ้าย 1 หน่วย

และเลื่อนลงข้างล่าง 1 หน่วย

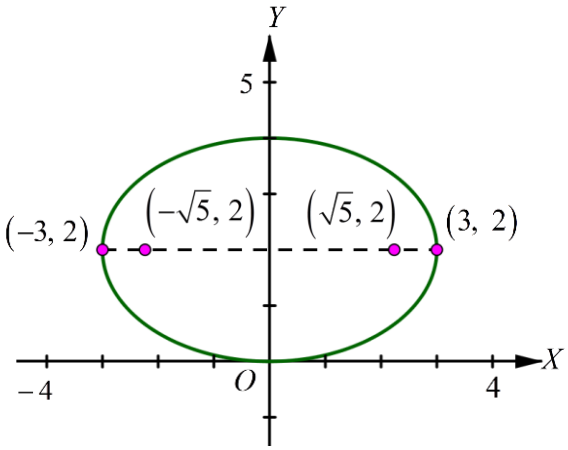
3) $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

6. 1) สมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 2)$ จุดยอด คือ $(-3, 2)$ และ $(3, 2)$

โฟกัส คือ $(-\sqrt{5}, 2)$ และ $(\sqrt{5}, 2)$ แกนเอกยาว 6 หน่วย

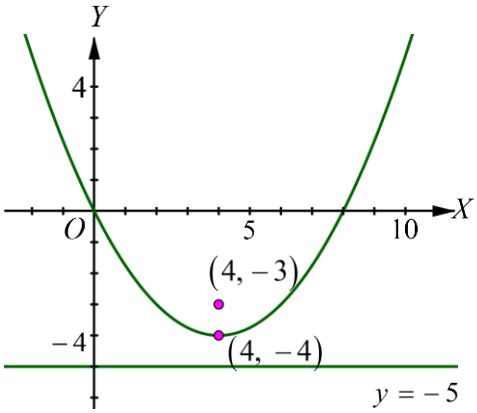
แกนโทยาว 4 หน่วย



2) สมการนี้เป็นสมการพาราโบลาที่เส้นโค้งหงายขึ้น

จุดยอด คือ $(4, -4)$ โฟกัส คือ $(4, -3)$

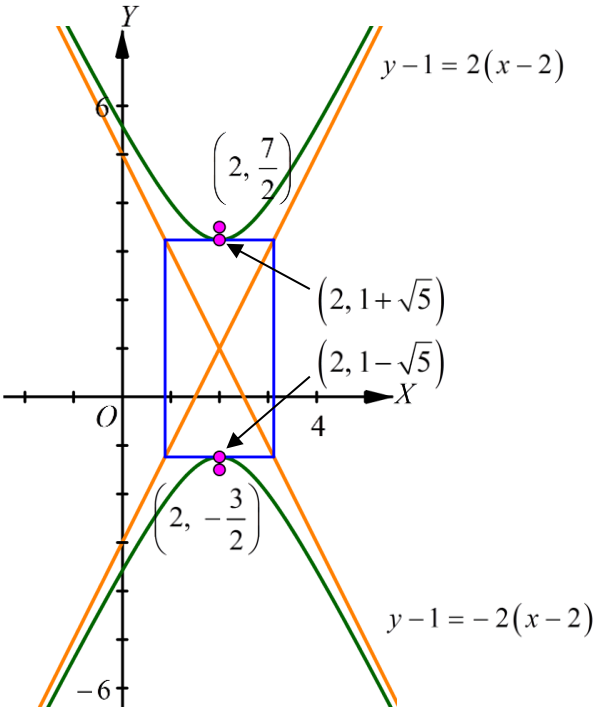
ไดเรกตริกซ์ คือ $y = -5$



3) สมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

จุดศูนย์กลาง คือ $(2, 1)$ จุดยอด คือ $(2, 1-\sqrt{5})$ และ $(2, 1+\sqrt{5})$

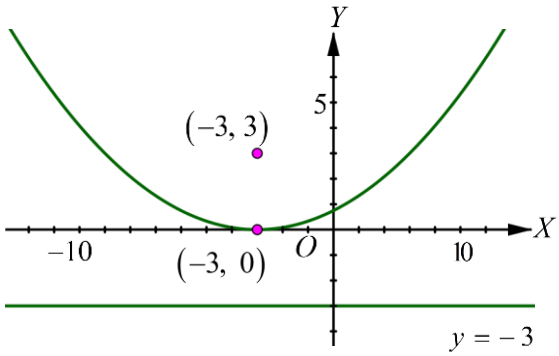
โฟกัส คือ $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ และ $\left(2, \frac{7}{2}\right)$ เส้นกำกับ คือ $y-1 = \pm 2(x-2)$



4) สมการพาราโบลาที่เส้นโค้งหงายขึ้น

จุดยอด คือ $(-3, 0)$ โฟกัส คือ $(-3, 3)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y=-3$

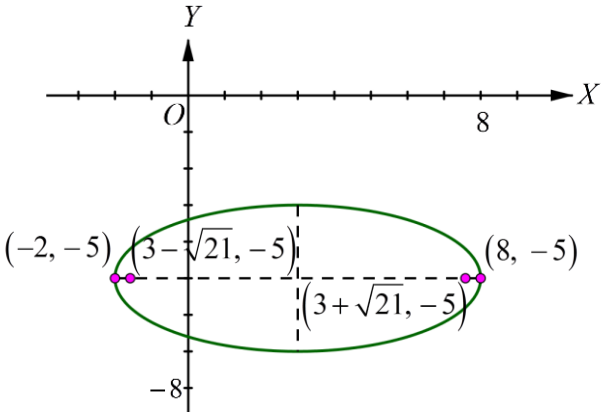


5) สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลาง คือ $(3, -5)$ จุดยอด คือ $(-2, -5)$ และ $(8, -5)$

โฟกัส คือ $\left(3-\sqrt{21}, -5\right)$ และ $\left(3+\sqrt{21}, -5\right)$

แกนเอกยาว 10 หน่วย แกนโทยาว 4 หน่วย

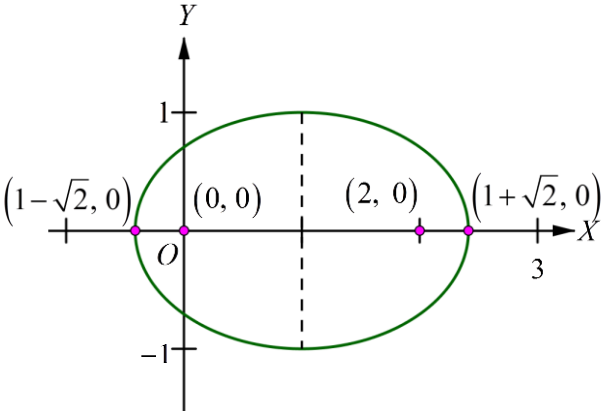


6) สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 0)$ จุดยอด คือ $\left(1-\sqrt{2}, 0\right)$ และ $\left(1+\sqrt{2}, 0\right)$

โฟกัส คือ $(0, 0)$ และ $(2, 0)$ แกนเอกยาว $2\sqrt{2}$ หน่วย

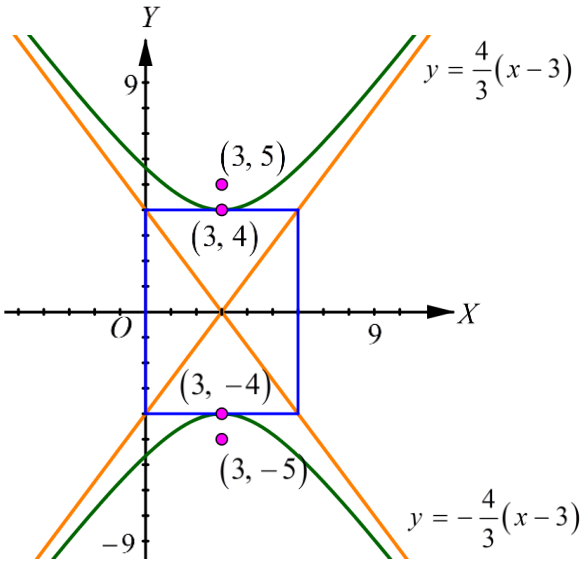
แกนโทยาว 2 หน่วย



7) สมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

จุดศูนย์กลาง คือ $(3, 0)$ จุดยอด คือ $(3, -4)$ และ $(3, 4)$

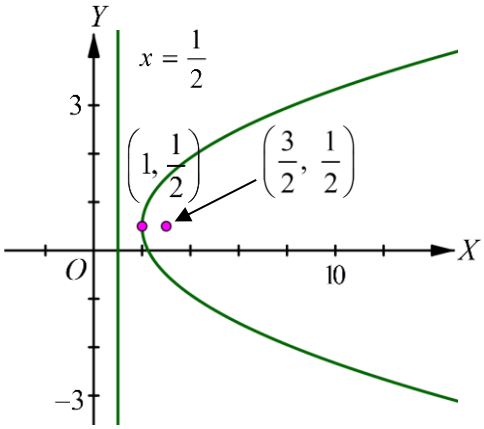
โฟกัส คือ $(3, -5)$ และ $(3, 5)$ เส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{4}{3}(x-3)$



8) สมการพาราโบลาที่เส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา

จุดยอด คือ $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ โฟกัส คือ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

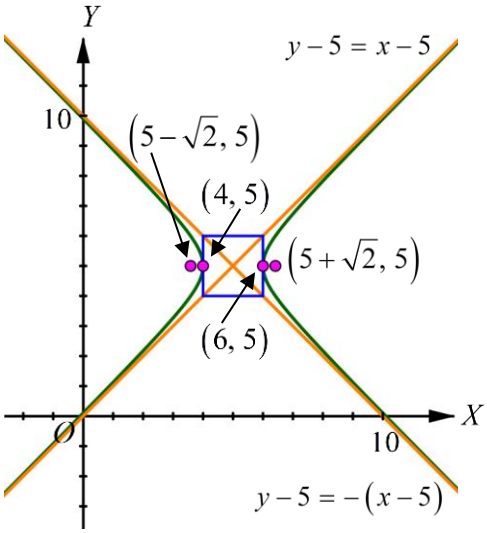
ไดเรกตริกซ์ คือ $x = \frac{1}{2}$



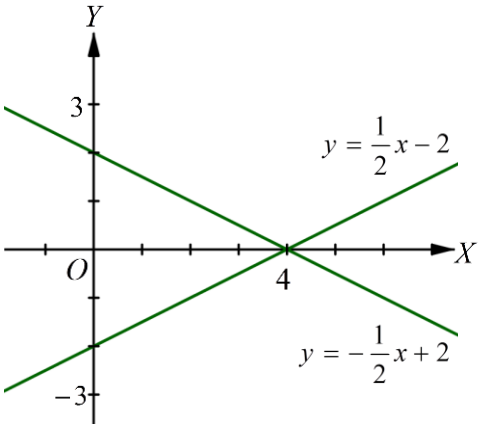
9) สมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลาง คือ $(5, 5)$ จุดยอด คือ $(4, 5)$ และ $(6, 5)$

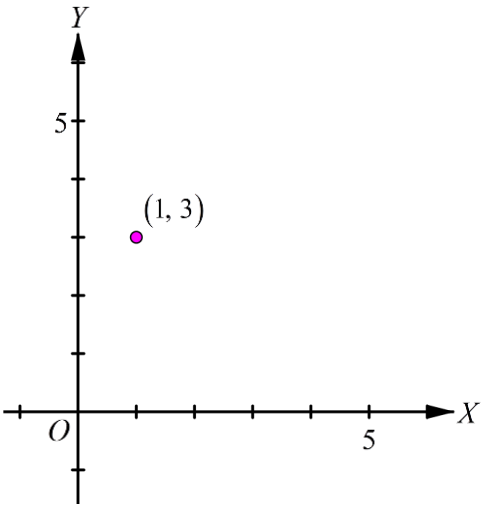
โฟกัส คือ $\left(5-\sqrt{2}, 5\right)$ และ $\left(5+\sqrt{2}, 5\right)$ เส้นกำกับ คือ $y-5=\pm(x-5)$



10) สมการดังกล่าวเป็นสมการของเส้นตรงสองเส้น ดังนี้

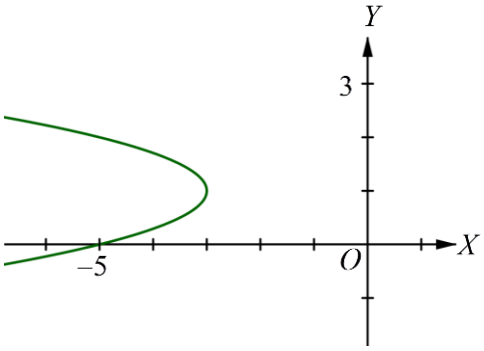


11) สมการดังกล่าวแทนจุด $(1, 3)$ เพียงจุดเดียว

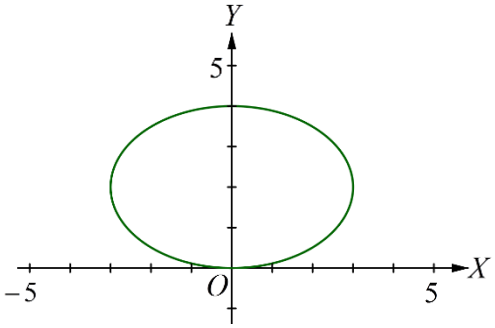


12) สมการนี้ไม่มีกราฟในระนาบจำนวนจริง

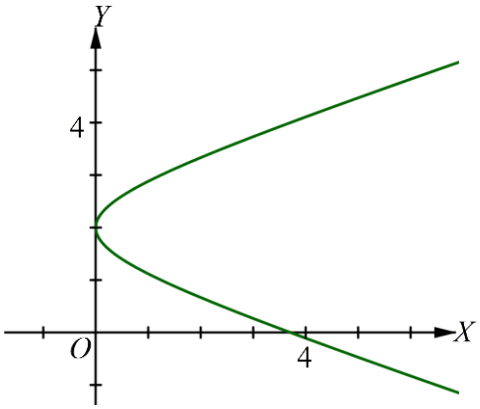
7. 1)



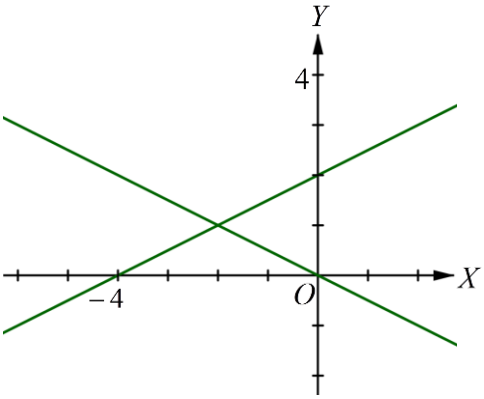
2)



3)



4)



8. 1) $F < 17$ 2) $F = 17$

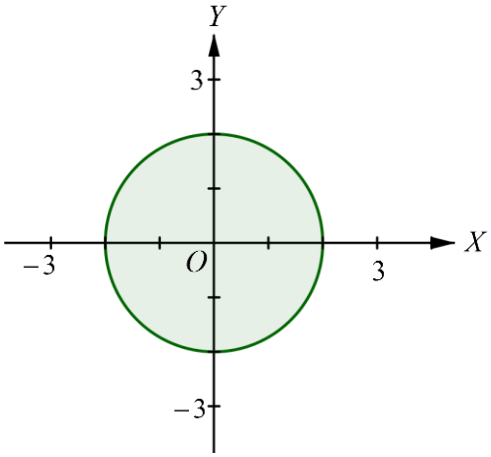
3) $F > 17$

9. $\dfrac{\left(x-\frac{399}{8}\right)^2}{\left(\frac{401}{8}\right)^2}+\dfrac{y^2}{25}=1$

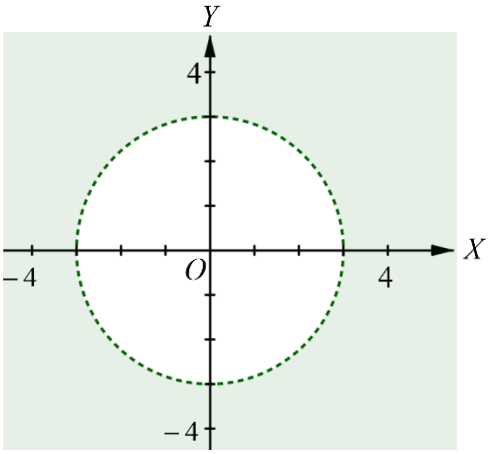
แบบฝึกหัดท้ายบท

1. $y = 1.8x + 32$
2. 34 ตารางหน่วย
3. $(x-2)^2+(y+5)^2=4$
4. $(x+5)^2+(y-1)^2=26$
5. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2$ หรือ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$

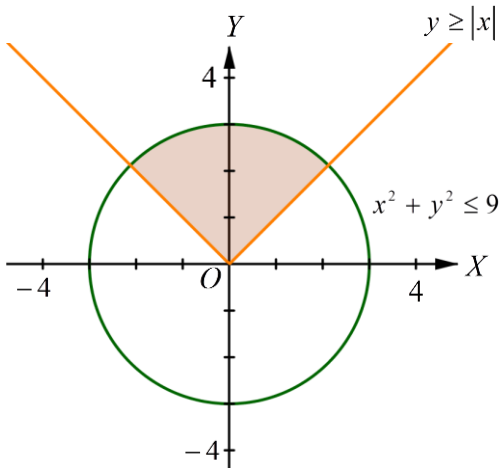
6. 1)



2)



7. เขียนกราฟของอาณาบริเวณที่สอดคล้องกับอสมการที่กำหนดให้ได้ดังนี้



พื้นที่ที่ต้องการ คือ $\frac{9}{4}\pi$ ตารางหน่วย

8. $y = -\frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

9. 1) $x = 3$

2) $y = -x + 3\sqrt{2}$ และ $y = -x - 3\sqrt{2}$

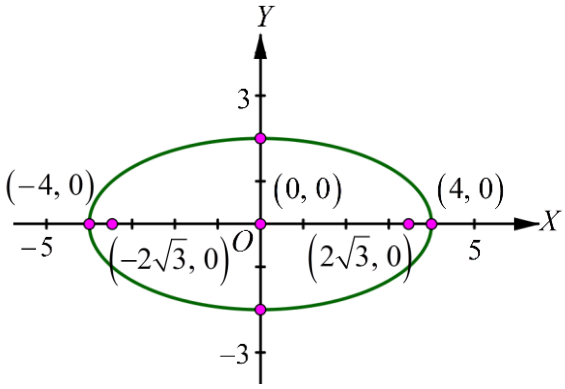
3) $y = -x + 3\sqrt{2}$

10. 3

11. 1) จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$ จุดยอด คือ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$

โฟกัส คือ $(-2\sqrt{3}, 0)$ และ $(2\sqrt{3}, 0)$ แกนเอกยาว 8 หน่วย

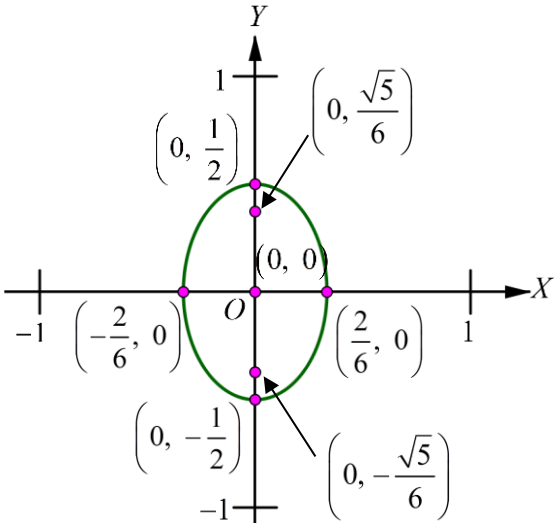
แกนโทยาว 4 หน่วย



2) จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$ จุดยอด คือ $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

โฟกัส คือ $\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$ และ $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$ แกนเอกยาว 1 หน่วย

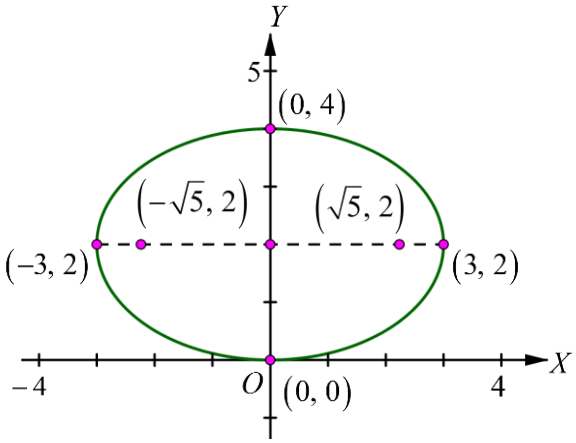
แกนโทยาว $\frac{2}{3}$ หน่วย



3) จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 2)$ จุดยอด คือ $(-3, 2)$ และ $(3, 2)$

โฟกัส คือ $(-\sqrt{5}, 2)$ และ $(\sqrt{5}, 2)$ แกนเอกยาว 6 หน่วย

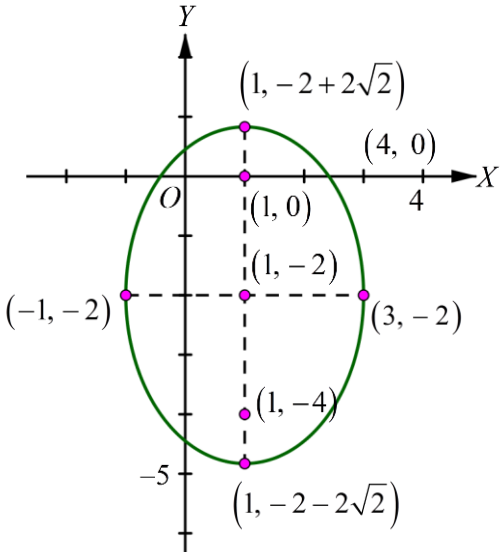
แกนโทยาว 4 หน่วย



4) จุดศูนย์กลาง คือ $(1, -2)$ จุดยอด คือ $(1, -2-2\sqrt{2})$ และ $(1, -2+2\sqrt{2})$

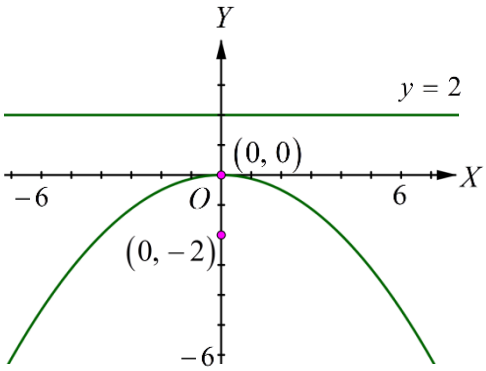
โฟกัส คือ $(1, -4)$ และ $(1, 0)$ แกนเอกยาว $4\sqrt{2}$ หน่วย

แกนโทยาว 4 หน่วย



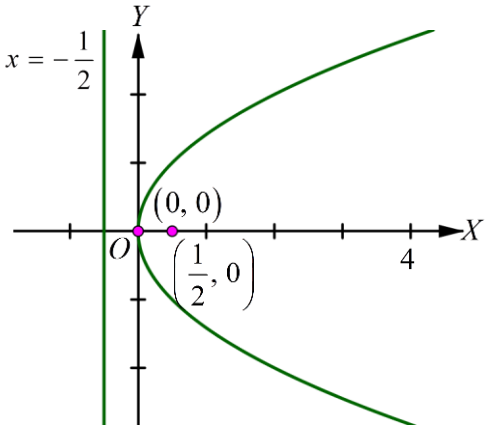
12. 1) จุดยอด คือ $(0, 0)$ โฟกัส คือ $(0, -2)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y = 2$



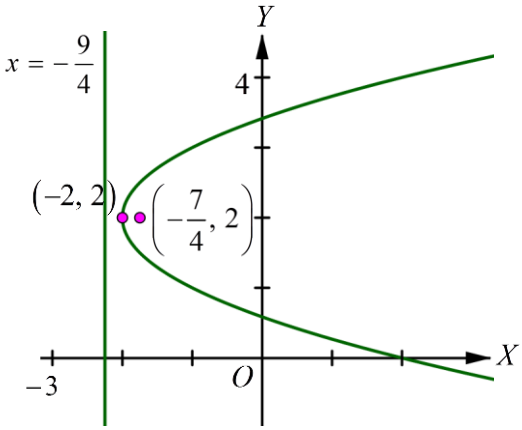
2) จุดยอด คือ $(0, 0)$ โฟกัส คือ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x = -\frac{1}{2}$



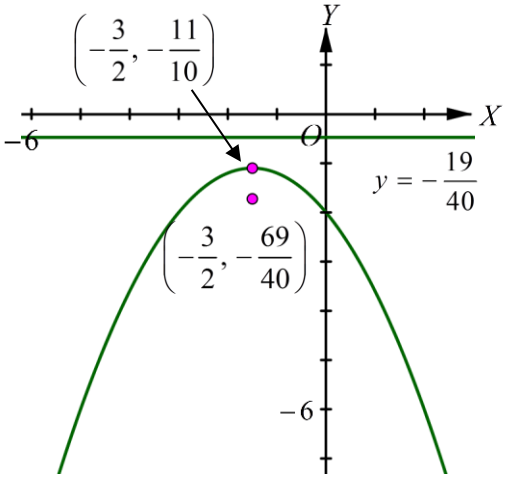
3) จุดยอด คือ $(-2, 2)$ โฟกัส คือ $\left(-\frac{7}{4}, 2\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x = -\frac{9}{4}$



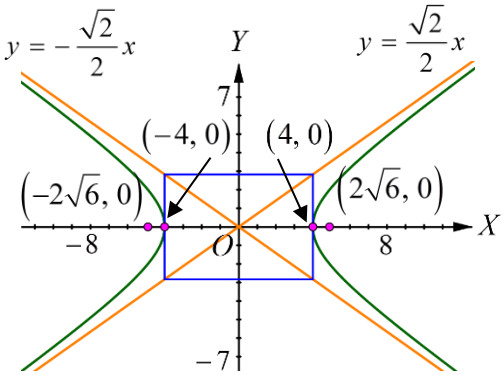
4) จุดยอด คือ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{10}\right)$ โฟกัส คือ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{69}{40}\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y = -\frac{19}{40}$



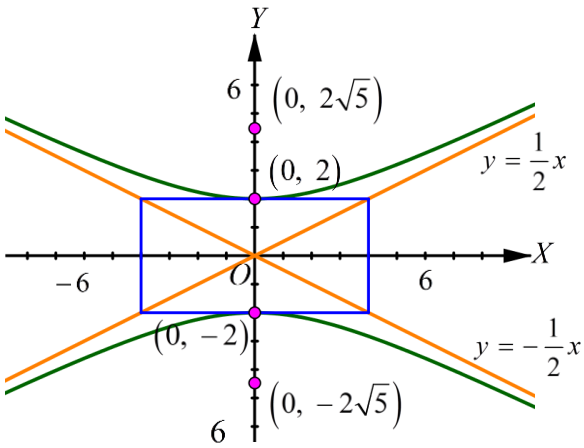
13. 1) จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$ จุดยอด คือ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$

โฟกัส คือ $(-2\sqrt{6}, 0)$ และ $(2\sqrt{6}, 0)$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$



2) จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$ จุดยอด คือ $(0, -2)$ และ $(0, 2)$

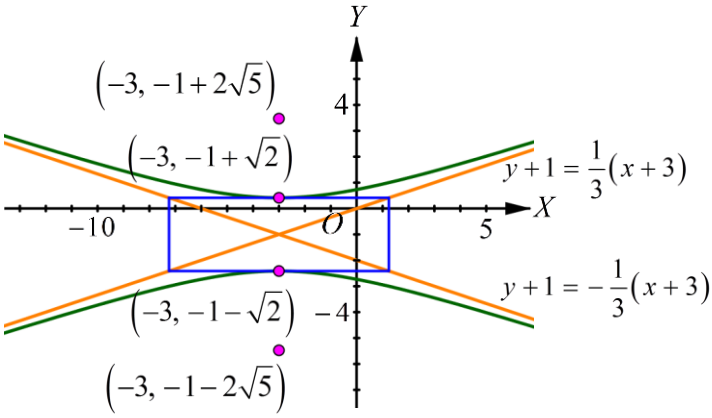
โฟกัส คือ $(0, -2\sqrt{5})$ และ $(0, 2\sqrt{5})$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{1}{2}x$



3) จุดศูนย์กลาง คือ $(-3, -1)$ จุดยอด คือ $(-3, -1-\sqrt{2})$ และ $(-3, -1+\sqrt{2})$

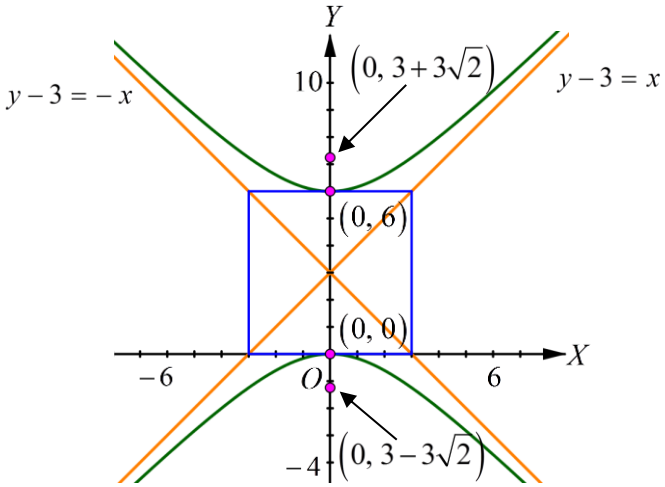
โฟกัส คือ $(-3, -1-2\sqrt{5})$ และ $(-3, -1+2\sqrt{5})$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y+1 = \pm\frac{1}{3}(x+3)$



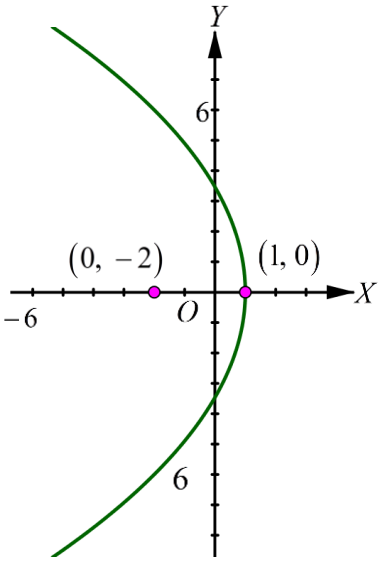
4) จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 3)$ จุดยอด คือ $(0, 0)$ และ $(0, 6)$

โฟกัส คือ $(0, 3-3\sqrt{2})$ และ $(0, 3+3\sqrt{2})$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y-3=\pm x$



14. 1) สมการพาราโบลาที่เส้นโค้งเปิดไปทางด้านซ้าย

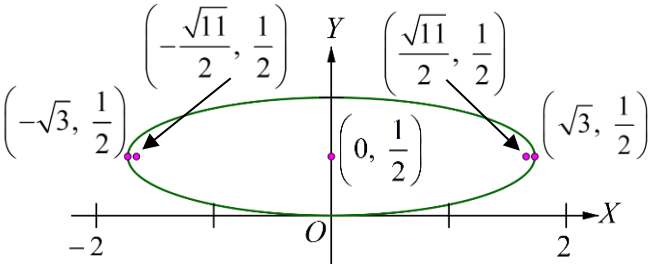
จุดยอด คือ $(1, 0)$ โฟกัส คือ $(-2, 0)$



2) สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลาง คือ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ จุดยอด คือ $\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ และ $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

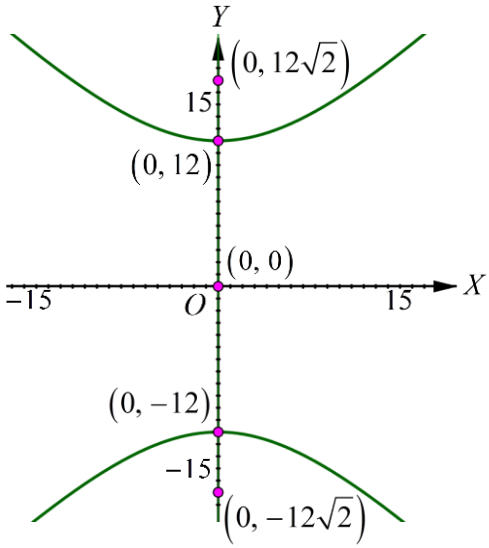
โฟกัส คือ $\left(-\frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{1}{2}\right)$



3) สมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$ จุดยอด คือ $(0, -12)$ และ $(0, 12)$

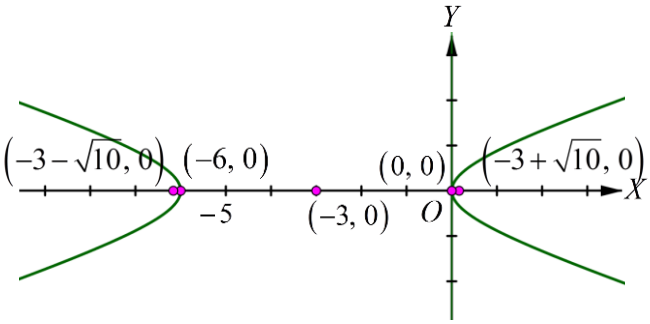
โฟกัส คือ $\left(0, -12\sqrt{2}\right)$ และ $\left(0, 12\sqrt{2}\right)$



4) สมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลาง คือ $(-3, 0)$ จุดยอด คือ $(-6, 0)$ และ $(0, 0)$

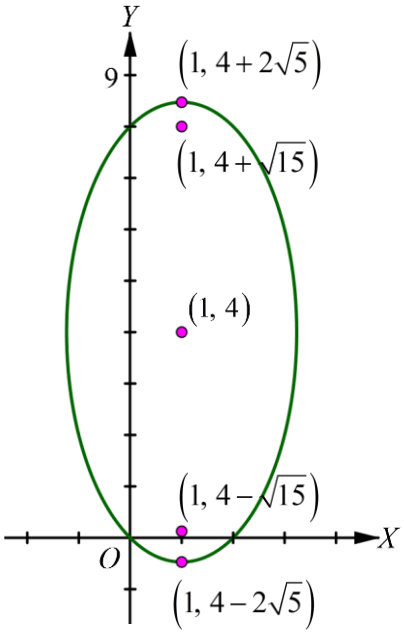
โฟกัส คือ $(-3-\sqrt{10}, 0)$ และ $(-3+\sqrt{10}, 0)$



5) สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

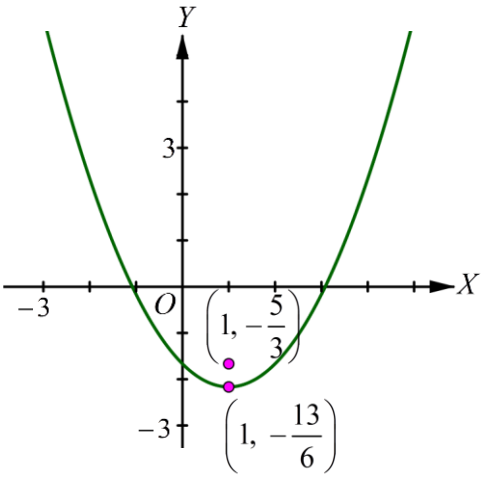
จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 4)$ จุดยอด คือ $(1, 4-2\sqrt{5})$ และ $(1, 4+2\sqrt{5})$

โฟกัส คือ $(1, 4-\sqrt{15})$ และ $(1, 4+\sqrt{15})$



6) สมการพาราโบลาที่เส้นโค้งหงายขึ้น

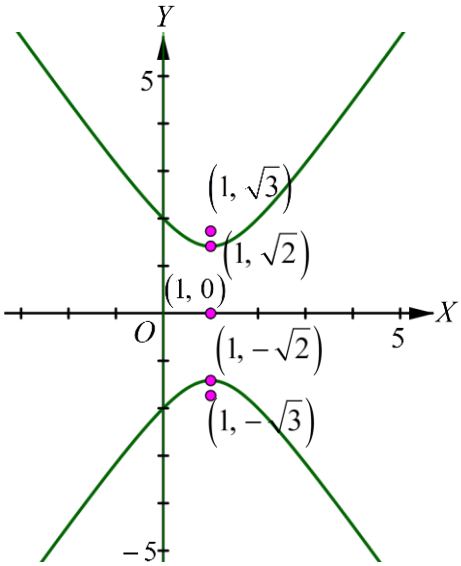
จุดยอด คือ $\left(1, -\frac{13}{6}\right)$ โฟกัส คือ $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$



7) สมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 0)$ จุดยอด คือ $(1, -\sqrt{2})$ และ $(1, \sqrt{2})$

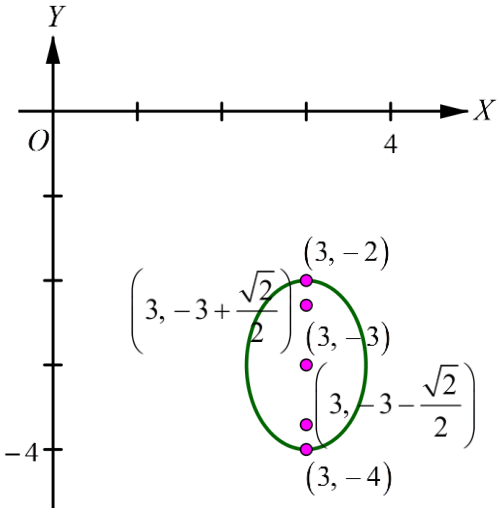
โฟกัส คือ $(1, -\sqrt{3})$ และ $(1, \sqrt{3})$ $(1, -\sqrt{3})$



8) สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

จุดศูนย์กลาง คือ $(3, -3)$ จุดยอด คือ $(3, -4)$ และ $(3, -2)$

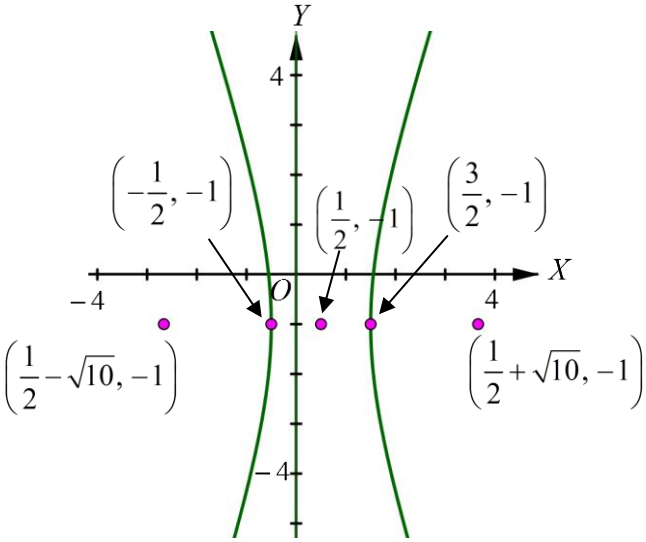
โฟกัส คือ $\left(3, -3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ และ $\left(3, -3+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



9) สมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลาง คือ $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ จุดยอด คือ $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ และ $\left(\frac{3}{2},-1\right)$

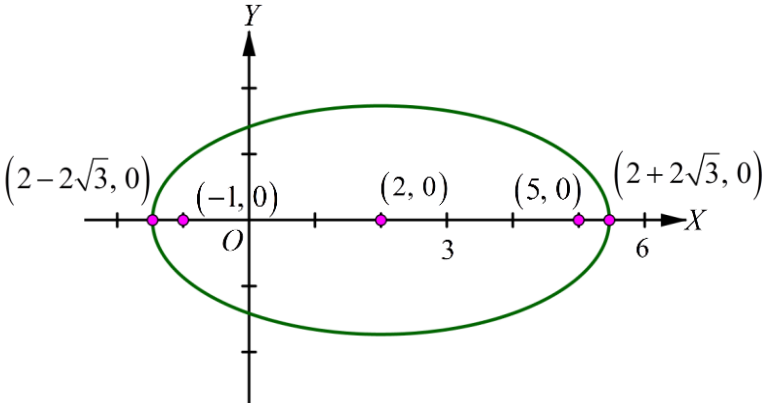
โฟกัส คือ $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{10},-1\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{10},-1\right)$



10) สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

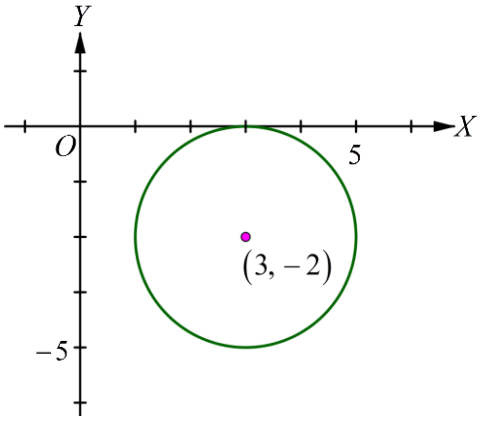
จุดศูนย์กลาง คือ $(2, 0)$ จุดยอด คือ $\left(2-2\sqrt{3}, 0\right)$ และ $\left(2+2\sqrt{3}, 0\right)$

โฟกัส คือ $(-1, 0)$ และ $(5, 0)$



15. 1) สมการวงกลม

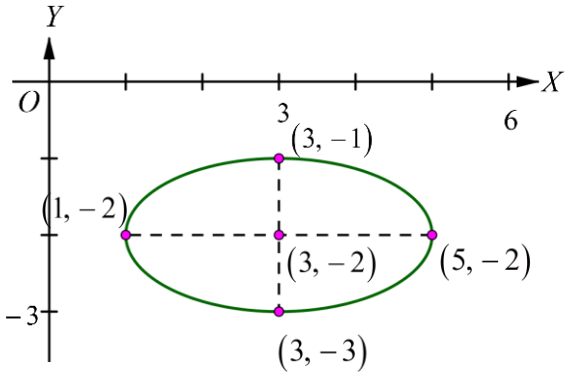
จุดศูนย์กลาง คือ $(3, -2)$ รัศมียาว 2 หน่วย



2) สมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลาง คือ $(3, -2)$ แกนเอกยาว 4 หน่วย

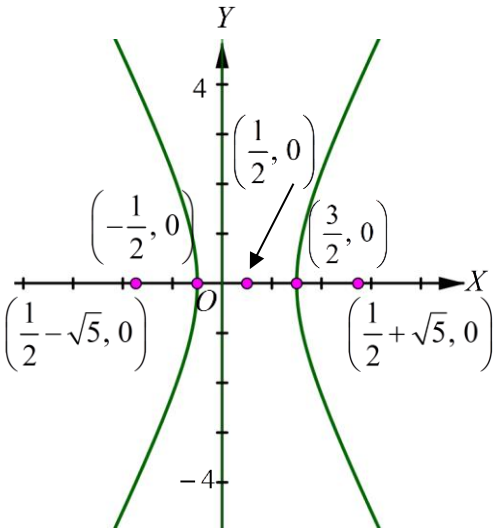
แกนโทยาว 2 หน่วย



3) สมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

จุดศูนย์กลาง คือ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ จุดยอด คือ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ และ $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

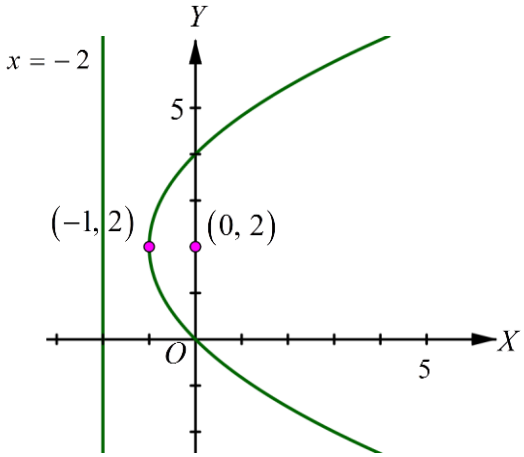
โฟกัส คือ $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{5}, 0\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{5}, 0\right)$



4) สมการพาราโบลาที่มีเส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา

จุดยอด คือ $(-1, 2)$ โฟกัส คือ $(0, 2)$

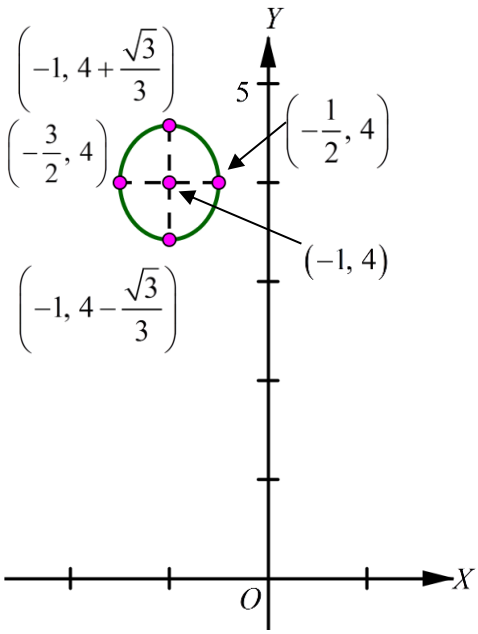
ไดเรกตริกซ์ คือ $x = -2$



5) สมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

จุดศูนย์กลาง คือ $(-1, 4)$ แกนเอกยาว $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ หน่วย

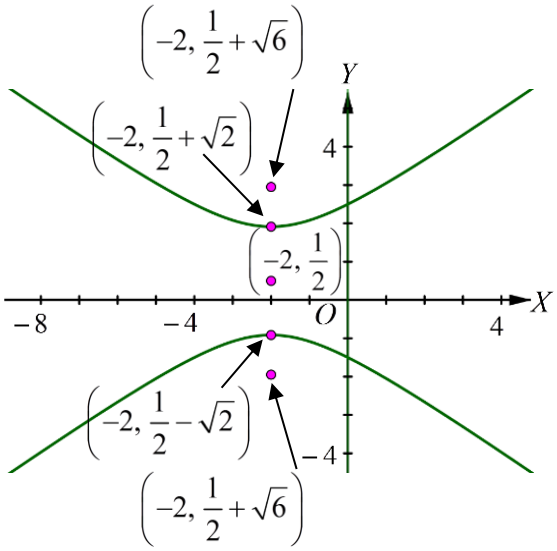
แกนโทยาว 1 หน่วย



6) สมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

จุดศูนย์กลาง คือ $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ จุดยอด คือ $\left(-2, \frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$ และ $\left(-2, \frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$

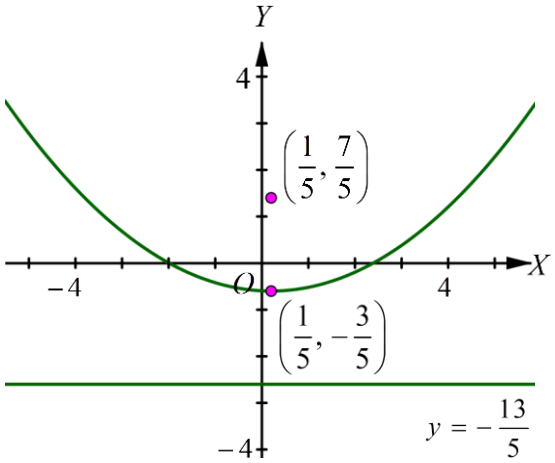
โฟกัส คือ $\left(-2, \frac{1}{2}-\sqrt{6}\right)$ และ $\left(-2, \frac{1}{2}+\sqrt{6}\right)$



7) สมการพาราโบลาที่เส้นโค้งหงายขึ้น

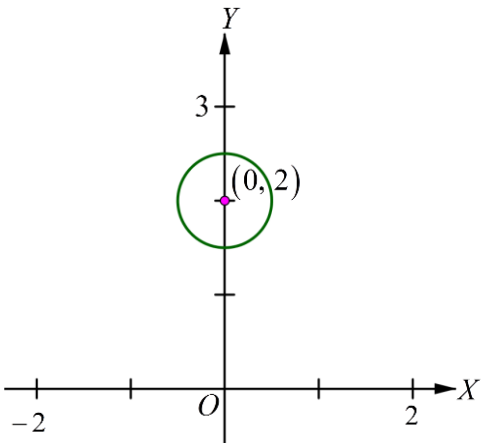
จุดยอด คือ $\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ โฟกัส คือ $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y=-\frac{13}{5}$



8) สมการวงกลม

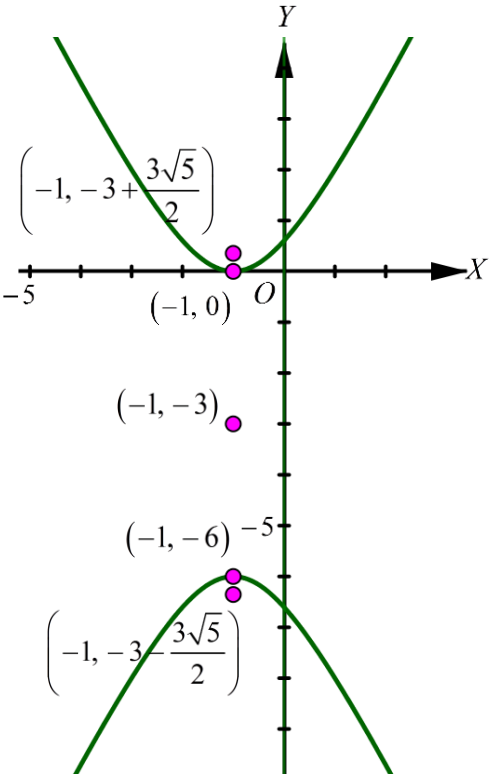
จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 2)$ รัศมียาว $\frac{1}{2}$ หน่วย



9) สมการไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

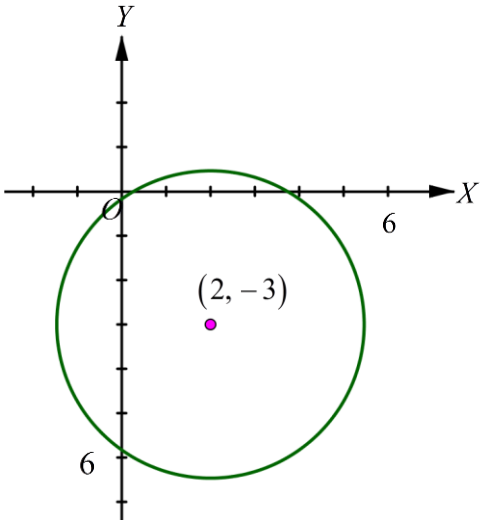
จุดศูนย์กลาง คือ $(-1, -3)$ จุดยอด คือ $(-1, -6)$ และ $(-1, 0)$

โฟกัส คือ $\left(-1, -3-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ และ $\left(-1, -3+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$



10) สมการวงกลม

จุดศูนย์กลาง คือ $(2, -3)$ รัศมียาว $2\sqrt{3}$ หน่วย



16. 1) $x^2 = 4y$

2) $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

3) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$

4) $\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5} = 1$

5) $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

6) $(y-5)^2 = 20(x-5)$

7) $\frac{4(x-7)^2}{225} + \frac{(y-2)^2}{100} = 1$

8) $y^2 = 4(x+1)$

17. 1) $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 28 = 0$

2) $\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

3) $(x-2)^2 = -4(y-3)$

4) $\frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1$

18. 1) $\{(x, y) \mid x^2 = 4y\}$ ความสัมพันธ์นี้เป็นฟังก์ชัน

2) $\{(x, y) \mid (x-9)^2 + (y-4)^2 = 5\}$ ความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

3) $\left\{(x, y) \middle| \frac{(y-6)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1\right\}$ ความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

4) $\left\{(x, y) \middle| \frac{(x-5)^2}{169}+\frac{(y+1)^2}{133}=1\right\}$ ความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

19. 1) $(x-5)^2+(y-3)^2=25$

2) 12 พิกัด

20. $\frac{(x-1)^2}{41}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

21. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{m}-\frac{9}{4}}$ ตารางหน่วย เมื่อ $0<m<4$

22. $y^2=3x$

23. $25\sqrt{2}$ หน่วย

24. $y=-\frac{2}{3}x+1$

25. $64\left(x+\frac{31}{8}\right)^2+\frac{64y^2}{3}=1$

26. 1) วงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 3)$ และรัศมียาว 1 หน่วย

2) วงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ และรัศมียาว $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ หน่วย

3) ไม่มีกราฟในระนาบจำนวนจริง

4) จุดหนึ่งจุด

27. 1) พาราโบลา 2) ไฮเพอร์โบลา

3) เส้นตรงสองเส้นตัดกัน 4) วงรี

5) วงกลม 6) ไม่มีกราฟในระนาบจำนวนจริง

28. ไฮเพอร์โบลา

29. $x^2=-\frac{5}{2}y$

30. $x^2=-26200(y-6550)$ เมื่อ $x\geq 0$

31. 1) $\frac{x^2}{2.5^2}+\frac{y^2}{1.5^2}=1$ 2) 4 เมตร

32. $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$

33. $(0.36, -0.76)$ และ $(0.36, 0.76)$

เฉลยแบบฝึกหัดและวิธีทำโดยละเอียด

บทที่ 1 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด 1.1

1. 1) $A\times B=\{(1,3),(1,6),(1,7),(2,3),(2,6),(2,7)\}$

$B\times A=\{(3,1),(3,2),(6,1),(6,2),(7,1),(7,2)\}$

2) $A\times B=\{(a,e),(a,f),(b,e),(b,f),(c,e),(c,f)\}$

$B\times A=\{(e,a),(e,b),(e,c),(f,a),(f,b),(f,c)\}$

3) $A\times B=\{(-3,1),(-3,2),(-3,3),(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-1,1),(-1,2),(-1,3)\}$

$B\times A=\{(1,-3),(1,-2),(1,-1),(2,-3),(2,-2),(2,-1),(3,-3),(3,-2),(3,-1)\}$

2. จำนวนสมาชิกของ $A\times B$ คือ $n\times m=mn$

จำนวนสมาชิกของ $B\times A$ คือ $m\times n=mn$

จำนวนสมาชิกของ $A\times A$ คือ $n\times n=n^2$

จำนวนสมาชิกของ $B\times B$ คือ $m\times m=m^2$

3. 1) เนื่องจาก $M\times N=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$

และ $M\times P=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5)\}$

ดังนั้น $(M\times N)\cup(M\times P)=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

2) เนื่องจาก $M=\{1,2\}$

และ $N\cup P=\{2,3,4,5\}$

ดังนั้น $M\times(N\cup P)=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

3) เนื่องจาก $M = \{1, 2\}$

และ $N \cap P = \varnothing$

ดังนั้น $M \times (N \cap P) = \varnothing$

4) เนื่องจาก $M \times N = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

และ $M \times P = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\}$

ดังนั้น $(M \times N) \cap (M \times P) = \varnothing$

4. จะได้ $E \times E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

จะเห็นว่า $r \subset E \times E$

ดังนั้น r เป็นความสัมพันธ์บนเซต E

5. 1) $r = \{(2, 0), (2, 1), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$

2) $r = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y\}$

6. $r_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

$D_{r_1} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = S$

$R_{r_1} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = S$

$r_2 = \{(3, 3), (4, 3), (5, 3)\}$

$D_{r_2} = \{3, 4, 5\}$

$R_{r_2} = \{3\}$

$r_3 = \varnothing$

$D_{r_3} = \varnothing$

$R_{r_3} = \varnothing$

7. 1) ให้ $r = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

ดังนั้น $D_r = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$R_r = \{0, 1, 4, 9\}$

2) ให้ $m = \left\{ \left(-2, \sqrt{2}\right), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), \left(2, \sqrt{2}\right) \right\}$

ดังนั้น $D_m = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$R_m = \left\{ 0, 1, \sqrt{2} \right\}$

3) ให้ $n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x - 2 \right\}$

$= \{\ldots, (-2, -4), (-1, -3), (0, -2), (1, -1), (2, 0), \ldots\}$

ดังนั้น $D_n = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z}$

$R_n = \mathbb{Z}$

4) ให้ $p = \left\{ (x, y) \mid y = \sqrt{2} \right\}$

ดังนั้น $D_p = \mathbb{R}$

$R_p = \left\{ \sqrt{2} \right\}$

5) ให้ $q = \left\{ (x, y) \mid y = x^2 + 1 \right\}$

ดังนั้น $D_q = \mathbb{R}$

$R_q = [1, \infty)$

6) ให้ $s = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = |x - 2| \right\}$

ดังนั้น $D_s = \mathbb{Z}$

$R_s = \mathbb{N} \cup \{0\}$

7) ให้ $t = \left\{ (x, y) \mid y = \sqrt{x^2 + 2} \right\}$

ดังนั้น $D_t = \mathbb{R}$

$R_t = \left[\sqrt{2}, \infty \right)$

8) ให้ $v = \left\{ (x, y) \mid y = \sqrt{1 - x^2} \right\}$

ดังนั้น $D_v = [-1, 1]$

$R_v = [0, 1]$

9) ให้ $w = \left\{ (x, y) \mid y = \dfrac{1}{x-2} \right\}$

ดังนั้น $D_w = \mathbb{R} - \{2\}$

$R_w = \mathbb{R} - \{0\}$

8. 1) $r^{-1} = \{(2,1), (3,4), (2,2), (1,2), (1,3)\}$

$D_{r^{-1}} = \{1, 2, 3\}$

$R_{r^{-1}} = \{1, 2, 3, 4\}$

2) $r^{-1} = \{\ldots, (4,-5), (2,-3), (0,-1), (2,1), (4,3), (6,5), \ldots\}$

$D_{r^{-1}} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

$R_{r^{-1}} = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

3) $r^{-1} = \left\{ (x, y) \mid y = \dfrac{2-x}{3} \right\}$

$D_{r^{-1}} = \mathbb{R}$

$R_{r^{-1}} = \mathbb{R}$

4) $r^{-1} = \{(x, y) \mid xy = 1\}$

$D_{r^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\}$

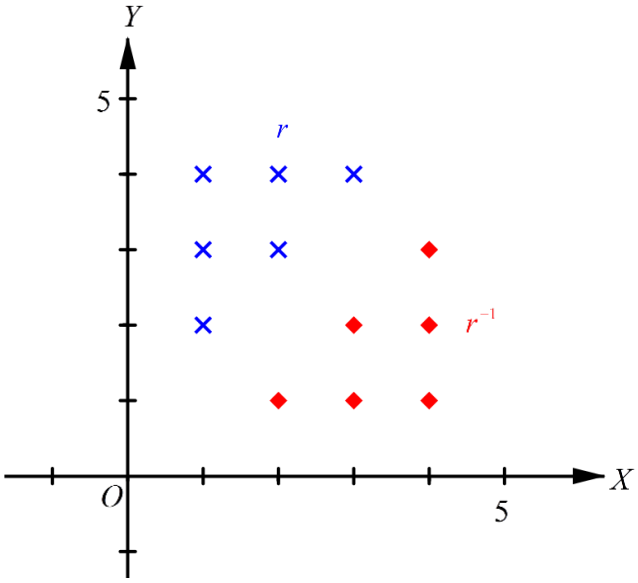
$R_{r^{-1}} = \mathbb{R} - \{0\}$

9. 1) จาก $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y \geq x+1\}$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

จะได้ $r = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

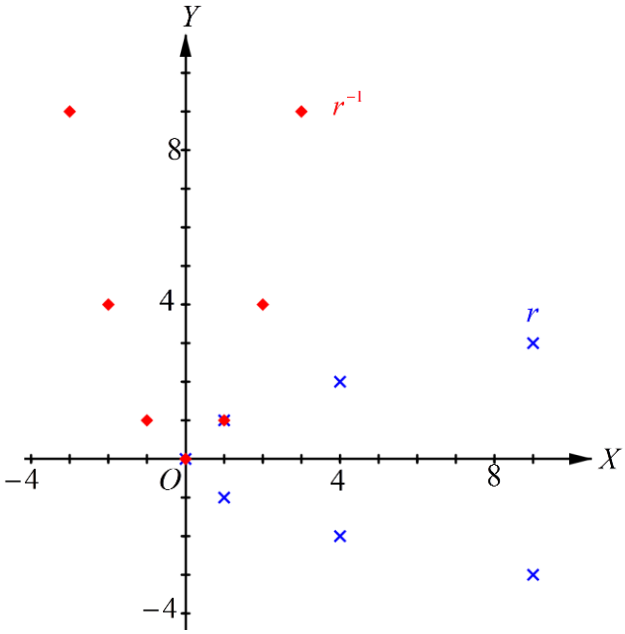
ดังนั้น $r^{-1} = \{(2,1), (3,1), (4,1), (3,2), (4,2), (4,3)\}$

เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ได้ดังนี้



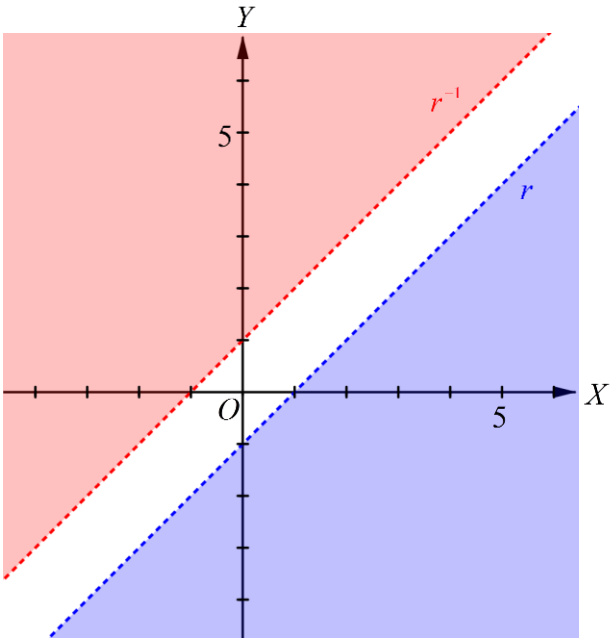
2) จาก $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y^2 = x \right\}$

จะได้ $r^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2 \right\}$ เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ได้ดังนี้



3) จาก $r = \{(x, y) \mid y < x - 1\}$

จะได้ $r^{-1} = \{(x, y) \mid y > x + 1\}$ เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ได้ดังนี้



แบบฝึกหัด 1.2ก

1. 1) เป็นฟังก์ชัน 2) เป็นฟังก์ชัน
   3) ไม่เป็นฟังก์ชัน 4) เป็นฟังก์ชัน
2. 1) เป็นฟังก์ชัน 2) เป็นฟังก์ชัน
   3) ไม่เป็นฟังก์ชัน 4) เป็นฟังก์ชัน
   5) เป็นฟังก์ชัน 6) ไม่เป็นฟังก์ชัน
   7) เป็นฟังก์ชัน 8) ไม่เป็นฟังก์ชัน

3. 1) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน คือ $(3,b)$ และ $(3,c)$

2) เป็นฟังก์ชัน

3) เป็นฟังก์ชัน เพราะจาก $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x - 2\}$ เมื่อ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

เมื่อเขียนแบบแจกแจงสมาชิก จะได้ $\{(0, -2), (1, -1), (2, 0)\}$

ซึ่งจะเห็นว่าแต่ละสมาชิกในโดเมนจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

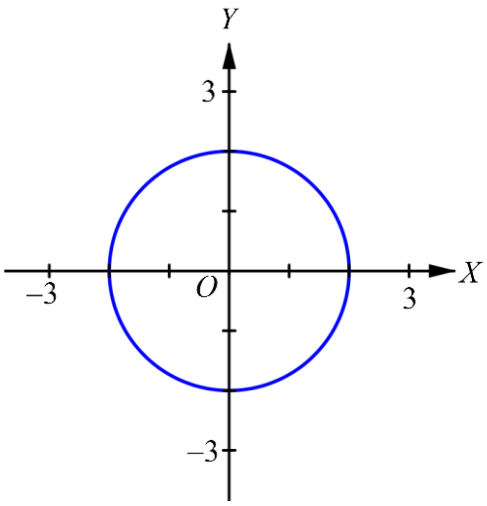
4) เป็นฟังก์ชัน เพราะจาก $\{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$ เมื่อ $A = \{0, 1\}$ และ $B = \{-1, 1\}$

เมื่อเขียนแบบแจกแจงสมาชิก จะได้ $\{(0, -1), (1, -1)\}$

ซึ่งจะเห็นว่าแต่ละสมาชิกในโดเมนจับคู่กับสมาชิกในเรนจ์เพียงตัวเดียวเท่านั้น

5) **วิธีที่ 1** ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะจาก $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ พบว่า 0 ซึ่งอยู่ในโดเมนจับคู่กับ 2 และ -2 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

วิธีที่ 2 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะจาก $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า เมื่อลากเส้นขนานกับแกน Y ตัดกราฟ จะมีเส้นขนานกับแกน Y ที่ตัดกราฟของ $x^2 + y^2 = 4$ สองจุด

6) เป็นฟังก์ชัน

7) เป็นฟังก์ชัน

8) เป็นฟังก์ชัน

9) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะจาก $\{(x, y) \mid |x|+|y|=3\}$ พบว่า 0 ซึ่งอยู่ในโดเมน จับคู่กับ 3 และ -3 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

4. 1) เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B 2) ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

3) เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B 4) ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

5. 1) $f(a)=2$, $f(b)=4$, $f(c)=3$, $f(d)=1$

2) $f(a)=1$, $f(b)=4$, $f(c)=1$, $f(d)=3$

6. 1) $f(-2)=(-2)^2=4$, $f(-1)=(-1)^2=1$, $f(0)=0^2=0$, $f(1)=1^2=1$, $f(2)=2^2=4$

จะได้ว่า $f=\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$

2) $f(-2)=\dfrac{2(-2)}{(-2)^2+1}=-\dfrac{4}{5}$, $f(-1)=\dfrac{2(-1)}{(-1)^2+1}=-1$, $f(0)=\dfrac{2(0)}{(0)^2+1}=0$, $f(1)=\dfrac{2(1)}{(1)^2+1}=1$, $f(2)=\dfrac{2(2)}{(2)^2+1}=\dfrac{4}{5}$

จะได้ว่า $f=\left\{\left(-2,-\dfrac{4}{5}\right),(-1,-1),(0,0),(1,1),\left(2,\dfrac{4}{5}\right)\right\}$

3) $f(-2)=\sqrt{-2+2}=0$, $f(-1)=\sqrt{-1+2}=1$, $f(1)=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$, $f(2)=\sqrt{2+2}=2$

$f(0)=\sqrt{0+2}=\sqrt{2}$

จะได้ว่า $f=\{(-2,0),(-1,1),(0,\sqrt{2}),(1,\sqrt{3}),(2,2)\}$

4) $f(-2)=|-2+1|=1$ $\quad$ $f(1)=|1+1|=2$

$f(-1)=|-1+1|=0$ $\quad$ $f(2)=|2+1|=3$

$f(0)=|0+1|=1$

จะได้ว่า $f=\{(-2,1),(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3)\}$

7. $f(-2) = 1$

$f(0) = 1$

$f(1) = 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

$f(9) = 2$

$f(3+h)-f(3)=2-3=-1$ เมื่อ $h>0$

8. 1) $f(3+2)=(3+2)^3+4(3+2)-3=142$

$f(3)=3^3+4(3)-3=36$

$f(2)=2^3+4(2)-3=13$

นั่นคือ $f(3)+f(2)=36+13=49$

ดังนั้น $f(3+2)$ ไม่เท่ากับ $f(3)+f(2)$

2) $f(3\cdot 2)=(3\cdot 2)^3+4(3\cdot 2)-3=237$

$f(3)=3^3+4(3)-3=36$

$f(2)=2^3+4(2)-3=13$

นั่นคือ $f(3)f(2)=36\cdot 13=468$

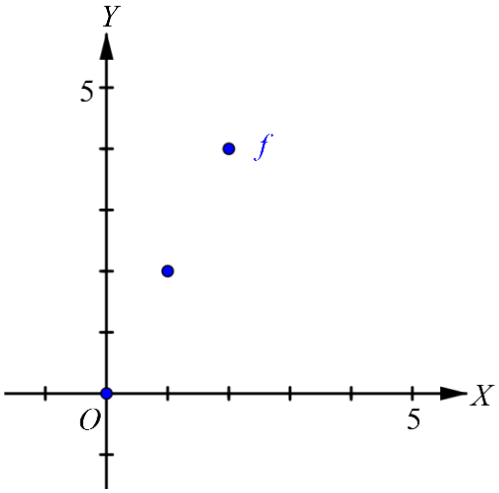
ดังนั้น $f(3\cdot 2)$ ไม่เท่ากับ $f(3)f(2)$

9. 1) จาก $f(x) = 2x$

จะได้ $f = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$

นั่นคือ $D_f = \{0, 1, 2\}$ และ $R_f = \{0, 2, 4\}$

เขียนกราฟได้ดังนี้

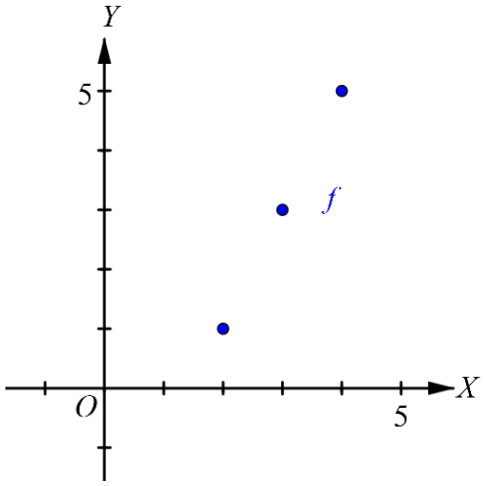


2) จาก $f(x) = 2x - 3$

จะได้ $f = \{(2, 1), (3, 3), (4, 5)\}$

นั่นคือ $D_f = \{2, 3, 4\}$ และ $R_f = \{1, 3, 5\}$

เขียนกราฟได้ดังนี้

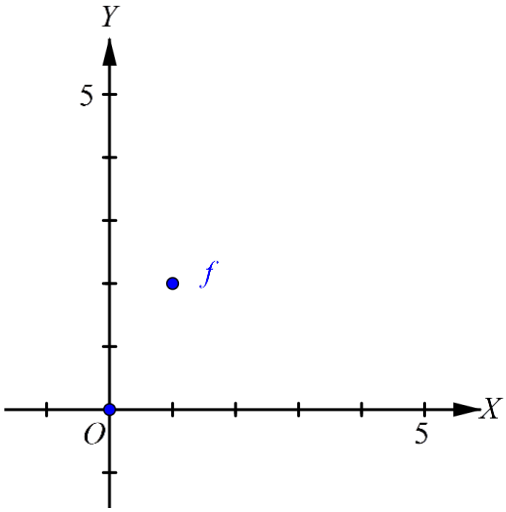


3) จาก $f(x) = 2x^2$

จะได้ $f = \{(0, 0), (1, 2)\}$

นั่นคือ $D_f = \{0, 1\}$ และ $R_f = \{0, 2\}$

เขียนกราฟได้ดังนี้

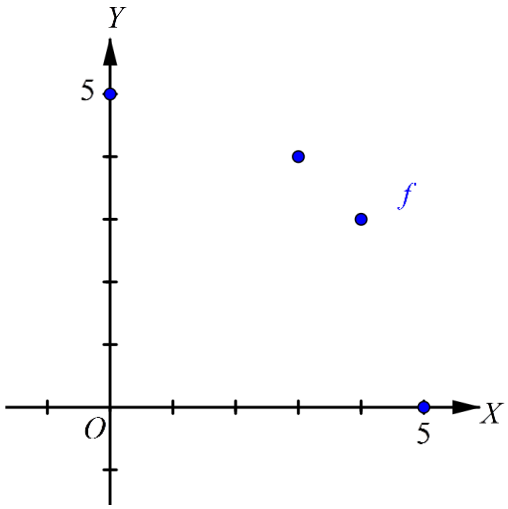


4) จาก $f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 25\}$

จะได้ $f = \{(0, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 0)\}$

นั่นคือ $D_f = \{0, 3, 4, 5\}$ และ $R_f = \{0, 3, 4, 5\}$

เขียนกราฟได้ดังนี้



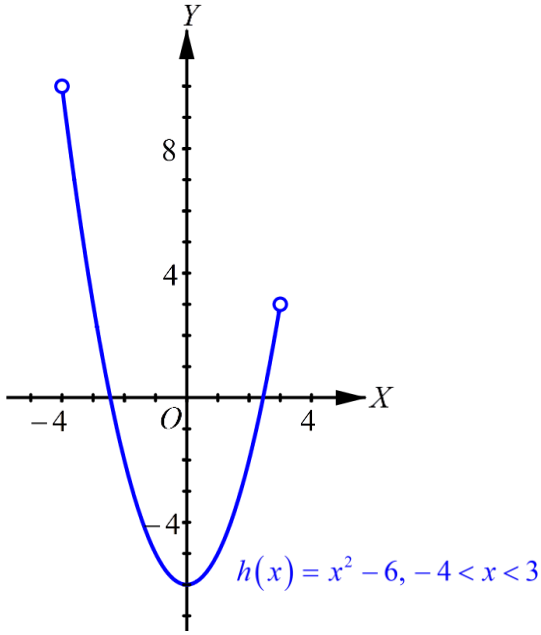
10. 1) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $D_f = [-2, \infty)$ และ $R_f = [0, \infty)$

3) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-1, \infty)$

4) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [0, \infty)$

11. จาก $h(x)$ และ D_h ที่กำหนดให้ เขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะได้ $R_h = \{ y \in \mathbb{R} \mid -6 \le y < 10 \}$

12. 1) ฟังก์ชันจาก A ไป B ได้แก่ f_1, f_2, f_4, f_5 และ f_6

2) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ได้แก่ f_2 และ f_5

3) ฟังก์ชันจาก B ไป A ได้แก่ f_3 และ f_7

4) ไม่มีฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B

5) ฟังก์ชันจาก A ไป A ได้แก่ f_4 และ f_6

6) ฟังก์ชัน 1–1 จาก A ไป B ได้แก่ f_2 และ f_5

7) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A ได้แก่ f_7

8) ฟังก์ชัน 1–1 จาก B ไป A ได้แก่ f_7

13. 1) **วิธีที่ 1** จาก $f(x) = x^2 + x$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ $x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2$

$$x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0$$

นั่นคือ $x_1 - x_2 = 0$ หรือ $x_1 + x_2 + 1 = 0$

$x_1 = x_2$ หรือ $x_1 = -1 - x_2$

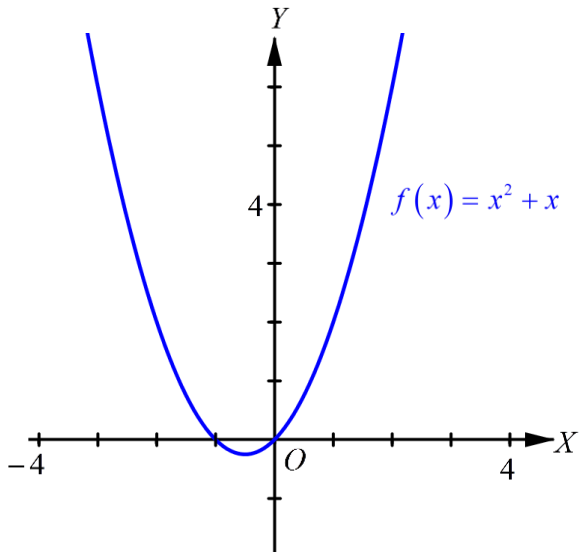
จะเห็นว่ามีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $f(x_1) = f(x_2)$

เช่น $x_1 = 0$ จะได้ $f(x_1) = 0$ และ $x_2 = -1$ จะได้ $f(x_2) = 0$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีที่ 2 จาก $f(x) = x^2 + x$

เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า เมื่อลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกราฟ จะมีเส้นขนานกับแกน X ที่ตัดกราฟของ $f(x) = x^2 + x$ สองจุด

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) **วิธีที่ 1** จาก $g(x) = 2x + 5$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $g(x_1) = g(x_2)$

จะได้ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$2x_1 = 2x_2$

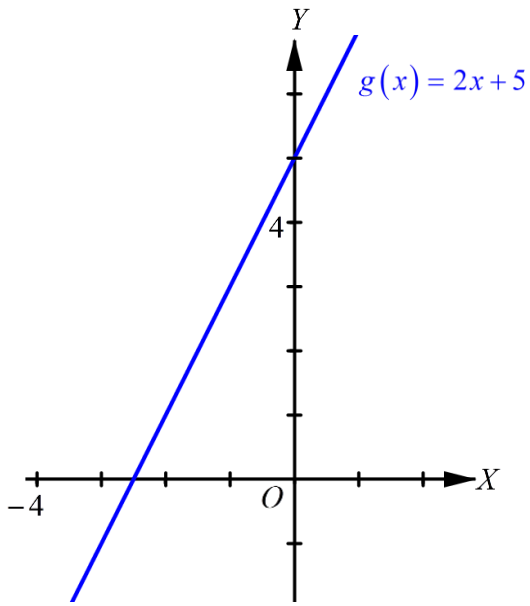
ดังนั้น $x_1 = x_2$

นั่นคือ ถ้า $g(x_1) = g(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีที่ 2 จาก $g(x) = 2x + 5$

เขียนกราฟได้ดังนี้



เมื่อลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกราฟ จะได้ว่าเส้นขนานกับแกน X ทุกเส้น ตัดกราฟของ $g(x)=2x+5$ เพียงจุดเดียว

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

3) **วิธีที่ 1** จาก $h(x)=|2x-1|$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $h(x_1) = h(x_2)$

จะได้ $|2x_1-1| = |2x_2-1|$

จะได้ $(2x_1-1)^2 = (2x_2-1)^2$

$$(2x_1-1)^2-(2x_2-1)^2 = 0$$

$$\left[(2x_1-1)-(2x_2-1)\right]\left[(2x_1-1)+(2x_2-1)\right] = 0$$

$$(2x_1-2x_2)(2x_1+2x_2-2) = 0$$

$$4(x_1-x_2)(x_1+x_2-1) = 0$$

นั่นคือ $x_1-x_2=0$ หรือ $x_1+x_2-1=0$

ดังนั้น $x_1=x_2$ หรือ $x_1=1-x_2$

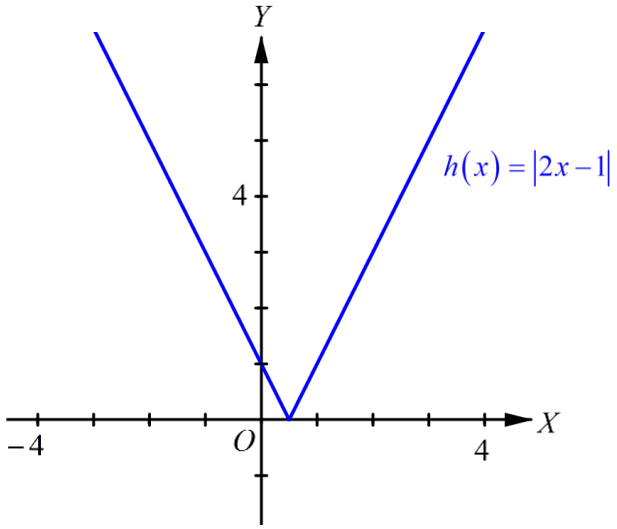
จะเห็นว่ามีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $h(x_1)=h(x_2)$

เช่น $x_1=0$ จะได้ $h(x_1)=1$ และ $x_2=1$ จะได้ $h(x_2)=1$

ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีที่ 2 จาก $h(x)=|2x-1|$

เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า เมื่อลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกราฟ จะมีเส้นขนานกับแกน X ที่ตัดกราฟของ $h(x) = |2x-1|$ สองจุด

ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

แบบฝึกหัด 1.2ข

1. 1) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-1, 1]$ และ $[2, 4]$

   เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[1, 2]$

   2) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, 1]$

   เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-2, 0]$ และ $[1, 4]$

   3) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-2, -1]$ และ $[1, 2]$

   เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-3, -2], [-1, 1]$ และ $[2, 4]$

   4) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-1, 1)$

   เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-3, -1)$ และ $(1, 3)$

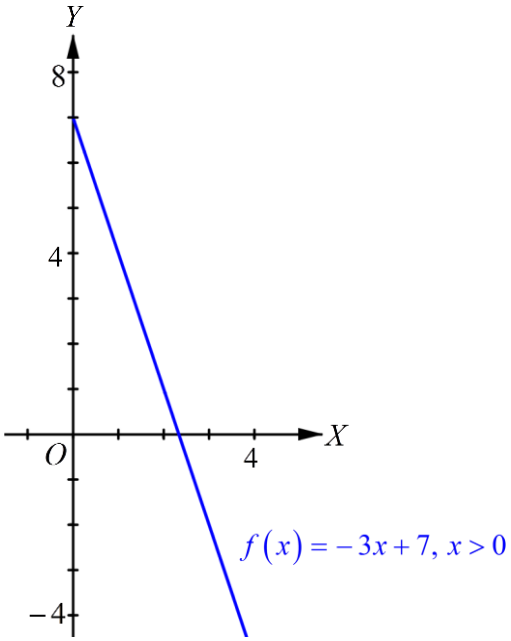
2. 1) สำหรับ $f(x)=-3x+7$ บนช่วง $(0,\infty)$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $(0,\infty)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$

จะได้

$$\begin{aligned} -3x_1 &> -3x_2 \\ -3x_1+7 &> -3x_2+7 \\ f(x_1) &> f(x_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0,\infty)$



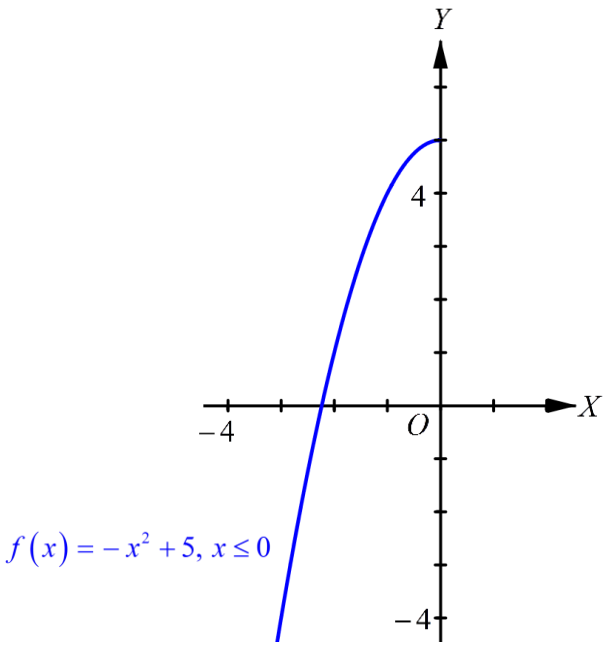
2) สำหรับ $f(x)=-x^2+5$ บนช่วง $(-\infty,0]$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $(-\infty,0]$ ซึ่ง $x_1<x_2$

จะได้

$$\begin{aligned} x_1^2 &> x_2^2 \\ -x_1^2 &< -x_2^2 \\ -x_1^2+5 &< -x_2^2+5 \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,0]$



3) สำหรับ $f(x)=|x|$ บนช่วง $[2, 6]$

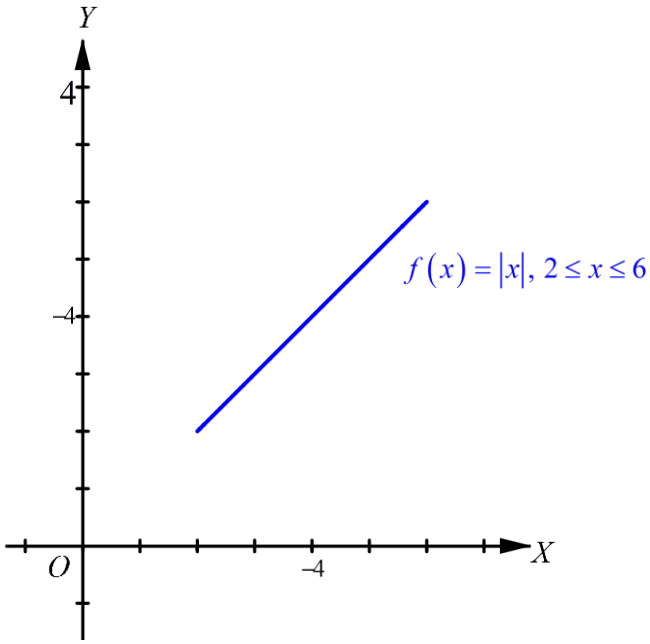
ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $[2, 6]$ ซึ่ง $x_1 < x_2$

จะได้

$$|x_1| < |x_2|$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[2, 6]$



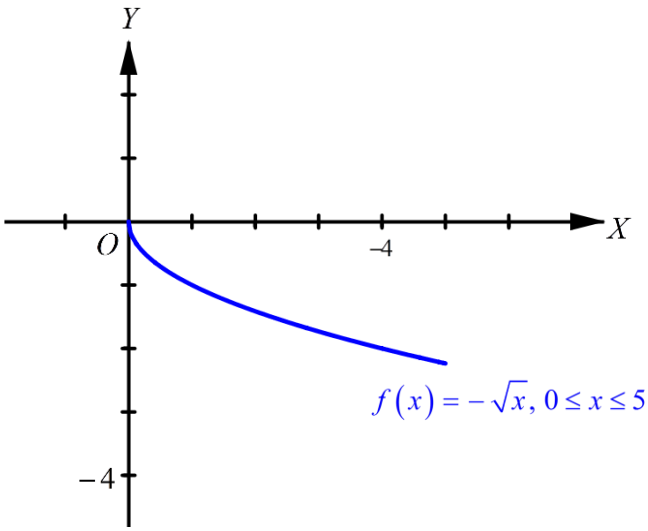
4) สำหรับ $f(x) = -\sqrt{x}$ บนช่วง $[0, 5]$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $[0, 5]$ ซึ่ง $x_1 < x_2$

จะได้

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} &< \sqrt{x_2} \\ -\sqrt{x_1} &> -\sqrt{x_2} \\ f(x_1) &> f(x_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0, 5]$



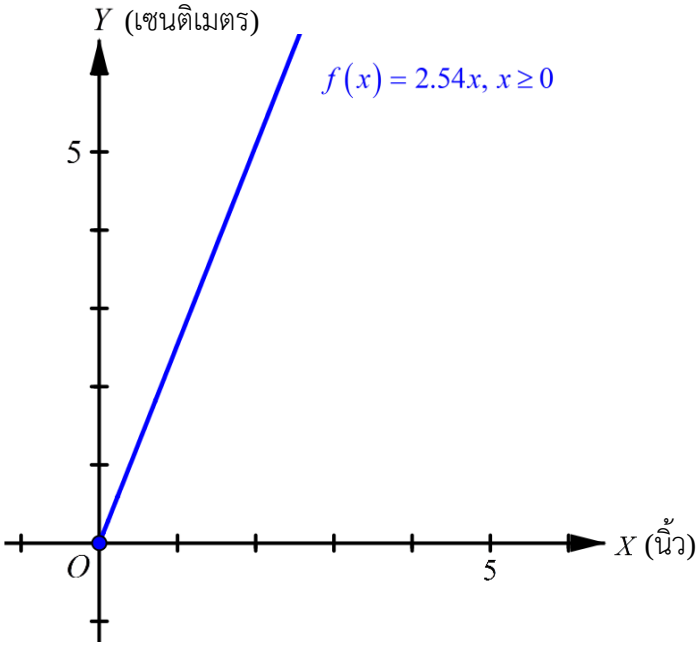
แบบฝึกหัด 1.3ก

1. 1) ข 2) ก

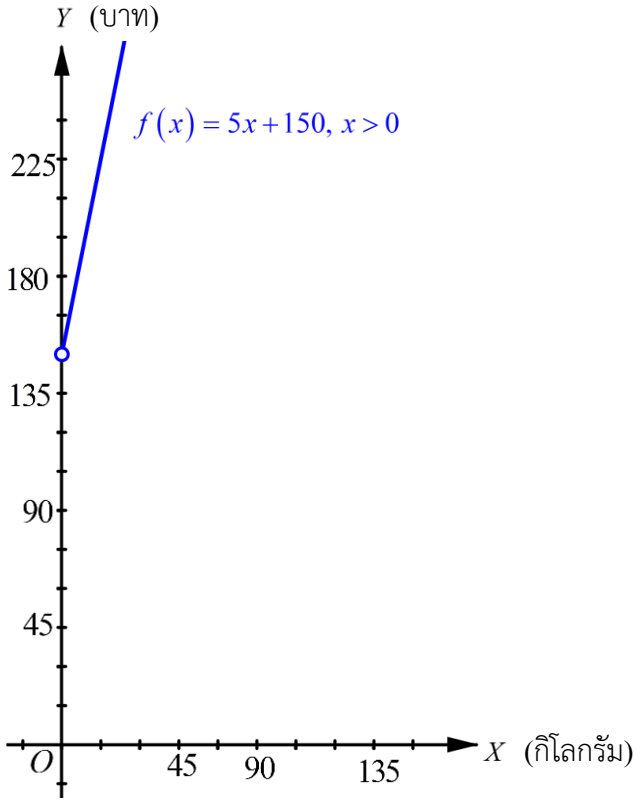
   3) ค

2. 1) $f(x) = 2.54x$ เป็นฟังก์ชันของความยาวที่มีหน่วยเป็นเซนติเมตร

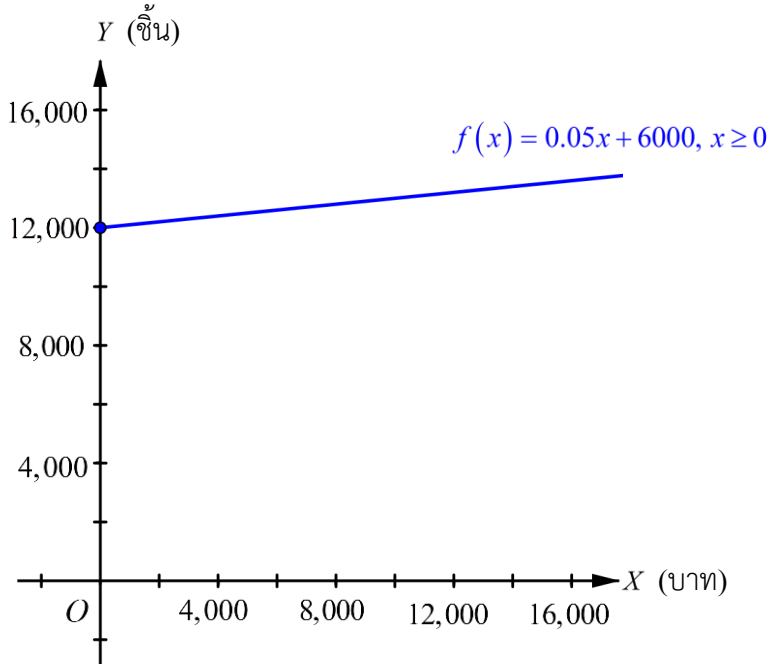
   เมื่อ x เป็นความยาวที่มีหน่วยเป็นนิ้ว



2) $f(x) = 5x + 150$ เป็นฟังก์ชันของค่าขนส่งสินค้า x กิโลกรัม จากกรุงเทพฯ ไปยังจังหวัดที่อยู่ในเขตชายแดนภาคใต้



3) $f(x) = 0.05x + 6,000$ เป็นฟังก์ชันของรายรับ (บาท) ของพนักงานขายสินค้าที่มียอดขาย x บาท



3. 1) ให้ $f(x)$ แทนฟังก์ชันแสดงยอดขายสินค้า (บาท) เมื่อเวลาผ่านไป x ปี

$$f(x) = 12,000 + x(0.1)(12,000)$$
$$= 12,000 + 1,200x$$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงยอดขายสินค้าเมื่อเวลาผ่านไป x ปี คือ $f(x) = 12,000 + 1,200x$

2) $f(5) = 12,000 + 1,200(5)$
$= 18,000$

ดังนั้น อีก 5 ปีข้างหน้า บริษัทนี้ควรจะมียอดขายสินค้า 18,000 ชิ้น

แบบฝึกหัด 1.3ข

1. 1) $y=(x-4)^2-3$

เมื่อเทียบกับ $y=a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=1, h=4$ และ $k=-3$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดวกกลับที่จุด $(4,-3)$ และคู่กับกราฟ (ฌ)

2) $y=-(x-4)^2+3$

เมื่อเทียบกับ $y=a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=-1, h=4$ และ $k=3$

นั่นคือ กราฟคว่ำลง มีจุดวกกลับที่จุด $(4,3)$ และคู่กับกราฟ (ญ)

3) $y=(x+4)^2-3$

เมื่อเทียบกับ $y=a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=1, h=-4$ และ $k=-3$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดวกกลับที่จุด $(-4,-3)$ และคู่กับกราฟ (ซ)

4) $y=-(x+4)^2+3$

เมื่อเทียบกับ $y=a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=-1, h=-4$ และ $k=3$

นั่นคือ กราฟคว่ำลง มีจุดวกกลับที่จุด $(-4,3)$ และคู่กับกราฟ (ช)

5) $y=2(x-2)^2$

เมื่อเทียบกับ $y=a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=2, h=2$ และ $k=0$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดวกกลับที่จุด $(2,0)$ และคู่กับกราฟ (ฉ)

6) $y=(x+3)^2-4$

เมื่อเทียบกับ $y=a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=1, h=-3$ และ $k=-4$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดวกกลับที่จุด $(-3,-4)$ และคู่กับกราฟ (ข)

7) $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-3$

เมื่อเทียบกับ $y=a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=-\frac{1}{2}, h=-1$ และ $k=-3$

นั่นคือ กราฟคว่ำลง มีจุดวกกลับที่จุด $(-1,-3)$ และคู่กับกราฟ (จ)

8) $y=-2(x+3)^2+2$

เมื่อเทียบกับ $y=a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=-2, h=-3$ และ $k=2$

นั่นคือ กราฟคว่ำลง มีจุดวกกลับที่จุด $(-3,2)$ และคู่กับกราฟ (ค)

9) $y=x^2-2x+3$

$=(x^2-2x+1)+2$

$=(x-1)^2+2$

เมื่อเทียบกับ $y=a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=1, h=1$ และ $k=2$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดวกกลับที่จุด $(1,2)$ และคู่กับกราฟ (ง)

10) $y=2x^2-4x+5$

$=2(x^2-2x+1)+3$

$=2(x-1)^2+3$

เมื่อเทียบกับ $y=a(x-h)^2+k$

จะได้ $a = 2, h = 1$ และ $k = 3$

นั่นคือ กราฟหงายขึ้น มีจุดวกกลับที่จุด $(1, 3)$ และคู่กับกราฟ (ก)

2. 1) ให้ $y = f(x) = x^2 - 4x - 5$

เขียนให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 4 - 9 \\ &= (x-2)^2 - 9 \end{aligned}$$

จะได้ $a = 1, h = 2$ และ $k = -9$

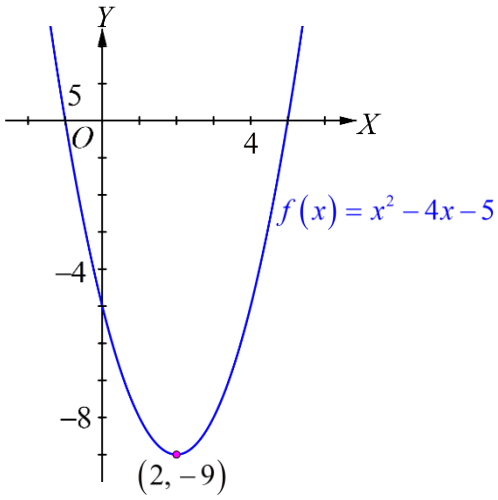
เนื่องจาก $a > 0$ ดังนั้น กราฟของ f จะหงายขึ้น มีจุดวกกลับที่จุด $(2, -9)$

และมีค่าต่ำสุด คือ -9

และจาก $f(x) = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$

จะได้จุดตัดแกน x คือ $(-1, 0)$ และ $(5, 0)$

เขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 4x - 5$ ได้ดังนี้



จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-9, \infty)$

2) ให้ $y = f(x) = -x^2 + 6x - 8$

เขียนให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 6x) - 8 \\ &= -(x^2 - 6x + 9) - 8 + 9 \\ &= -(x-3)^2 + 1 \end{aligned}$$

จะได้ $a = -1, h = 3$ และ $k = 1$

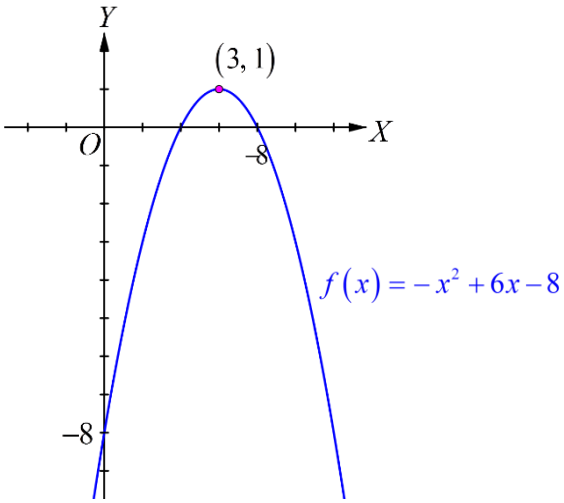
เนื่องจาก $a < 0$ ดังนั้น กราฟของ f จะคว่ำลง มีจุดวกกลับที่จุด $(3, 1)$

และมีค่าสูงสุด คือ 1

และจาก $f(x) = -x^2 + 6x - 8 = -(x^2 - 6x + 8) = -(x-4)(x-2)$

จะได้จุดตัดแกน X คือ $(2, 0)$ และ $(4, 0)$

เขียนกราฟของ $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ ได้ดังนี้



จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = (-\infty, 1]$

3) ให้ $y = f(x) = -x^2 - 2x$

เขียนให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 + 2x) \\ &= -(x^2 + 2x + 1) + 1 \\ &= -(x+1)^2 + 1 \end{aligned}$$

จะได้ $a = -1, h = -1$ และ $k = 1$

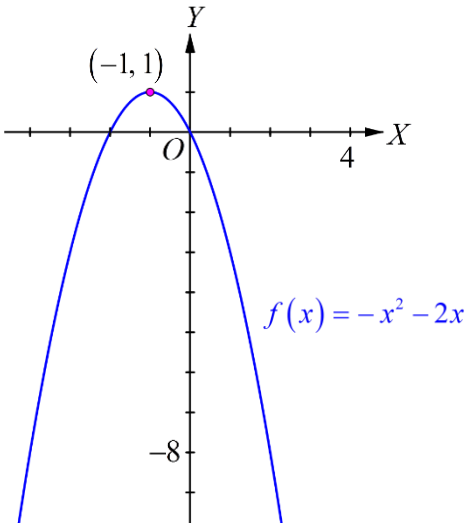
เนื่องจาก $a < 0$ ดังนั้น กราฟของ f จะคว่ำลง มีจุดวกกลับที่จุด $(-1, 1)$

และมีค่าสูงสุด คือ 1

และจาก $f(x) = -x^2 - 2x = -x(x+2)$

จะได้จุดตัดแกน x คือ $(-2, 0)$ และ $(0, 0)$

เขียนกราฟของ $f(x) = -x^2 - 2x$ ได้ดังนี้



จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = (-\infty, 1]$

4) ให้ $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$

เขียนให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 9 - 1 \\ &= (x-3)^2 - 1 \end{aligned}$$

จะได้ $a = 1, h = 3$ และ $k = -1$

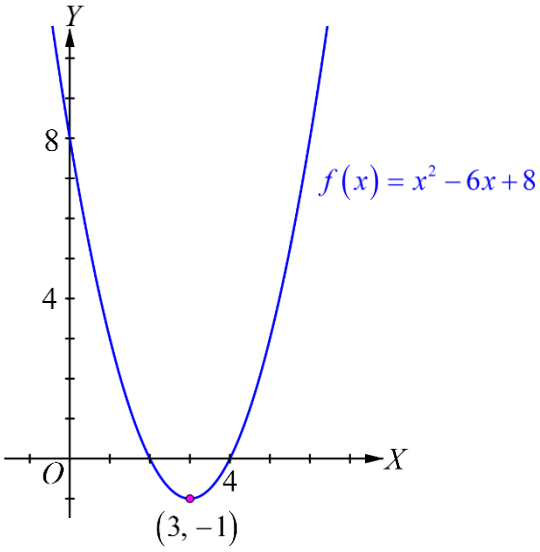
เนื่องจาก $a > 0$ ดังนั้น กราฟของ f จะหงายขึ้น มีจุดวกกลับที่จุด $(3, -1)$

และค่าต่ำสุด คือ -1

และจาก $f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$

จะได้จุดตัดแกน x คือ $(2, 0)$ และ $(4, 0)$

เขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ได้ดังนี้



จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-1, \infty)$

3. 1) ให้ y แทนรายได้จากการขายสินค้า x ชิ้น

จะได้
$$\begin{aligned} y &= x(100-0.1x) \\ &= 100x-0.1x^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการแสดงรายได้จากการขายสินค้า x ชิ้น คือ $y=100x-0.1x^2$

2) จาก $y = 100x-0.1x^2$

เขียนให้อยู่ในรูป $a(x-h)^2+k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y &= -0.1(x^2-1,000x) \\ &= -0.1(x^2-1,000x+500^2)+0.1(500^2) \\ &= -0.1(x-500)^2+25,000 \end{aligned}$$

จะได้ $a=-0.1,\ h=500$ และ $k=25,000$

เนื่องจาก $a<0$ ดังนั้น กราฟของ f จะคว่ำลงและมีจุดวกกลับที่จุด $(500,\ 25000)$

ดังนั้น จะต้องขายสินค้า 500 ชิ้น จึงจะมีรายได้มากที่สุด 25,000 บาท

4. 1) ให้ $f(x)$ แทนรายได้ต่อเดือนของเจ้าของหอพักแห่งนี้

เมื่อ x คือจำนวนห้องว่าง

จะได้
$$\begin{aligned} f(x) &= (80-x)(4,000+200x) \\ &= 320,000+16,000x-4,000x-200x^2 \\ &= -200x^2+12,000x+320,000 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการแสดงรายได้ของเจ้าของหอพักแห่งนี้ คือ

$f(x)=-200x^2+12,000x+320,000$

2) จาก $f(x) = -200x^2 + 12,000x + 320,000$

ถ้าต้องการให้มีรายได้เดือนละ 375,000 บาท

นั่นคือ

$$\begin{aligned} 375,000 &= -200x^2 + 12,000x + 320,000 \\ 0 &= -200x^2 + 12,000x - 55,000 \\ 0 &= x^2 - 60x + 275 \\ 0 &= (x-55)(x-5) \end{aligned}$$

จะได้ $x = 5$ หรือ $x = 55$

ถ้า $x = 5$ เจ้าของหอพักต้องคิดค่าเช่าห้องละ $4,000 + 200(5) = 5,000$ บาท

ถ้า $x = 55$ เจ้าของหอพักต้องคิดค่าเช่าห้องละ $4,000 + 200(55) = 15,000$ บาท

ดังนั้น ถ้าต้องการให้มีรายได้เดือนละ 375,000 บาท เจ้าของหอพักต้องคิดค่าเช่าห้องละ 5,000 บาท หรือ 15,000 บาท

3) จาก $f(x) = -200x^2 + 12,000x + 320,000$

จะมีจุดวกกลับ คือ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

นั่นคือ จะมีจุดวกกลับเมื่อ $x = -\frac{12,000}{2(-200)} = 30$

และ $f(30) = -200(30)^2 + 12,000(30) + 320,000 = 500,000$

ดังนั้น เจ้าของหอพักต้องตั้งราคาห้องละ $4,000 + 200(30) = 10,000$ บาท

จึงทำให้มีรายได้มากที่สุด $500,000$ บาท

5. ให้ x เป็นจำนวนนับจำนวนที่หนึ่ง

y เป็นจำนวนนับอีกจำนวนหนึ่ง

เนื่องจากจำนวนนับสองจำนวนมีผลบวกเป็น 45

จะได้ว่า $x+y = 45$

ดังนั้น $y = 45-x$

เนื่องจากผลคูณของจำนวนทั้งสองจำนวนนี้เป็น 164

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} xy &= 164 \\ x(45-x) &= 164 \\ 45x-x^2 &= 164 \\ x^2-45x+164 &= 0 \\ (x-4)(x-41) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x=4$ หรือ $x=41$

นั่นคือ x มีค่ามากที่สุดเป็น 41

6. **วิธีที่ 1** จาก $x+y^2=6$ จะได้ $y^2=6-x$

เขียน xy^2 ในรูปของ x ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} xy^2 &= x(6-x) \\ &= 6x-x^2 \end{aligned}$$

พิจารณา $f(x)=6x-x^2$

พบว่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นจำนวนลบ ดังนั้นจุดวกกลับของกราฟ $f(x)=6x-x^2$ จะเป็นจุดที่ $f(x)$ มีค่ามากที่สุด และพิกัดของจุดวกกลับของกราฟ $f(x)=ax^2+bx+c$ มี $-\frac{b}{2a}$ เป็นสมาชิกตัวหน้า

จาก $f(x)=6x-x^2$ จะได้ $a=-1$ และ $b=6$

ดังนั้น สมาชิกตัวหน้าของพิกัดของจุดวกกลับ คือ $-\frac{6}{2(-1)}=3$

เนื่องจาก $f(3)=6(3)-(3)^2=9$

ดังนั้น พิกัดของจุดวกกลับของกราฟ คือ $(3, 9)$

จะได้ว่า เมื่อ $x+y^2=6$ ค่ามากที่สุดของ xy^2 คือ 9

วิธีที่ 2 จาก $x+y^2=6$ จะได้ $y^2=6-x$

เขียน xy^2 ในรูปของ x ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} xy^2 &= x(6-x) \\ &= 6x-x^2 \\ &= -(x^2-6x) \\ &= -(x^2-6x+3^2)+3^2 \\ &= -(x-3)^2+9 \end{aligned}$$

พิจารณา $f(x)=-(x-3)^2+9$ เมื่อเทียบกับ $a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=-1, h=3$ และ $k=9$

จะได้ว่า พิกัดของจุดวกกลับของกราฟ คือ $(3, 9)$

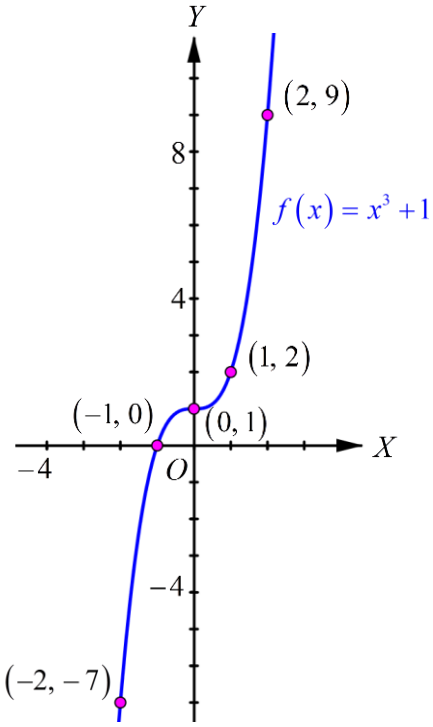
เนื่องจาก จุดวกกลับของกราฟของ $f(x)=-(x-3)^2+9$ จะเป็นจุดที่ $f(x)$ มีค่ามากที่สุด

ดังนั้น เมื่อ $x+y^2=6$ ค่ามากที่สุดของ xy^2 คือ 9

แบบฝึกหัด 1.4ก

1. 1) ให้ $y = f(x) = x^3 + 1$

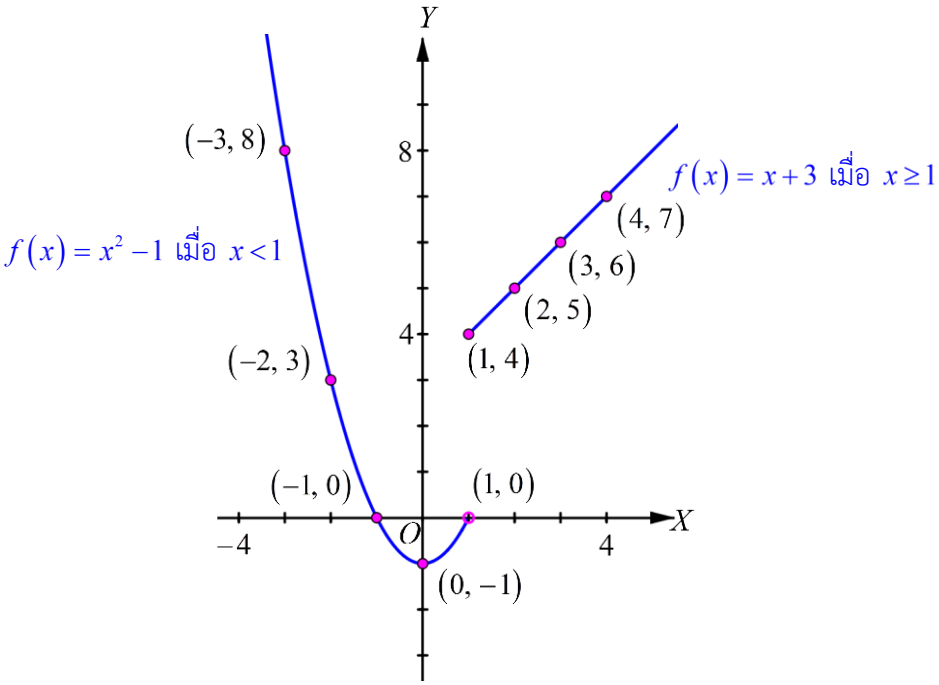
x	–2	–1	0	1	2
y	–7	0	1	2	9



จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

2) ให้ $y = f(x) = \begin{cases} x+3 & , x \geq 1 \\ x^2 - 1 & , x < 1 \end{cases}$

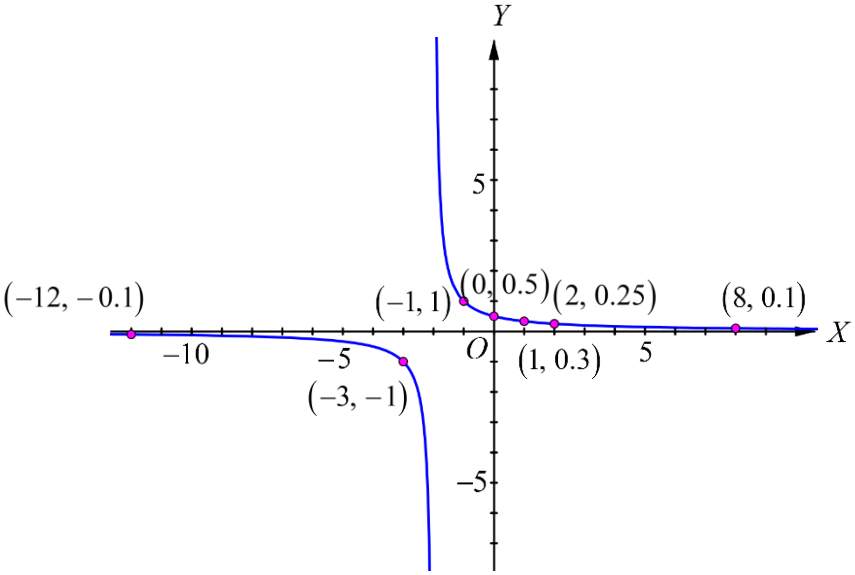
x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	8	3	0	–1	4	5	6	7



จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-1, \infty)$

3) ให้ $y = f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

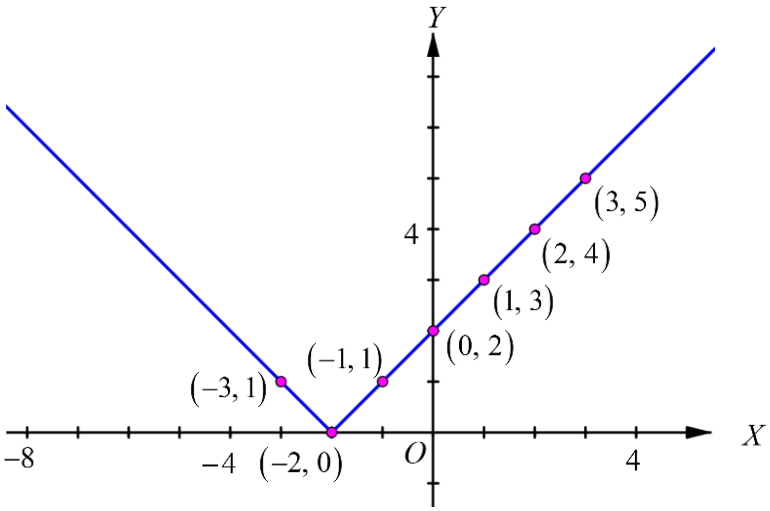
x	–12	–3	–1	0	1	2	8
y	–0.1	–1	1	0.5	0.3	0.25	0.1



จะได้ $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ และ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

4) ให้ $y = f(x) = |x+2|$

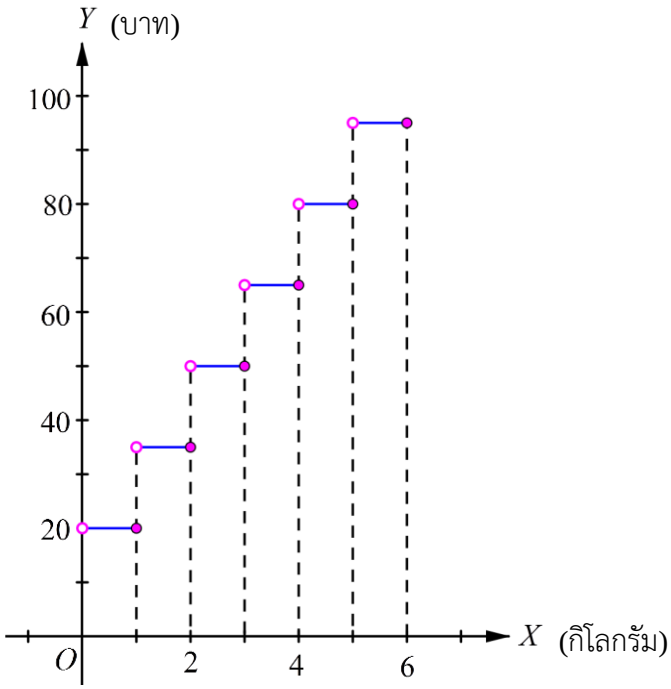
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	1	0	1	2	3	4	5



จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [0,\infty) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

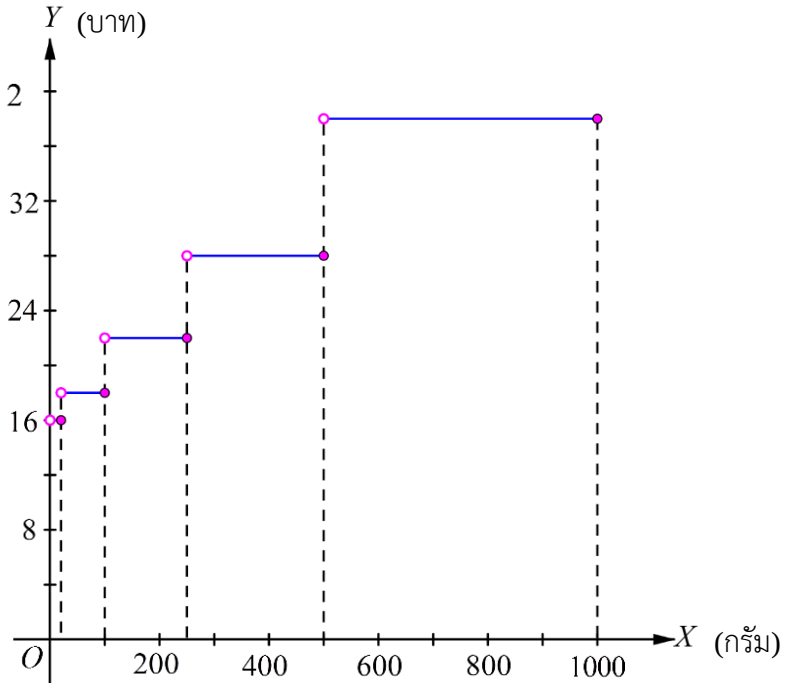
2. เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนน้ำหนักของพัสดุมีหน่วยเป็นกิโลกรัม และ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการในการส่งพัสดุของบริษัทแห่งนี้มีหน่วยเป็นบาท ดังนี้

$$f(x)=\begin{cases} 20.00 & ; 0<x\le 1 \\ 35.00 & ; 1<x\le 2 \\ 50.00 & ; 2<x\le 3 \\ 65.00 & ; 3<x\le 4 \\ 80.00 & ; 4<x\le 5 \\ 95.00 & ; 5<x\le 6 \end{cases}$$



3. เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนน้ำหนักของจดหมายมีหน่วยเป็นกรัม และ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการในการส่งจดหมาย (ไปรษณีย์ลงทะเบียน) ของบริษัทแห่งนี้มีหน่วยเป็นบาท ดังนี้

$$f(x)=\begin{cases}16.00 & ;\ 0<x\le 20\\ 18.00 & ;\ 20<x\le 100\\ 22.00 & ;\ 100<x\le 250\\ 28.00 & ;\ 250<x\le 500\\ 38.00 & ;\ 500<x\le 1{,}000\end{cases}$$

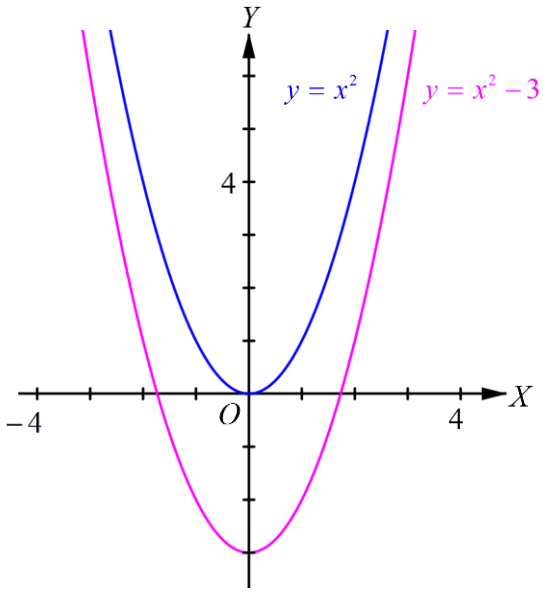


แบบฝึกหัด 1.4ข

1. 1) $f(x) = x^2 - 3$

เริ่มจากกราฟของ $y = x^2$ แล้วเลื่อนลง 3 หน่วย จะได้กราฟของ $y = x^2 - 3$

ดังรูป

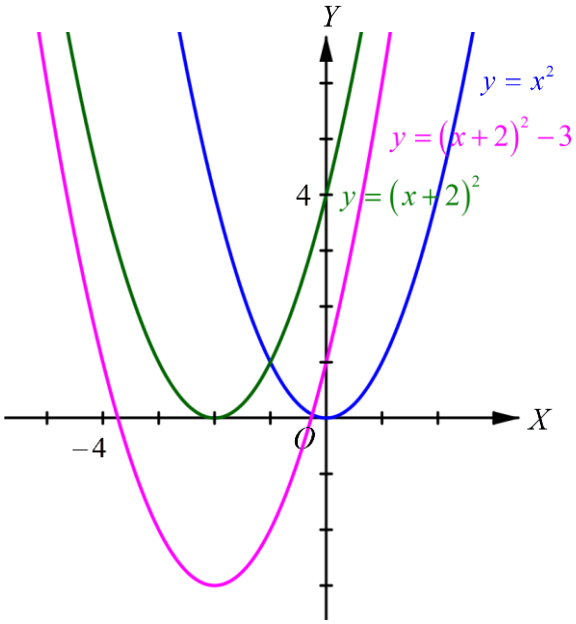


2) $g(x) = (x+2)^2 - 3$

เริ่มจากกราฟของ $y = x^2$ เลื่อนไปทางซ้าย 2 หน่วย จะได้กราฟของ $y = (x+2)^2$

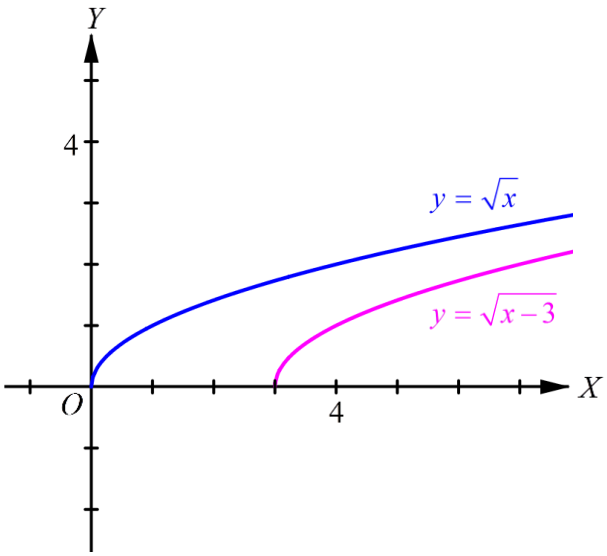
แล้วเลื่อนกราฟของ $y = (x+2)^2$ ลง 3 หน่วย จะได้กราฟของ $y = (x+2)^2 - 3$

ดังรูป



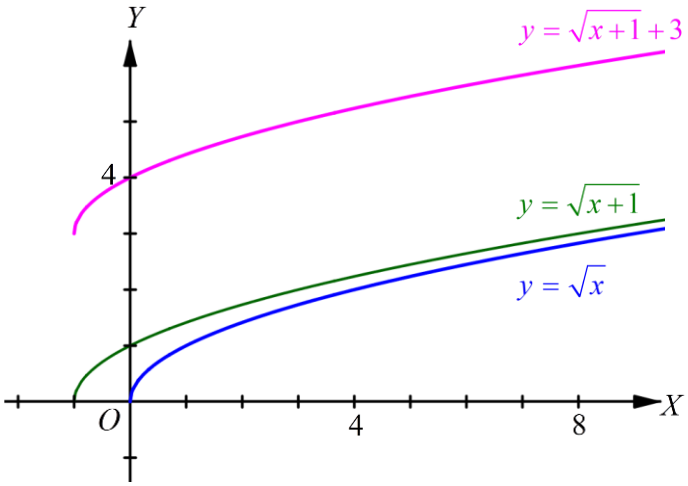
3) $h(x) = \sqrt{x-3}$

เริ่มจากกราฟของ $y = \sqrt{x}$ เลื่อนไปทางขวา 3 หน่วย จะได้กราฟของ $y = \sqrt{x-3}$ ดังรูป



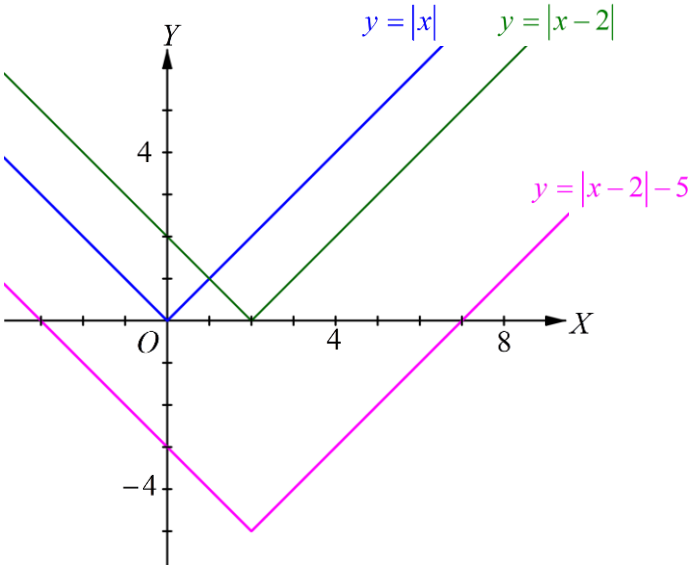
4) $k(x)=\sqrt{x+1}+3$

เริ่มจากกราฟของ $y=\sqrt{x}$ เลื่อนไปทางซ้าย 1 หน่วย จะได้กราฟของ $y=\sqrt{x+1}$ แล้วเลื่อนกราฟของ $y=\sqrt{x+1}$ ขึ้น 3 หน่วย จะได้กราฟของ $y=\sqrt{x+1}+3$ ดังรูป



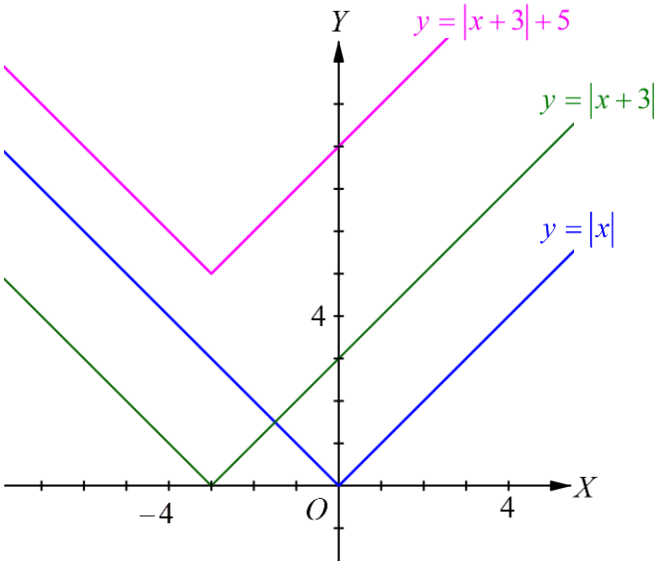
5) $r(x)=|x-2|-5$

เริ่มจากกราฟของ $y=|x|$ เลื่อนไปทางขวา 2 หน่วย จะได้กราฟของ $y=|x-2|$ แล้วเลื่อนกราฟของ $y=|x-2|$ ลง 5 หน่วย จะได้กราฟของ $y=|x-2|-5$ ดังรูป

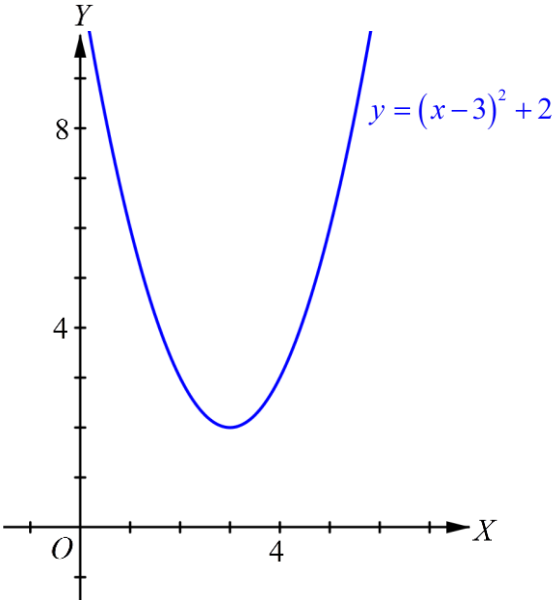


6) $s(x)=|x+3|+5$

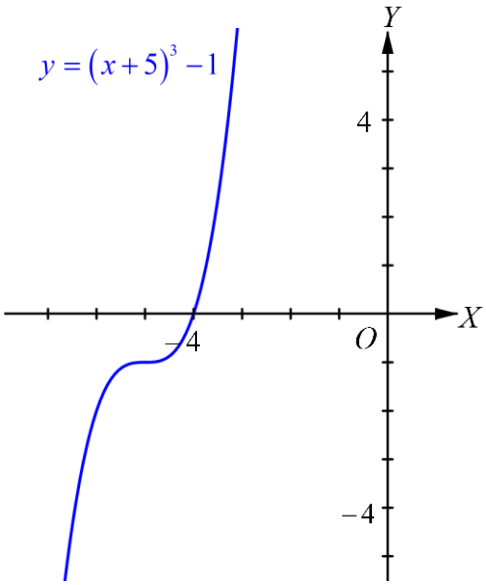
เริ่มจากกราฟของ $y=|x|$ เลื่อนไปทางซ้าย 3 หน่วย จะได้กราฟของ $y=|x+3|$ แล้วเลื่อนกราฟของ $y=|x+3|$ ขึ้น 5 หน่วย จะได้กราฟของ $y=|x+3|+5$ ดังรูป



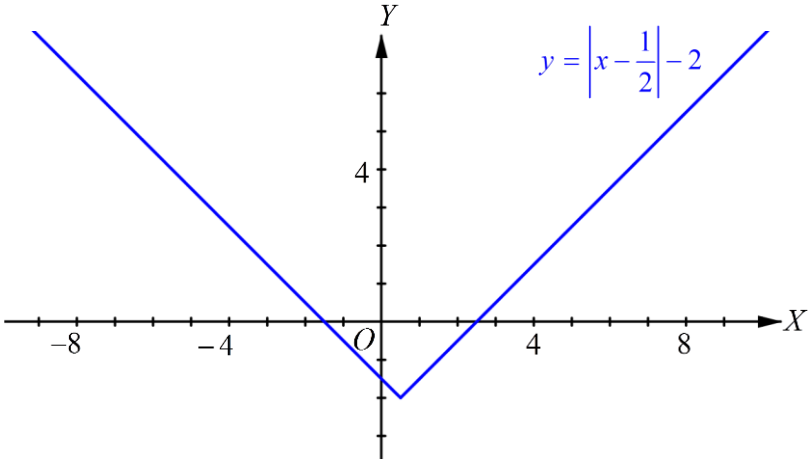
2. 1) สมการของกราฟที่ได้ในขั้นสุดท้าย คือ $y=(x-3)^2+2$ เขียนกราฟได้ดังนี้



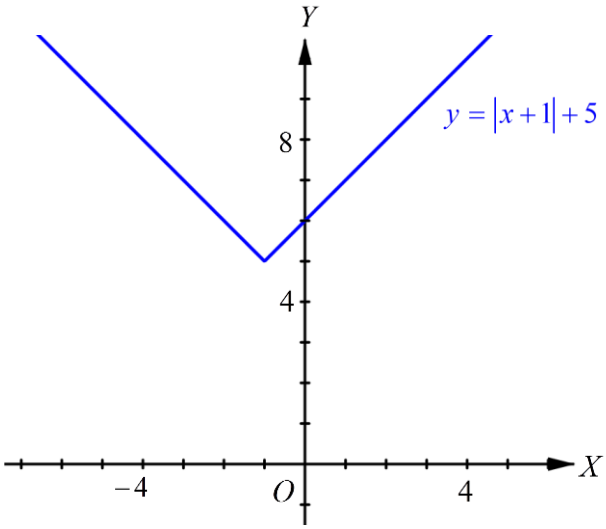
2) สมการของกราฟที่ได้ในขั้นสุดท้าย คือ $y=(x+5)^3-1$ เขียนกราฟได้ดังนี้



3) สมการของกราฟที่ได้ในขั้นสุดท้าย คือ $y = \left|x - \frac{1}{2}\right| - 2$ เขียนกราฟได้ดังนี้



4) สมการของกราฟที่ได้ในขั้นสุดท้าย คือ $y = |x+1| + 5$ เขียนกราฟได้ดังนี้



แบบฝึกหัด 1.5

1. 1) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=0\} = \mathbb{R} - \{2\}$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x^2+x-2$$
$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = x^2-(x-2) = x^2-x+2$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2(x-2) = x^3-2x^2$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x-2}$$

2) โดเมนของ f คือ $[-3,3]$ และโดเมนของ g คือ $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty)$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = [-3,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},3]$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=0\} = [-3,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},3]$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-2}$$
$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \sqrt{9-x^2}-\sqrt{x^2-2}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \left(\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{x^2-2}\right) = \sqrt{-x^4+11x^2-18}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-2}} = \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2-2}}$$

3) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=0\} = \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (x^3+4x^2)+(3x^2+1) = x^3+7x^2+1$$
$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = (x^3+4x^2)-(3x^2+1) = x^3+x^2-1$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^3+4x^2)(3x^2+1) = 3x^5+12x^4+x^3+4x^2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3+4x^2}{3x^2+1}$$

4) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}-\{0\}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R}-\{-2\}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = \mathbb{R}-\{-2,0\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=0\} = \mathbb{R}-\{-2,\ 0\}$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{2}{x}+\left(-\frac{4}{x+2}\right) = \frac{4-2x}{x^2+2x}$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \frac{2}{x}-\left(-\frac{4}{x+2}\right) = \frac{6x+4}{x^2+2x}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{2}{x}\cdot\left(-\frac{4}{x+2}\right) = -\frac{8}{x^2+2x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2}{x}}{\left(-\frac{4}{x+2}\right)} = \frac{-x-2}{2x}$$

5) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของ g คือ $(-\infty,1]$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = (-\infty,1]$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=0\} = (-\infty,1)$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x}$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{1-x} = \sqrt{-x^3+x^2-x+1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}$$

6) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}-\{-2\}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R}-\{1\}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = \mathbb{R}-\{-2,1\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=0\} = \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{1}{x+2}+\frac{x}{x-1} = \frac{x^2+3x-1}{x^2+x-2}$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \frac{1}{x+2}-\frac{x}{x-1} = \frac{-x^2-x-1}{x^2+x-2}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{1}{x+2}\cdot\frac{x}{x-1} = \frac{x}{x^2+x-2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x^2+2x}$$

2. 1) ให้ $g(x)=\sqrt{x}$ และ $h(x)=\sqrt{2-x}$ ดังนั้น $f(x)=g(x)+h(x)$

โดเมนของ g คือ $[0,\infty)$ และโดเมนของ h คือ $(-\infty,2]$

ดังนั้น โดเมนของ f คือ $D_g \cap D_h = [0, 2]$

2) ให้ $g(x)=\sqrt{x+2}$ และ $h(x)=\frac{1}{x}$ ดังนั้น $f(x)=g(x)-h(x)$

โดเมนของ g คือ $[-2,\infty)$ และโดเมนของ h คือ $\mathbb{R}-\{0\}$

ดังนั้น โดเมนของ f คือ $D_g \cap D_h = [-2,0)\cup(0,\infty)$

3) ให้ $g(x)=(x+2)^2$ และ $h(x)=(x-4)^{\frac{1}{4}}$ ดังนั้น $f(x)=g(x)\cdot h(x)$

โดเมนของ g คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของ h คือ $[4,\infty)$

ดังนั้น โดเมนของ f คือ $D_f \cap D_h = [4,\infty)$

4) ให้ $g(x)=\sqrt{x+5}$ และ $h(x)=x-1$ ดังนั้น $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

โดเมนของ g คือ $[-5,\infty)$ และโดเมนของ h คือ $\mathbb{R}$

ดังนั้น โดเมนของ f คือ $\{x \mid x \in D_g \cap D_h$ และ $h(x) \neq 0\} = [-5,1)\cup(1,\infty)$

3. จาก $f(x)=3x-5$ จะได้ $D_f=\mathbb{R}$ และ $R_f=\mathbb{R}$

จาก $g(x)=1-x^2$ จะได้ $D_g=\mathbb{R}$ และ $R_g=(-\infty,1]$

1) เนื่องจาก $g(0)=1-0^2=1$, $f(1)=3(1)-5=-2$,

$f(0)=3(0)-5=-5$, $g(-5)=1-(-5)^2=-24$

ดังนั้น $f(g(0))=f(1)=-2$ และ $g(f(0))=g(-5)=-24$

2) เนื่องจาก $f(4)=3(4)-5=7$, $f(7)=3(7)-5=16$,

$g(1)=1-1^2=0$, $g(0)=1-0^2=1$

ดังนั้น $f(f(4))=f(7)=16$ และ $g(g(1))=g(0)=1$

3) เนื่องจาก $g(-2)=1-(-2)^2=-3$, $f(-3)=3(-3)-5=-14$,

$f(-2)=3(-2)-5=-11$, $g(-11)=1-(-11)^2=-120$

ดังนั้น $f\circ g(-2)=f(g(-2))=f(-3)=-14$ และ

$g\circ f(-2)=g(f(-2))=g(-11)=-120$

4) เนื่องจาก $f(-1)=3(-1)-5=-8$, $f(-8)=3(-8)-5=-29$,

$g(2)=1-2^2=-3$, $g(-3)=1-(-3)^2=-8$

ดังนั้น $f\circ f(-1)=f(f(-1))=f(-8)=-29$ และ

$g\circ g(2)=g(g(2))=g(-3)=-8$

4. เนื่องจาก $D_f=\{-3,0,2\}$, $D_g=\{-3,1,2\}$ และ $D_h=\{1,2\}$

1) โดเมนของ $f+g$ คือ $D_f\cap D_g=\{-3,2\}$

$(f+g)(-3) = f(-3)+g(-3) = 1+3 = 3$ จะได้ $(-3,3)\in f+g$

$(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 0+6 = 6$ จะได้ $(2,6)\in f+g$

ดังนั้น $f+g=\{(-3,3),(2,6)\}$

2) โดเมนของ $f-g$ คือ $D_f\cap D_g=\{-3,2\}$

$(f-g)(-3) = f(-3)-g(-3) = 1-2 = -1$ จะได้ $(-3,-1)\in f-g$

$(f-g)(2) = f(2)-g(2) = 0-6 = -6$ จะได้ $(2,-6)\in f-g$

ดังนั้น $f-g=\{(-3,-1),(2,-6)\}$

3) โดเมนของ $g-f$ คือ $D_g \cap D_f = \{-3,\ 2\}$

$(g-f)(-3) = g(-3)-f(-3) = 2-1 = 1$ จะได้ $(-3,1)\in g-f$

$(g-f)(2) = g(2)-f(2) = 6-0 = 6$ จะได้ $(2,6)\in g-f$

ดังนั้น $g-f=\{(-3,1),(2,6)\}$

4) โดเมนของ fg คือ $D_f \cap D_g = \{-3,\ 2\}$

$(fg)(-3) = f(-3)g(-3) = 1\times 2 = 2$ จะได้ $(-3,2)\in fg$

$(fg)(2) = f(2)g(2) = 0\times 6 = 0$ จะได้ $(2,0)\in fg$

ดังนั้น $fg=\{(-3,2),(2,0)\}$

5) โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x\in D_g \mid g(x)=0\} = \{-3,\ 2\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(-3) = \frac{f(-3)}{g(-3)} = \frac{1}{2}$ จะได้ $\left(-3,\frac{1}{2}\right)\in \frac{f}{g}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{0}{6} = 0$ จะได้ $(2,0)\in \frac{f}{g}$

ดังนั้น $\frac{f}{g}=\left\{\left(-3,\frac{1}{2}\right),(2,0)\right\}$

6) โดเมนของ $\frac{g}{f}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x\in D_g \mid g(x)=0\} = \{-3\}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(-3) = \frac{g(-3)}{f(-3)} = \frac{2}{1} = 2$ จะได้ $(-3,2)\in \frac{g}{f}$

ดังนั้น $\frac{g}{f}=\{(-3,2)\}$

7) $D_f = \{-3, 0, 2\}$, $D_g = \{-3, 1, 2\}$ และ $R_g = \{2, 6\}$

จะได้ $R_g \cap D_f = \{2\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$

เนื่องจาก $g(-3) = 2$ และ $f(2) = 0$

ดังนั้น $f \circ g(-3) = f(g(-3)) = f(2) = 0$

เนื่องจาก $g(1) = 2$ และ $f(2) = 0$

ดังนั้น $f \circ g(1) = f(g(1)) = f(2) = 0$

เนื่องจาก $g(2) = 6$ แต่ 6 ไม่อยู่ในโดเมนของ f

ดังนั้น 2 ไม่อยู่ในโดเมนของ $f \circ g$

จะได้ $f \circ g = \{(-3, 0), (1, 0)\}$

8) $D_g = \{-3, 1, 2\}$, $D_f = \{-3, 0, 2\}$ และ $R_f = \{0, 1, 4\}$

จะได้ $R_f \cap D_g = \{1\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$

เนื่องจาก $f(-3) = 1$ และ $g(1) = 2$

ดังนั้น $g \circ f(-3) = g(f(-3)) = g(1) = 2$

เนื่องจาก $f(0) = 4$ แต่ 4 ไม่อยู่ในโดเมนของ g

ดังนั้น 0 ไม่อยู่ในโดเมนของ $g \circ f$

เนื่องจาก $f(2) = 0$ แต่ 0 ไม่อยู่ในโดเมนของ g

ดังนั้น 2 ไม่อยู่ในโดเมนของ $g \circ f$

จะได้ $g \circ f = \{(-3, 2)\}$

9) $D_f = \{-3, 0, 2\}$, $D_h = \{1, 2\}$ และ $R_h = \{0, 4\}$

จะได้ $R_h \cap D_f = \{0\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ h$

เนื่องจาก $h(1) = 0$ และ $f(0) = 4$

ดังนั้น $f \circ h(1) = f(h(1)) = f(0) = 4$

เนื่องจาก $h(2)=4$ แต่ 4 ไม่อยู่ในโดเมนของ f

ดังนั้น 2 ไม่อยู่ในโดเมนของ $f\circ h$

จะได้ $f\circ h=\{(1,4)\}$

10) $D_h=\{1,\ 2\}$, $D_f=\{-3,\ 0,\ 2\}$ และ $R_f=\{0,\ 1,\ 4\}$

จะได้ $R_f\cap D_h=\{1\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $h\circ f$

เนื่องจาก $f(-3)=1$ และ $h(1)=0$

ดังนั้น $h\circ f(-3)=h(f(-3))=h(1)=0$

เนื่องจาก $f(0)=4$ แต่ 4 ไม่อยู่ในโดเมนของ h

ดังนั้น 0 ไม่อยู่ในโดเมนของ $h\circ f$

เนื่องจาก $f(2)=0$ แต่ 0 ไม่อยู่ในโดเมนของ h

ดังนั้น 2 ไม่อยู่ในโดเมนของ $h\circ f$

จะได้ $h\circ f=\{(-3,0)\}$

11) $D_h=\{1,\ 2\}$, $D_g=\{-3,\ 1,\ 2\}$ และ $R_g=\{2,\ 6\}$

จะได้ $R_g\cap D_h=\{2\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $h\circ g$

เนื่องจาก $g(-3)=2$ และ $h(2)=4$

ดังนั้น $h\circ g(-3)=h(g(-3))=h(2)=4$

เนื่องจาก $g(1)=2$ และ $h(2)=4$

ดังนั้น $h\circ g(1)=h(g(1))=h(2)=4$

เนื่องจาก $g(2)=6$ แต่ 6 ไม่อยู่ในโดเมนของ h

ดังนั้น 2 ไม่อยู่ในโดเมนของ $h\circ g$

จะได้ $h\circ g=\{(-3,4),(1,4)\}$

12) $D_g = \{-3, 1, 2\}$, $D_h = \{1, 2\}$ และ $R_h = \{0, 4\}$

จะได้ $R_h \cap D_g = \varnothing$

ดังนั้น ไม่มี $g \circ h$

5. 1) จาก $f(x) = 3x + 2$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

จาก $g(x) = 4x - 1$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - 1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f\circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(4x-1) \\ &= 3(4x-1)+2 \\ &= 12x-1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = 12x - 1$ โดยที่ $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_g = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g\circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(3x+2) \\ &= 4(3x+2)-1 \\ &= 12x+7 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = 12x + 7$ โดยที่ $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f\circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f\circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f(3x+2) \\ &= 3(3x+2)+2 \\ &= 9x+8 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ f(x) = 9x+8$ โดยที่ $D_{f\circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g\circ g} &= \{x \in D_g \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 4x-1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g\circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(4x-1) \\ &= 4(4x-1)-1 \\ &= 16x-5 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = 16x-5$ โดยที่ $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$

2) จาก $f(x) = x^2$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [0,\infty)$

จาก $g(x) = x+5$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x+5 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f\circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x+5) \\ &= (x+5)^2 \\ &= x^2 + 10x + 25 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = x^2 + 10x + 25$ โดยที่ $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [0,\infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g\circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= x^2 + 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = x^2 + 5$ โดยที่ $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_f = [0,\infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f\circ f} &= \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_f \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f\circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= (x^2)^2 \\ &= x^4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ f(x) = x^4$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x+5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x+5) \\ &= (x+5)+5 \\ &= x+10 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = x+10$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

3) จาก $f(x) = \frac{1}{x}$ จะได้ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ และ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

จาก $g(x) = 2x+3$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+3 \in \mathbb{R} - \{0\}\} \\ &= \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x+3) \\ &= \frac{1}{2x+3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{3}{2} \right\}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} \,\middle|\, \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g \circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{x}\right) + 3 \\ &= \frac{2}{x} + 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = \dfrac{2}{x} + 3$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ f} &= \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_f \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} \,\middle|\, \frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{0\} \right\} \\ &= \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x}} \\ &= x \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ f(x) = x$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(2x+3) \\ &= 2(2x+3)+3 \\ &= 4x+9 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = 4x+9$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

4) จาก $f(x) = |x|$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [0, \infty)$

จาก $g(x) = 2x-5$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x-5) \\ &= |2x-5| \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = |2x-5|$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [0, \infty]$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g \circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(|x|) \\ &= 2|x|-5 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = 2|x|-5$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_f = [0, \infty]$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f(|x|) \\ &= ||x|| \\ &= |x| \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ f(x) = |x|$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g\circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(2x-5) \\ &= 2(2x-5)-5 \\ &= 4x-15 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = 4x-15$ โดยที่ $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$

5) จาก $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ จะได้ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ และ $R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

จาก $g(x) = 2x-3$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-3 \in \mathbb{R} - \{0\}\} \\ &= \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f\circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x-3) \\ &= \frac{(2x-3)+1}{2x-3} \\ &= \frac{2x-2}{2x-3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = \dfrac{2x-2}{2x-3}$ โดยที่ $D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} \,\middle|\, \frac{x+1}{x} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g\circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= 2\left(\frac{x+1}{x}\right) - 3 \\ &= \frac{2-x}{x} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = \dfrac{2-x}{x}$ โดยที่ $D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f\circ f} &= \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_f \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} \,\middle|\, \frac{x+1}{x} \in \mathbb{R} - \{0\} \right\} \\ &= \mathbb{R} - \{-1, 0\} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f\circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f\left(\frac{x+1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)+1}{\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

$$= \frac{2x+1}{x+1}$$

ดังนั้น $f \circ f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2x-3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(2x-3) \\ &= 2(2x-3)-3 \\ &= 4x-9 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = 4x-9$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

6) จาก $f(x) = \sqrt[3]{x}$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

จาก $g(x) = \sqrt{x}$ จะได้ $D_g = [0, \infty)$ และ $R_g = [0, \infty)$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = [0, \infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in [0, \infty] \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \\ &= [0, \infty) \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt[6]{x} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = \sqrt[6]{x}$ โดยที่ $D_{f \circ g} = [0, \infty)$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [0, \infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x} \in [0, \infty)\} \\ &= [0, \infty) \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g \circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt[3]{x}) \\ &= \sqrt{\sqrt[3]{x}} \\ &= \sqrt[6]{x} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = \sqrt[6]{x}$ โดยที่ $D_{g \circ f} = [0, \infty)$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ f$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ f}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f(\sqrt[3]{x}) \\ &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}} \\ &= \sqrt[9]{x} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ f(x) = \sqrt[9]{x}$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = [0, \infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in [0, \infty) \mid \sqrt{x} \in [0, \infty)\} \\ &= [0, \infty) \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{g \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt[4]{x} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = \sqrt[4]{x}$ โดยที่ $D_{g \circ g} = [0, \infty)$

6. จาก $f(x) = x^4 + 4$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [4, \infty)$

จาก $g(x) = x - 5$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}$

จาก $h(x) = \sqrt{x}$ จะได้ $D_h = [0, \infty)$ และ $R_h = [0, \infty)$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x - 5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x-5) \\ &= (x-5)^4 + 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = (x-5)^4 + 4$ โดยที่ $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_h \cap D_{f\circ g} = [0,\infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $(f\circ g)\circ h$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{(f\circ g)\circ h} &= \{x\in D_h \mid h(x)\in D_{f\circ g}\} \\ &= \{x\in[0,\infty) \mid \sqrt{x}\in\mathbb{R}\} \\ &= [0,\infty) \end{aligned}$$

สำหรับ $x\in D_{(f\circ g)\circ h}$ จะได้

$$\begin{aligned} (f\circ g)\circ h(x) &= f\circ g(h(x)) \\ &= f\circ g(\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x}-5)^4+4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(f\circ g)\circ h(x) = (\sqrt{x}-5)^4+4$ โดยที่ $D_{(f\circ g)\circ h} = [0,\infty)$

- เนื่องจาก $R_h \cap D_g = [0,\infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g\circ h$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g\circ h} &= \{x\in D_h \mid h(x)\in D_g\} \\ &= \{x\in[0,\infty) \mid \sqrt{x}\in\mathbb{R}\} \\ &= [0,\infty) \end{aligned}$$

สำหรับ $x\in D_{g\circ h}$ จะได้

$$\begin{aligned} g\circ h(x) &= g(h(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{x}-5 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g\circ h(x) = \sqrt{x}-5$ โดยที่ $D_{g\circ h} = [0,\infty)$ และ $R_{g\circ h} = [-5,\infty)$

- เนื่องจาก $R_{g\circ h} \cap D_f = [-5,\infty)$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f\circ(g\circ h)$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f\circ(g\circ h)} &= \{x\in D_{g\circ h} \mid g\circ h(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in[0,\infty) \mid \sqrt{x}-5\in\mathbb{R}\} \\ &= [0,\infty) \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f\circ(g\circ h)}$ จะได้

$$\begin{aligned} f\circ(g\circ h)(x) &= f\left(g\circ h(x)\right) \\ &= f\left(\sqrt{x}-5\right) \\ &= \left(\sqrt{x}-5\right)^4+4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f\circ(g\circ h)(x)=\left(\sqrt{x}-5\right)^4+4$ โดยที่ $D_{f\circ(g\circ h)}=[0,\infty)$

7. 1) จาก $h(x)=(x-9)^8$

ให้ $f(x)=x^8$ และ $g(x)=x-9$

จะได้

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f\left(g(x)\right) \\ &= f(x-9) \\ &= (x-9)^8 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

2) จาก $h(x)=\sqrt{x}+5$

ให้ $f(x)=x+5$ และ $g(x)=\sqrt{x}$

จะได้

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f\left(g(x)\right) \\ &= f\left(\sqrt{x}\right) \\ &= \sqrt{x}+5 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

3) จาก $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2}$

ให้ $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ และ $g(x)=x^2$

จะได้

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f\left(g(x)\right) \\ &= f\left(x^2\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{x^2+2}$$
$$= h(x)$$

4) จาก $h(x) = \frac{1}{x+10}$

ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = x+10$

จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x+10) \\ &= \frac{1}{x+10} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

5) จาก $h(x) = |1-x^5|$

ให้ $f(x) = |1-x|$ และ $g(x) = x^5$

จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^5) \\ &= |1-x^5| \\ &= h(x) \end{aligned}$$

6) จาก $h(x) = \sqrt{2+\sqrt{x}}$

ให้ $f(x) = \sqrt{2+x}$ และ $g(x) = \sqrt{x}$

จะได้

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{x}) \\ &= \sqrt{2+\sqrt{x}} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

8. จาก $h(x) = 4x^2+4x+7$

จะได้ $h(x) = (4x^2+4x+1)+6$

$= (2x+1)^2+6$

$= (g(x))^2+6$

ให้ $f(x)=x^2+6$

จะได้ $f\circ g(x)=f(g(x))=[g(x)]^2+6=h(x)$

ดังนั้น $f(x)=x^2+6$

แบบฝึกหัด 1.6

1. 1) $f^{-1}(10) = f^{-1}(f(3)) = 3$

2) $f(-4) = f(f^{-1}(3)) = 3$

3) $f^{-1}(18) = f^{-1}(f(10)) = 10$

4) $f(3) = f(f^{-1}(4)) = 4$

5) **วิธีที่ 1** จาก $f(x)=5+2x$

ให้ $y=f(x)$ จะได้ $y=5+2x$ ดังนั้น $x=\dfrac{y-5}{2}$

สลับ x กับ y จะได้ $y=\dfrac{x-5}{2}$

จะได้ $f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{2}$

ดังนั้น $f^{-1}(10)=\dfrac{10-5}{2}=\dfrac{5}{2}$

วิธีที่ 2 จาก $f(x)=5+2x$

หา x ที่ทำให้ $f(x) = 10$

$5+2x = 10$

จะได้ $x = \frac{5}{2}$

นั่นคือ $f\left(\frac{5}{2}\right) = 10$

ดังนั้น $f^{-1}(10) = f^{-1}\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \frac{5}{2}$

6) จาก $f(x) = x^2 + 4x$ เมื่อ $x \geq -2$

หา x ที่ทำให้

$$\begin{aligned} f(x) &= 12 \\ x^2 + 4x &= 12 \\ x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ (x-2)(x+6) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 2$ หรือ $x = -6$

เนื่องจาก $x \geq -2$ จะได้ $x = 2$

นั่นคือ $f(2) = 12$

ดังนั้น $f^{-1}(12) = f^{-1}(f(2)) = 2$

2. 1) จาก $f(x) = 2x + 5$

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ว่า $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

ทำให้ $x_1 = x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และโดยทฤษฎีบท f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

พิจารณาหาฟังก์ชันผกผันของ f โดยให้ $f(x) = y = 2x + 5$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้

$$\begin{aligned} 2x &= y - 5 \\ x &= \frac{y-5}{2} \end{aligned}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\frac{x-5}{2}$

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x)=\frac{x-5}{2}$

2) จาก $f(x)=\frac{1}{x}$

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}$

ทำให้ $x_1=x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และโดยทฤษฎีบท f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

พิจารณาหาฟังก์ชันผกผันของ f โดยให้ $f(x)=y=\frac{1}{x}$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $x = \frac{1}{y}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\frac{1}{x}$

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$

3) จาก $f(x)=x^2-4$, $x\geq 0$

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1, x_2 \geq 0$ และ $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า $x_1^2-4=x_2^2-4$, $x_1, x_2 \geq 0$

ทำให้ $x_1=x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และโดยทฤษฎีบท f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

พิจารณาหาฟังก์ชันผกผันของ f โดยให้ $f(x)=y=x^2-4, x\geq 0$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $x^2 = y+4$

$x = \sqrt{y+4}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\sqrt{x+4},\ x\geq -4$

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4},\ x\geq -4$

4) จาก $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า $\dfrac{1}{x_1-3}=\dfrac{1}{x_2-3}$

ทำให้ $x_1=x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และโดยทฤษฎีบท f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

พิจารณาหาฟังก์ชันผกผันของ f โดยให้ $f(x)=y=\dfrac{1}{x-3}$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $x-3 = \dfrac{1}{y}$

$x = \dfrac{1}{y}+3$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\dfrac{1}{x}+3$

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}+3$

5) จาก $f(x)=\sqrt{x}-1$

ให้ x_1, x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า $\sqrt{x_1}-1=\sqrt{x_2}-1$

ทำให้ $x_1=x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และโดยทฤษฎีบท f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

พิจารณาหาฟังก์ชันผกผันของ f โดยให้ $f(x)=y=\sqrt{x}-1$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้

$$y+1 = \sqrt{x}$$

$$x = (y+1)^2$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=(x+1)^2,\ x\geq -1$

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน คือ $f^{-1}(x)=(x+1)^2,\ x\geq -1$

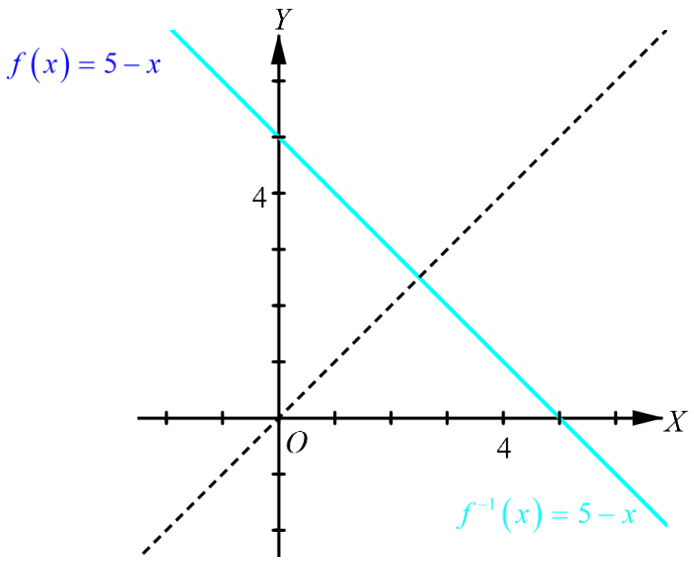
3. 1) จาก $y=f(x)=5-x$

หา x ในพจน์ของ y จะได้ $x=5-y$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=5-x$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=5-x$

เขียนกราฟของ f และ f^{-1} ได้ดังนี้



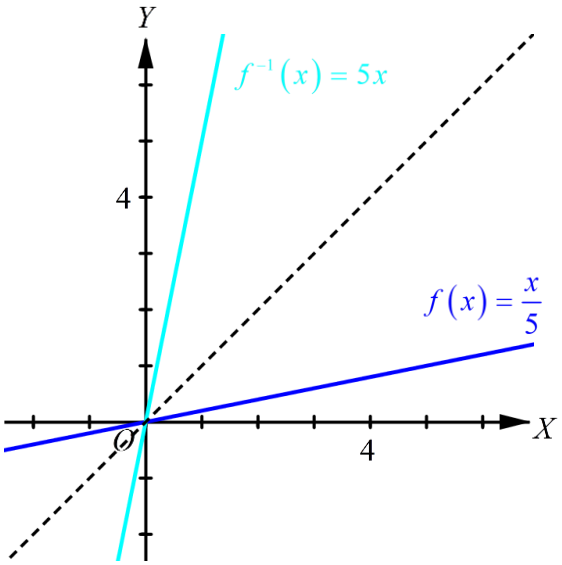
2) จาก $y = f(x) = \frac{x}{5}$

หา x ในพจน์ของ y จะได้ $x = 5y$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = 5x$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = 5x$

เขียนกราฟของ f และ f^{-1} ได้ดังนี้



3) จาก $y = f(x) = \frac{5-2x}{1+3x}$

หา x ในพจน์ของ y

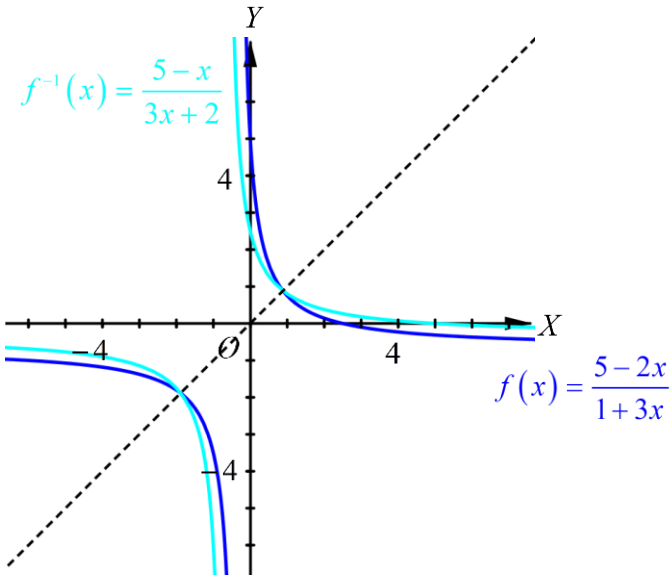
จะได้

$$\begin{aligned} y(1+3x) &= 5-2x \\ y+3xy &= 5-2x \\ 3xy+2x &= 5-y \\ x(3y+2) &= 5-y \\ x &= \frac{5-y}{3y+2} \quad \text{เมื่อ} \quad y \neq -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\dfrac{5-x}{3x+2}$ เมื่อ $x\neq -\dfrac{2}{3}$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=\dfrac{5-x}{3x+2}$ เมื่อ $x\neq -\dfrac{2}{3}$

เขียนกราฟของ f และ f^{-1} ได้ดังนี้



4) จาก $y=f(x)=5-x^2$, $x\geq 0$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $x^2 = 5-y$

$x = \pm\sqrt{5-y}$ เมื่อ $y\leq 5$

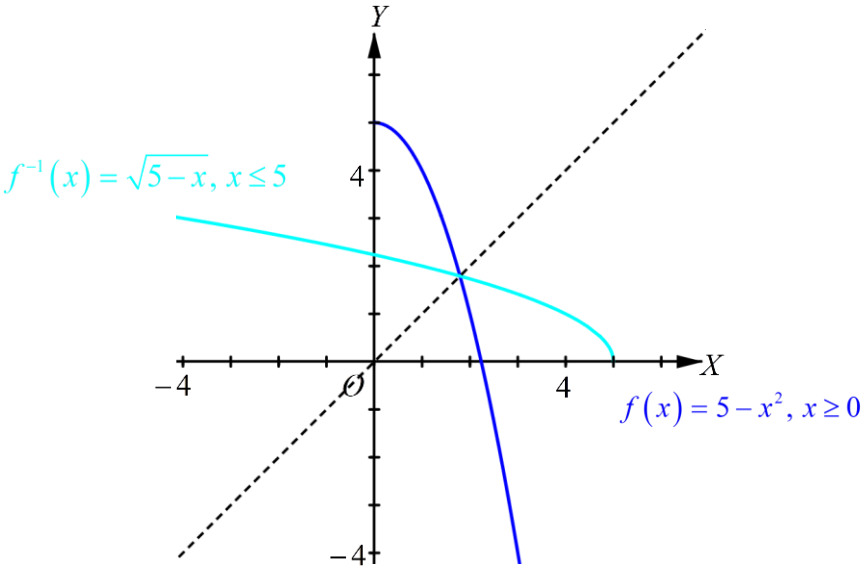
เนื่องจาก $x\geq 0$ ดังนั้น $x=\sqrt{5-y}$ เมื่อ $y\leq 5$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y

จะได้ $y=\sqrt{5-x}$ เมื่อ $x\leq 5$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=\sqrt{5-x}$ เมื่อ $x\leq 5$

เขียนกราฟของ f และ f^{-1} ได้ดังนี้



5) จาก $y=f(x)=1+\sqrt{x+1}$ จะได้ $R_f=[1,\infty)$ ซึ่งเป็นโดเมนของ f^{-1}

หา x ในพจน์ของ y

จะได้

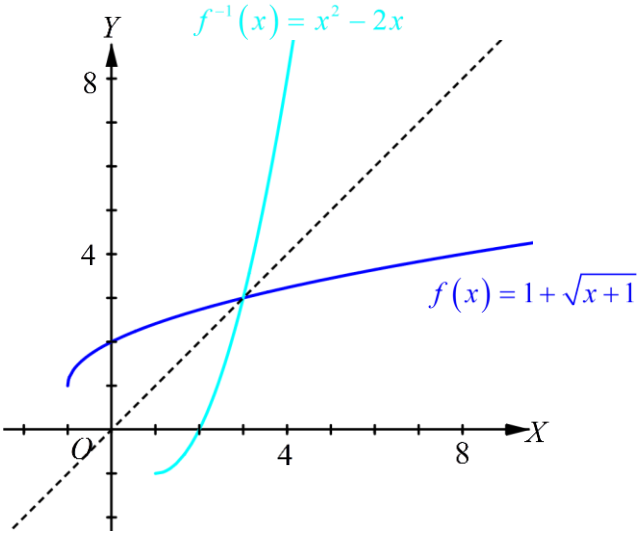
$$\begin{aligned} y-1 &= \sqrt{x+1} \\ (y-1)^2 &= x+1 \\ x &= (y-1)^2-1 \\ x &= y^2-2y \end{aligned}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y

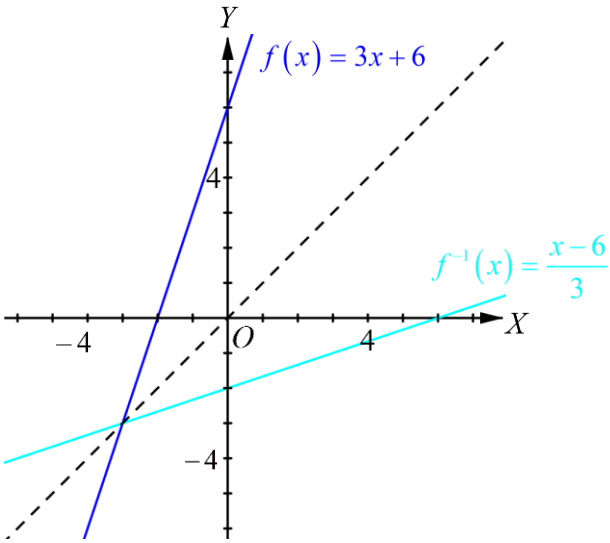
จะได้ $y=x^2-2x$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=x^2-2x$ โดยที่ $D_{f^{-1}}=[1,\infty)$

เขียนกราฟของ f และ f^{-1} ได้ดังนี้



4. ก. เขียนกราฟของ f และ f^{-1} ได้ดังนี้



ให้ $y = 3x + 6$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $3x = y-6$

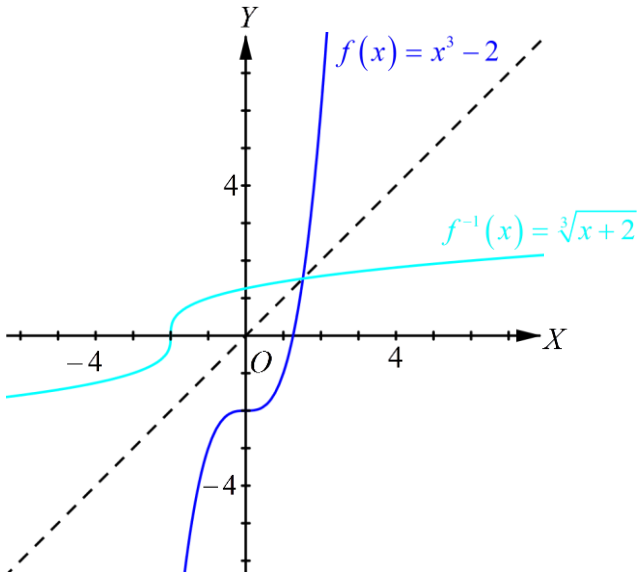
$x = \dfrac{y-6}{3}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y

จะได้ $y = \dfrac{x-6}{3}$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \dfrac{x-6}{3}$

ข. เขียนกราฟของ f และ f^{-1} ได้ดังนี้



ให้ $y = x^3 - 2$

หา x ในพจน์ของ y

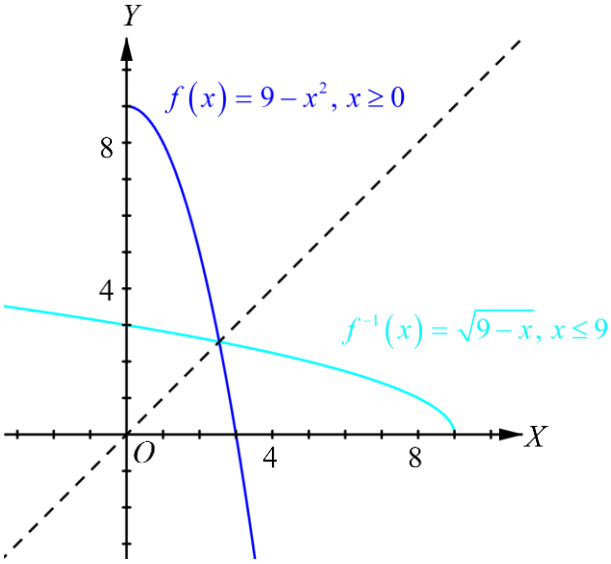
จะได้ $x^3 = y+2$

$x = \sqrt[3]{y+2}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = \sqrt[3]{x+2}$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$

ค. เขียนกราฟของ f และ f^{-1} ได้ดังนี้



ให้ $y = 9 - x^2,\ x \geq 0$

หา x ในพจน์ของ y จะได้

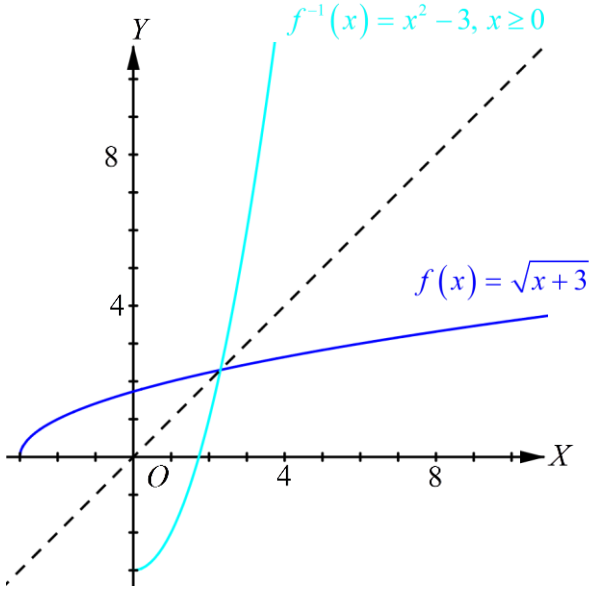
$$x^2 = 9 - y$$

เนื่องจาก $x \geq 0$ ดังนั้น $x = \sqrt{9-y}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = \sqrt{9-x}$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \sqrt{9-x}$

ง. เขียนกราฟของ f และ f^{-1} ได้ดังนี้



จาก $f(x) = \sqrt{x+3}$ จะได้ $R_f = [0, \infty)$ ซึ่งเป็นโดเมนของ f^{-1}

ให้ $y = \sqrt{x+3}$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $y^2 = x+3$

$x = y^2 - 3$

เปลี่ยน y เป็น 8 และเปลี่ยน 8 เป็น y จะได้ $y = x^2 - 3$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = x^2 - 3$ โดยที่ $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$

5. **วิธีที่** 1 จาก $f(x) = x^3$

ใช้บทนิยาม โดยเขียน f ให้อยู่ในรูปเซต จะได้ $f = \{(x, y) \mid y = x^3\}$

จะได้ $f^{-1} = \{(x, y) \mid x = y^3\} = \{(x, y) \mid y = \sqrt[3]{x}\}$

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $(x, y) \in f^{-1}$ และ $(x, z) \in f^{-1}$

จะได้ว่า $y = \sqrt[3]{x}$ และ $z = \sqrt[3]{x}$

ดังนั้น $y = z$

นั่นคือ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน และ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

วิธีที่ 2 จาก $f(x) = x^3$

ใช้ทฤษฎีบท โดยแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ดังนี้

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ว่า $x_1^3 = x_2^3$ ทำให้ $x_1 = x_2$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$

ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน และ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

6. **วิธีที่** 1 จาก $f(x) = |x| + 4$

ใช้บทนิยาม โดยเขียน f ในรูปเซต จะได้ $f = \{(x, y) \mid y = |x| + 4\}$

จะได้ $f^{-1} = \{(x, y) \mid x = |y| + 4\} = \{(x, y) \mid |y| = x - 4\}$

จะเห็นว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ $(5, 1) \in f^{-1}$ และ $(5, -1) \in f^{-1}$

ดังนั้น f ไม่มีฟังก์ชันผกผัน

วิธีที่ 2 จาก $f(x) = |x| + 4$

ใช้ทฤษฎีบท เนื่องจาก $(1, 5) \in f$ และ $(-1, 5) \in f$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน $1-1$

จะได้ f ไม่มีฟังก์ชันผกผัน

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จาก $E=\{x\in\mathbb{N} \mid x^2<25\}$ และ $r=\{(4,2),(3,1),(2,3),(5,4)\}$

   จะได้ $E=\{1,2,3,4\}$

   จะเห็นว่า $(5,4)\in r$ แต่ $(5,4)\notin E\times E$ นั่นคือ $r\not\subset E\times E$

   ดังนั้น r ไม่เป็นความสัมพันธ์บนเซต E

2. 1) $D_r=[0,\infty)$ และ $R_r=\mathbb{R}$

   2) $D_r=\mathbb{R}$ และ $R_r=\mathbb{R}$

   3) $D_r=[0,\infty)$ และ $R_r=(-\infty,0]$

   4) $D_r=\mathbb{R}$ และ $R_r=[0,\infty)$

   5) $D_r=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ และ $R_r=[0,\infty)$

   6) $D_r=\mathbb{R}-\{1\}$ และ $R_r=(0,\infty)$

   7) $D_r=\mathbb{R}-\{-5\}$ และ $R_r=\mathbb{R}-\{3\}$

   8) $D_r=(-3,3)$ และ $R_r=\left[\frac{1}{3},\infty\right)$

3. 1) $r^{-1}=\{(2,2),(3,2),(4,1),(2,3),(3,3)\}$

   $D_{r^{-1}}=\{2,3,4\}$

   $R_{r^{-1}}=\{1,2,3\}$

   2) $r^{-1}=\left\{(x,y) \mid y=\frac{1-x}{2}\right\}$

   $D_{r^{-1}}=\mathbb{R}$

   $R_{r^{-1}}=\mathbb{R}$

   3) $r^{-1}=\{(x,y) \mid x\geq 0 \text{ และ } y=x^2\}$

   $D_{r^{-1}}=[0,\infty)$

   $R_{r^{-1}}=[0,\infty)$

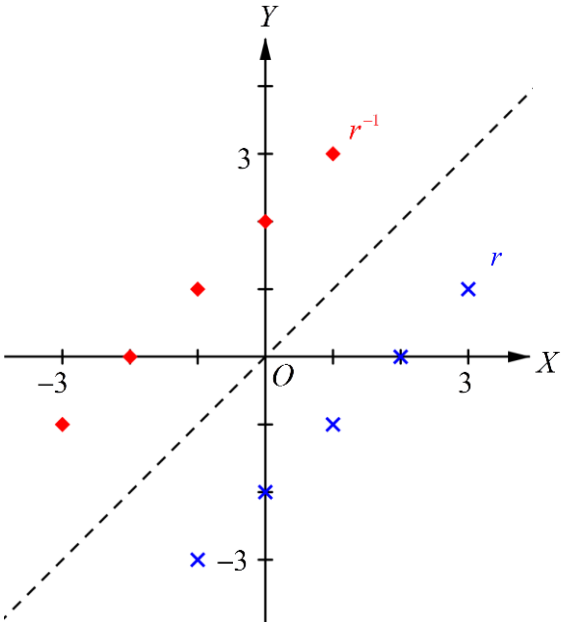
4) $r^{-1} = \{(x, y) \mid y < x\}$

$D_{r^{-1}} = \mathbb{R}$

$R_{r^{-1}} = \mathbb{R}$

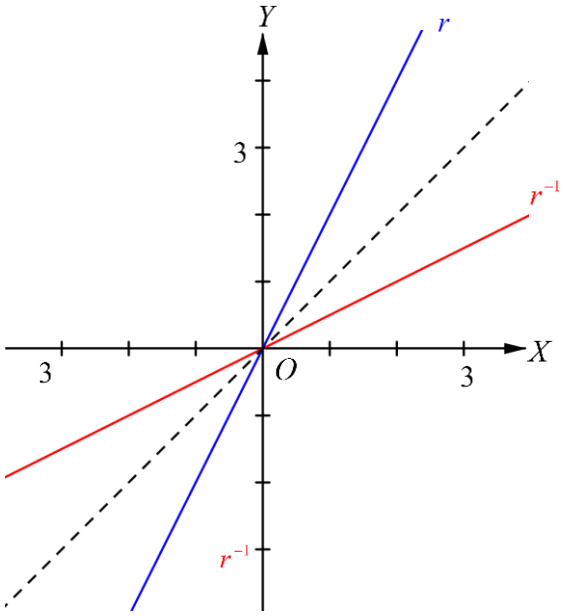
4. 1) จาก $r = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x - 2\}$ เมื่อ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

จะได้ $r^{-1} = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x + 2\}$ เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ได้ดังนี้



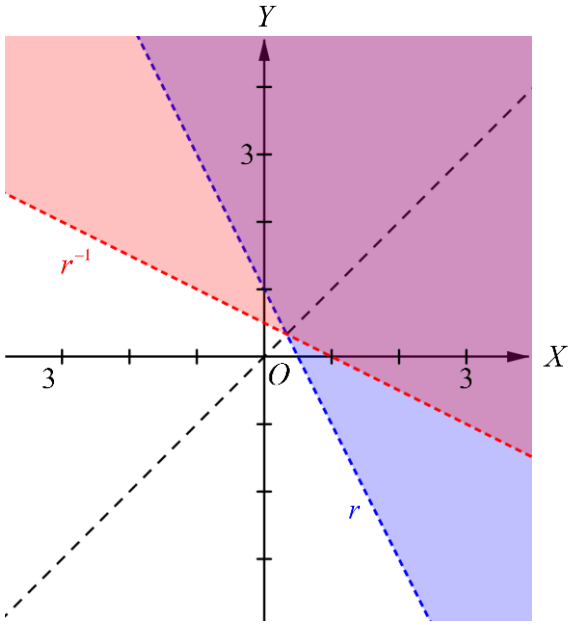
2) จาก $r = \{(x, y) \mid y = 2x\}$

จะได้ $r^{-1} = \left\{(x, y) \,\middle|\, y = \frac{x}{2}\right\}$ เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ได้ดังนี้



3) จาก $r = \{(x, y) \mid y > 1 - 2x\}$

จะได้ $r^{-1} = \left\{(x, y) \,\middle|\, y > \frac{1-x}{2}\right\}$ เขียนกราฟของ r และ r^{-1} ได้ดังนี้



5. ไม่จำเป็น เช่น $r=\{(1,2),(3,4)\}$ และ $s=\{(2,3),(4,1)\}$

จะได้ $D_r=R_s=\{1,3\}$ และ $R_r=D_s=\{2,4\}$

โดยที่ $r^{-1}=\{(2,1),(3,4)\}\neq s$

ดังนั้น ไม่จำเป็นที่ s จะเป็นตัวผกผันของ r เมื่อ r และ s เป็นความสัมพันธ์ ซึ่ง $D_r=R_s$ และ $R_r=D_s$

6. 1) เป็นฟังก์ชัน 2) เป็นฟังก์ชัน

3) ไม่เป็นฟังก์ชัน 4) ไม่เป็นฟังก์ชัน

7. 1) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะพบว่า 4 ซึ่งอยู่ในโดเมนจับคู่กับ d และ e ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

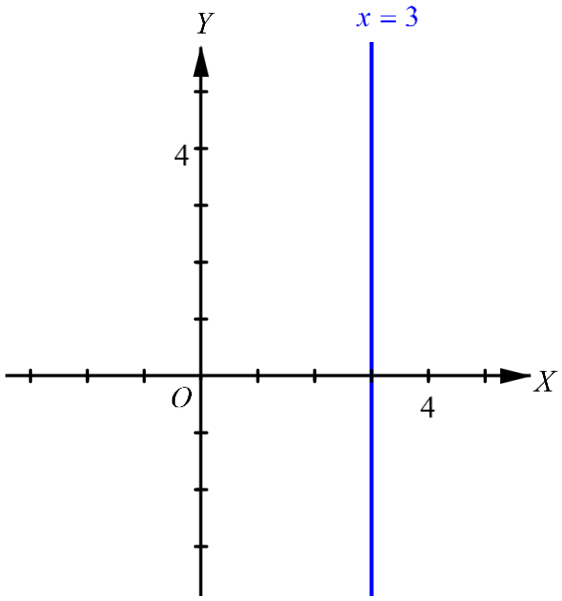
2) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะจาก $\{(x,y)\in A\times A \mid y\geq x\}$ เมื่อ $A=\{1,2,3\}$

จะได้ $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ ซึ่งพบว่า 1 ซึ่งอยู่ในโดเมนจับคู่กับ 1, 2 และ 3 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์ และ 2 ซึ่งอยู่ในโดเมนจับคู่กับ 2 และ 3 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

3) **วิธีที่ 1** ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะจาก $\{(x,y) \mid x=3\}$

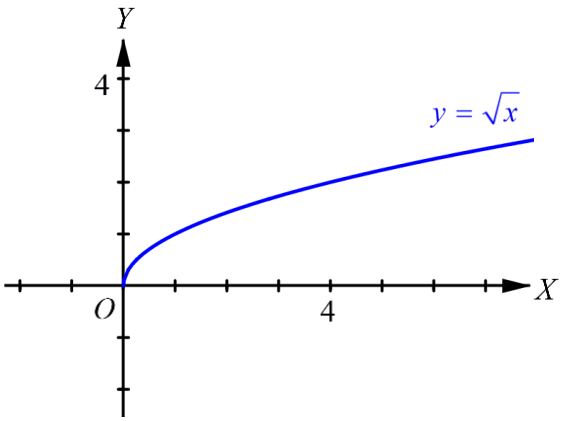
จะได้ว่า 3 ซึ่งอยู่ในโดเมน จับคู่กับสมาชิกทุกตัวในเรนจ์

วิธีที่ 2 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะจาก $\{(x,y) \mid x=3\}$ เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า เมื่อลากเส้นขนานกับแกน Y ตัดกราฟ จะมีเส้นขนานกับแกน Y ที่ตัดกราฟของ $x = 3$ มากกว่าหนึ่งจุด

4) เป็นฟังก์ชัน เขียนกราฟของ $\left\{ (x, y) \,\middle|\, y = \sqrt{x} \right\}$ ได้ดังนี้



จะได้ว่า เส้นขนานกับแกน Y ทุกเส้น ตัดกราฟของ $y = \sqrt{x}$ เพียงจุดเดียว

5) **วิธีที่ 1** ไม่เป็นฟังก์ชัน

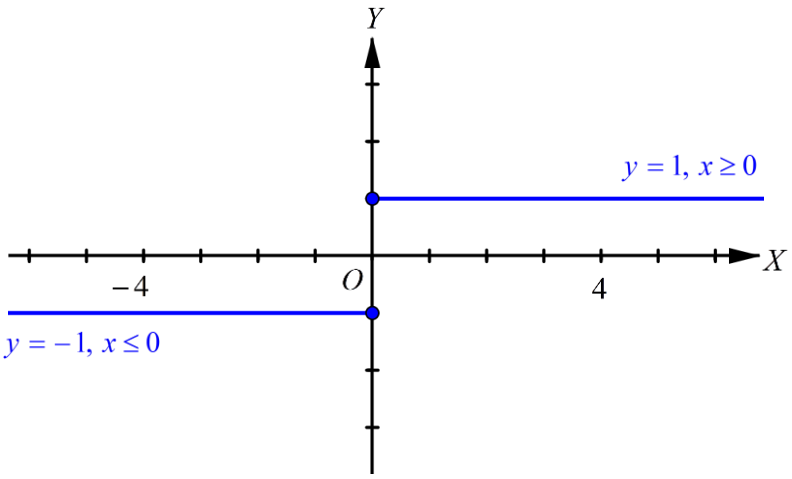
เพราะจาก $\{(x, y) \mid y = 1$ เมื่อ $x \geq 0$ และ $y = -1$ เมื่อ $x \leq 0\}$

จะมี 0 ซึ่งอยู่ในโดเมนจับคู่กับ -1 และ 1 ซึ่งเป็นสมาชิกในเรนจ์

วิธีที่ 2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

เพราะจาก $\{(x, y) \mid y = 1$ เมื่อ $x \geq 0$ และ $y = -1$ เมื่อ $x \leq 0\}$

เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า เมื่อลากเส้นขนานกับแกน Y ตัดกราฟ จะมีเส้นขนานกับแกน Y ที่ตัดกราฟสองจุด

8. เนื่องจาก $f(x) = x^2 + 3x - 5$

จะได้ $f(0) = (0)^2 + 3(0) - 5 = -5$

$f(-1) = (-1)^2 + 3(-1) - 5 = -7$

$f(3) = (3)^2 + 3(3) - 5 = 13$

$f(a) = a^2 + 3(a) - 5 = a^2 + 3a - 5$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\left(x^2+2hx+h^2+3x+3h-5\right)-\left(x^2+3x-5\right)}{h}$$

$$= \frac{2hx+h^2+3h}{h}$$

$$= 2x+h+3$$

9. 1) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

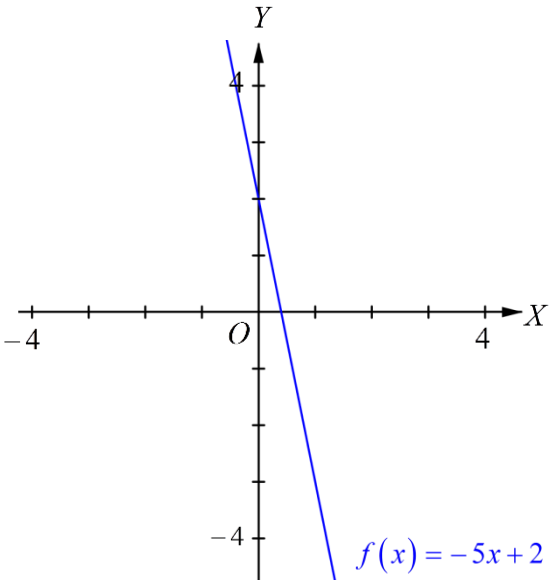
2) $D_f = [2, \infty)$ และ $R_f = [0, \infty)$

3) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [0, \infty)$

4) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [0, \infty)$

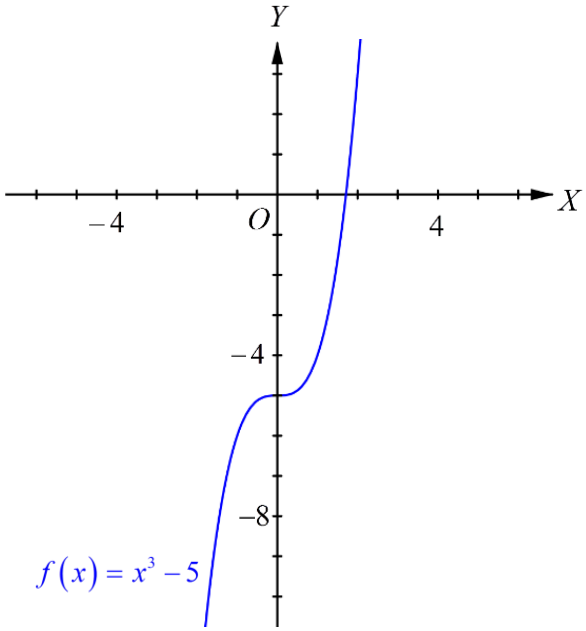
5) $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [0, \infty)$

10. 1) จาก $f(x) = -5x+2$ เขียนกราฟได้ดังนี้



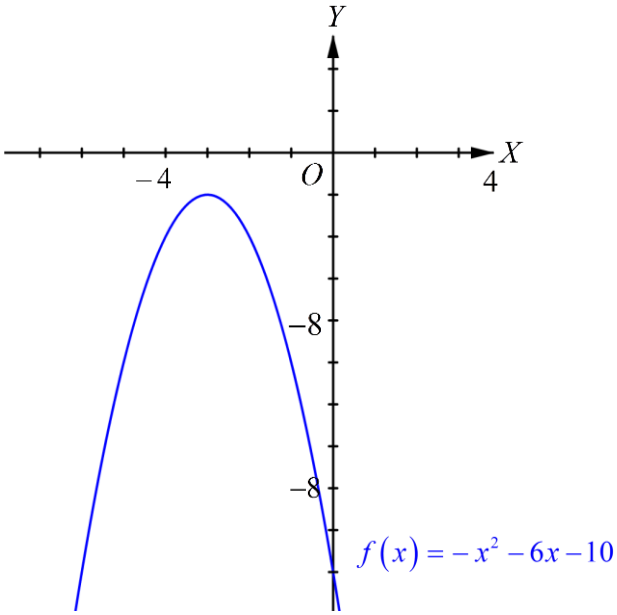
จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

2) จาก $f(x) = x^3 - 5$ เขียนกราฟได้ดังนี้



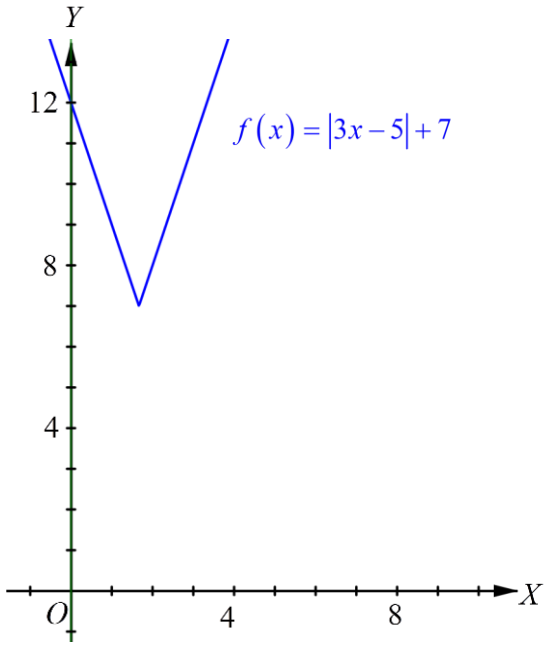
จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

3) จาก $f(x) = -x^2 - 6x - 10$ เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = (-\infty, -1]$

4) จาก $f(x) = |3x-5|+7$ เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [7, \infty)$

11. จาก $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ เป็นจำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า $7\}$ และ

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x^2 \le 4\}$

จะได้ $A = \{2, 3, 5\}$ และ $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

1) ฟังก์ชันจาก A ไป B ได้แก่ f_2, f_3 และ f_6

2) ไม่มีฟังก์ชันจาก B ไป A

3) ฟังก์ชันจาก A ไป A ได้แก่ f_2

4) ฟังก์ชัน 1–1 จาก A ไป B ได้แก่ f_3 และ f_6

5) ไม่มีฟังก์ชัน 1–1 จาก B ไป B

6) ไม่มีฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง A

7) ไม่มีฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A

8) ไม่มีฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B

12. 1) **วิธีที่ 1** จาก $f(x)=\begin{cases} x & , x<1 \\ -3 & , x\geq 1 \end{cases}$

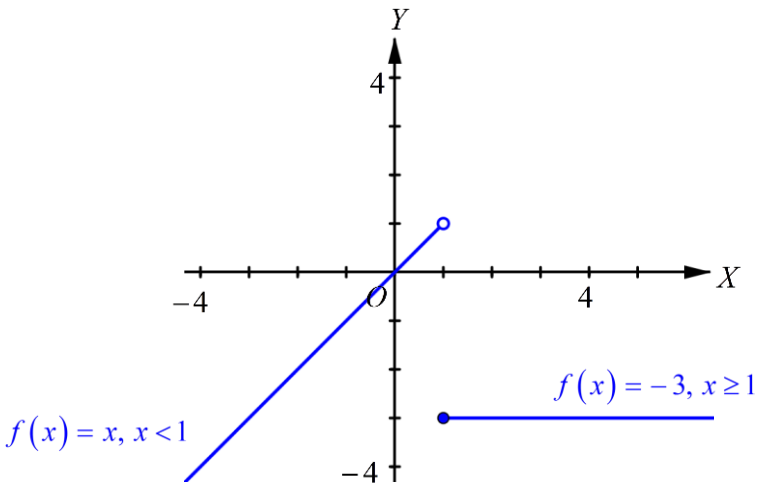
จะเห็นว่ามีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $f(x_1)=f(x_2)$

เช่น $x_1=1$ จะได้ $f(x_1)=-3$ และ $x_2=2$ จะได้ $f(x_2)=-3$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีที่ 2 จาก $f(x)=\begin{cases} x & , x<1 \\ -3 & , x\geq 1 \end{cases}$

เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า เมื่อลากเส้นขนานกับแกน x ตัดกราฟ จะมีเส้นขนานกับแกน x ที่ตัดกราฟหลายจุด

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) **วิธีที่ 1** จาก $h(x)=|3x+2|$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $h(x_1) = h(x_2)$

จะได้ $|3x_1+2| = |3x_2+2|$

$$|3x_1+2|^2 = |3x_2+2|^2$$

$$(3x_1+2)^2 = (3x_2+2)^2$$

$$(3x_1+2)^2-(3x_2+2)^2 = 0$$

$$[(3x_1+2)-(3x_2+2)][(3x_1+2)+(3x_2+2)] = 0$$

$$(3x_1-3x_2)(3x_1+3x_2+4) = 0$$

$$(x_1-x_2)(3x_1+3x_2+4) = 0$$

จะได้ $x_1-x_2 = 0$ หรือ $3x_1+3x_2+4 = 0$

นั่นคือ $x_1 = x_2$ หรือ $x_1 = \dfrac{-3x_2-4}{3}$

จาก $x_1 = \dfrac{-3x_2-4}{3}$

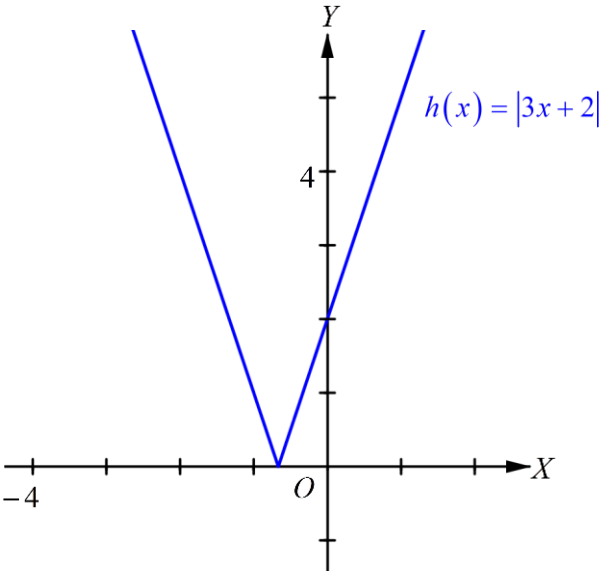
จะเห็นว่ามีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $h(x_1)=h(x_2)$

เช่น $x_1=-\dfrac{4}{3}$ จะได้ $h(x_1)=2$ และ $x_2=0$ จะได้ $h(x_2)=2$

ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีที่ 2 จาก $h(x)=|3x+2|$

เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า เมื่อลากเส้นขนานกับแกน x ตัดกราฟ จะมีเส้นขนานกับแกน x ที่ตัดกราฟของ $h(x) = |3x+2|$ สองจุด

ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

3) **วิธีที่ 1** จาก $g(x) = \sqrt{x+1}$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $g(x_1) = g(x_2)$

จะได้ $\sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1}$

$$\left(\sqrt{x_1+1}\right)^2 = \left(\sqrt{x_2+1}\right)^2$$

$$x_1+1 = x_2+1$$

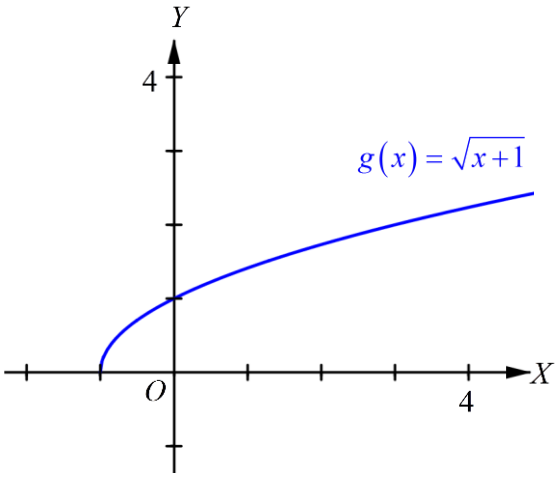
ดังนั้น $x_1 = x_2$

นั่นคือ ถ้า $g(x_1) = g(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีที่ 2 จาก $g(x)=\sqrt{x+1}$

เขียนกราฟได้ดังนี้



จะได้ว่า เส้นขนานกับแกน x ทุกเส้น ตัดกราฟของ $g(x)=\sqrt{x+1}$ เพียงจุดเดียว

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

4) **วิธีที่ 1** จาก $r(x)=x^2-x+2$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $r(x_1) = r(x_2)$

จะได้

$$\begin{aligned} x_1^2-x_1+2 &= x_2^2-x_2+2 \\ x_1^2-x_1 &= x_2^2-x_2 \\ (x_1^2-x_2^2)-(x_1-x_2) &= 0 \\ (x_1-x_2)(x_1+x_2)-(x_1-x_2) &= 0 \\ (x_1-x_2)(x_1+x_2-1) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ $x_1 - x_2 = 0$ หรือ $x_1 + x_2 - 1 = 0$

นั่นคือ $x_1 = x_2$ หรือ $x_1 = 1 - x_2$

จาก $x_1 = 1 - x_2$

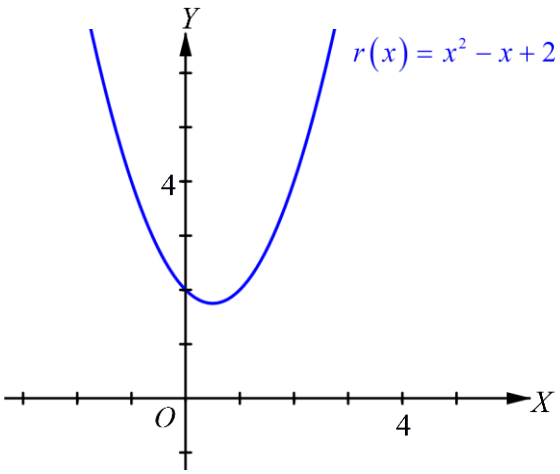
จะเห็นว่ามีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $r(x_1) = r(x_2)$

เช่น $x_1 = 2$ จะได้ $r(x_1) = 4$ และ $x_2 = -1$ จะได้ $r(x_2) = 4$

ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วิธีที่ 2 จาก $r(x) = x^2 - x + 2$

เขียนกราฟได้ดังนี้



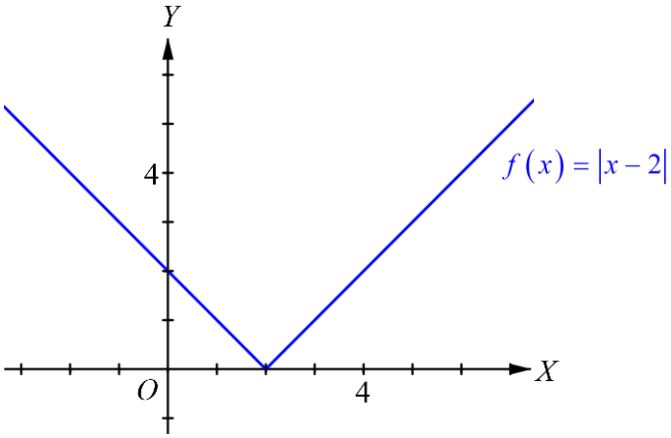
จะได้ว่า เมื่อลากเส้นขนานกับแกน X ตัดกราฟ จะมีเส้นขนานกับแกน X ที่ตัดกราฟของ $r(x) = x^2 - x + 2$ สองจุด

ดังนั้น r ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

13. 1) จาก $f(x)=|x-2|$

จะได้ว่า $D_f=\mathbb{R}$ และ $R_f=[0,\infty)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $[0,\infty)$

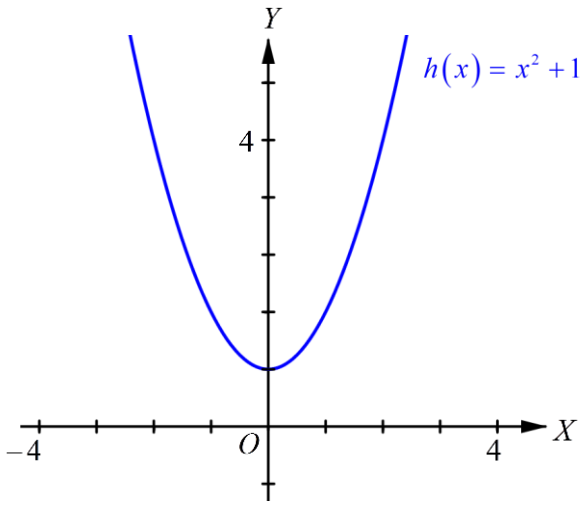


2) จาก $h(x)=x^2+1$

จะได้ว่า $D_h=\mathbb{R}$ และ $R_h=[1,\infty)$

เนื่องจาก $0\in[0,\infty)$ แต่ $0\notin R_h$

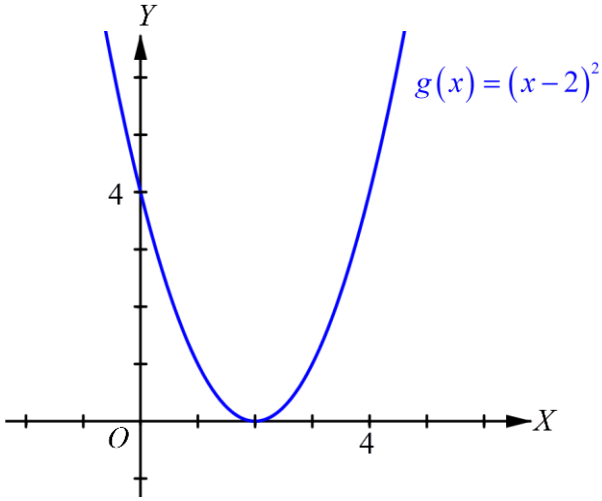
ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $[0,\infty)$



3) จาก $g(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

จะได้ว่า $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = [0, \infty)$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $[0, \infty)$



14. 1) จาก $f(x) = 1 - x$

- จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ $1 - x_1 = 1 - x_2$

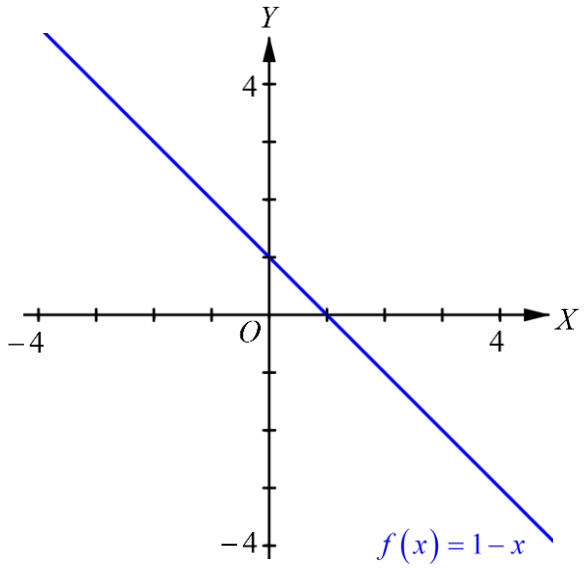
$-x_1 = -x_2$

$x_1 = x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

- จาก $f(x)=1-x$ จะได้ว่า $D_f=\mathbb{R}$ และ $R_f=\mathbb{R}$

  ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$



2) จาก $h(x)=x^2-4x+2$

วิธีที่ 1 จะแสดงว่า h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

สมมติ $h(x_1) = h(x_2)$

จะได้ $x_1^2-4x_1+2 = x_2^2-4x_2+2$

$$x_1^2-4x_1-x_2^2+4x_2 = 0$$

$$x_1^2-x_2^2-4x_1+4x_2 = 0$$

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2)-4(x_1-x_2) = 0$$

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2-4) = 0$$

นั่นคือ $x_1 - x_2 = 0$ หรือ $x_1 + x_2 - 4 = 0$

$x_1 = x_2$ หรือ $x_1 = 4 - x_2$

จาก $x_1 = 4 - x_2$

จะเห็นว่ามีกรณีที่ $x_1 \neq x_2$ แต่ $h(x_1) = h(x_2)$

เช่น $x_1 = 0$ จะได้ $h(x_1) = 2$ และ $x_2 = 4$ จะได้ $h(x_2) = 2$

ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

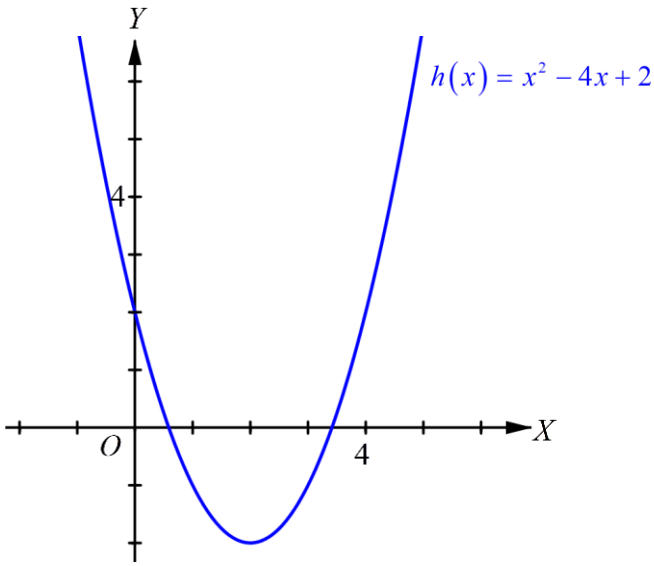
จะได้ว่า h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$

วิธีที่ 2 จะแสดงว่า h ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เนื่องจาก $D_h = \mathbb{R}$ แต่ $R_h = [-2, \infty) \neq \mathbb{R}$

ดังนั้น h ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

จะได้ว่า h ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$



15. 1) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-1, 2]$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-3, -1]$ และ $[2, 4]$

2) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-3, -2], [-1, 1], (1, 2]$ และ $[3, 4)$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-2, -1]$ และ $[2, 3]$

3) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-3, -1], (-1, 0]$ และ $(2, 4)$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0, 2)$

4) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-3, 0]$ และ $(1, 3)$

เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, 1]$

16. 1) สำหรับ $f(x) = |2x+1|$ บนช่วง $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$

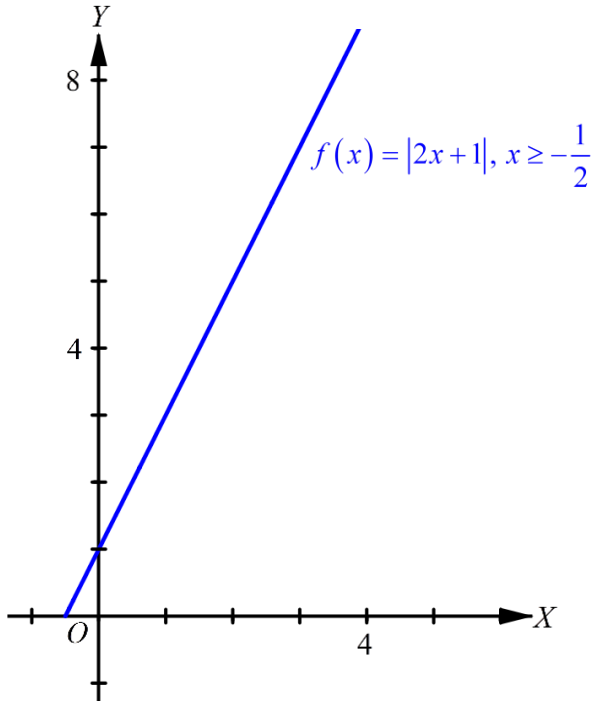
ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$

จะได้
$$\begin{aligned} 2x_1 &< 2x_2 \\ 2x_1 + 1 &< 2x_2 + 1 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x_1, x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ ดังนั้น $2x_1 + 1 \geq 0$ และ $2x_2 + 1 \geq 0$

จะได้
$$\begin{aligned} |2x_1 + 1| &< |2x_2 + 1| \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$



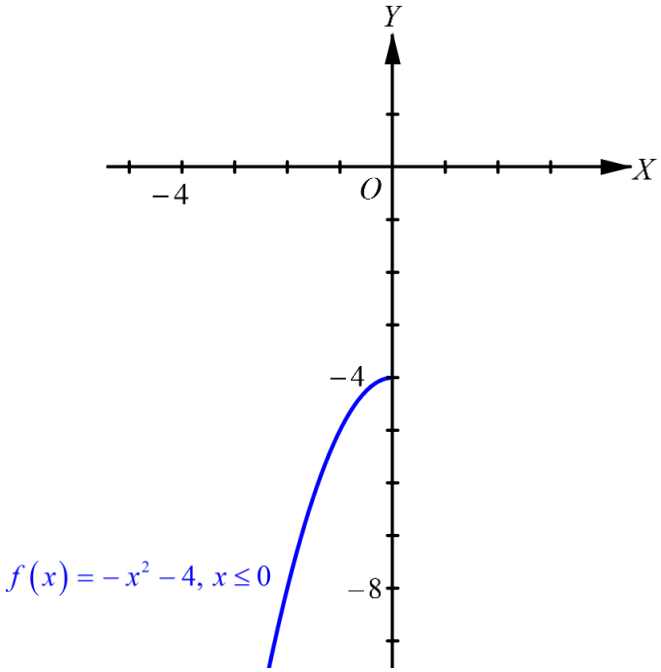
2) สำหรับ $f(x)=-x^2-4$ บนช่วง $(-\infty, 0]$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $(-\infty, 0]$ ซึ่ง $x_1 < x_2$

จะได้

$$\begin{aligned} x_1^2 &> x_2^2 \\ -x_1^2 &< -x_2^2 \\ -x_1^2-4 &< -x_2^2-4 \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, 0]$



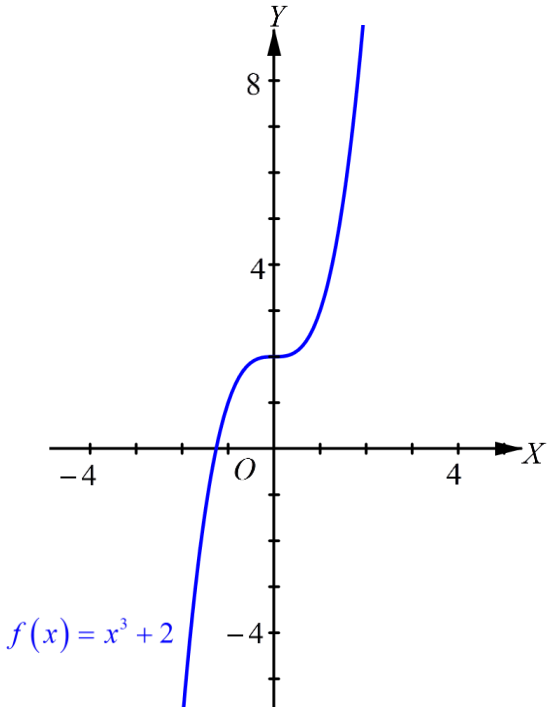
3) สำหรับ $f(x) = x^3 + 2$ บน $\mathbb{R}$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $x_1 < x_2$

จะได้

$$\begin{aligned} x_1^3 &< x_2^3 \\ x_1^3 + 2 &< x_2^3 + 2 \\ f(x_1) &< f(x_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\mathbb{R}$



4) สำหรับ $f(x) = x^2 - 2x + 1$ บนช่วง $[-1, 1]$

จาก $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ บนช่วง $[-1, 1]$ ซึ่ง $x_1 < x_2$

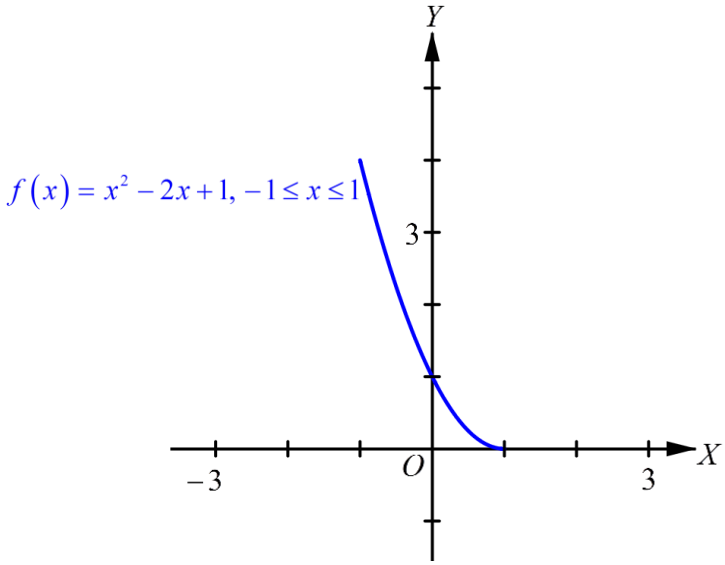
จะได้ $x_1 - 1 < x_2 - 1$

เนื่องจาก $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ ดังนั้น $x_1 - 1 \le 0$ และ $x_2 - 1 \le 0$

จะได้ $(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2$

$f(x_1) > f(x_2)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-1, 1]$



17. 1) ฉ 2) ก

3) ง 4) ข

5) จ 6) ค

18. 1) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

โดเมนของ $\dfrac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-1,1\}$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (x^2-2x)+(1-x^2) = 1-2x$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = (x^2-2x)-(1-x^2) = 2x^2-2x-1$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2-2x)(1-x^2)$$

$$= -x^4+2x^3+x^2-2x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-2x}{1-x^2}$$

2) โดเมนของ f คือ $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$ และโดเมนของ g คือ $(-\infty,3]$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f\cap D_g=(-\infty,-2]\cup[2,3]$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f\cap D_g-\{x\in D_g \mid g(x)=0\}=(-\infty,-2]\cup[2,3)$

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) &&= \sqrt{x^2-4}+\sqrt{3-x}\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) &&= \sqrt{x^2-4}-\sqrt{3-x}\\
(fg)(x) &= f(x)g(x) &&= \sqrt{x^2-4}\times\sqrt{3-x}\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} &&= \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{3-x}}
\end{aligned}$$

3) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $D_f\cap D_g-\{x\in D_g \mid g(x)=0\}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) &&= \frac{1}{x^2-1}+x^3-1\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) &&= \frac{1}{x^2-1}-\left(x^3-1\right)\\
&&&= \frac{1}{x^2-1}-x^3+1\\
(fg)(x) &= f(x)g(x) &&= \left(\frac{1}{x^2-1}\right)\left(x^3-1\right)\\
&&&= \frac{x^2+x+1}{x+1} \quad \text{เมื่อ } x\neq 1\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} &&= \frac{\frac{1}{x^2-1}}{x^3-1}\\
&&&= \frac{1}{\left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right)}
\end{aligned}$$

4) โดเมนของ f คือ $\mathbb{R}-\{3\}$ และโดเมนของ g คือ $\mathbb{R}-\{-1\}$

โดเมนของ $f+g,\ f-g$ และ fg คือ $D_f \cap D_g = \mathbb{R}-\{-1, 3\}$

โดเมนของ $\dfrac{f}{g}$ คือ $D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x)=0\} = \mathbb{R}-\{-1, 3\}$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{x}{x-3}+\frac{1}{x+1}$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \frac{x}{x-3}-\frac{1}{x+1}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{x}{x-3}\times\frac{1}{x+1} = \frac{x}{(x-3)(x+1)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x}{x-3}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{x(x+1)}{x-3}$$

19. จาก $f(x)=|x+1|-3$ และ $g(x)=\sqrt{9-x^2}$

จะได้ $D_f=\mathbb{R},\ R_f=[-3,\infty),\ D_g=[-3,3]$ และ $R_g=[0,3]$

จะได้ว่า $R_g \cap D_f = [0,3]$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$

$R_f \cap D_g = [-3,3]$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ f$

$R_f \cap D_f = [-3,\infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ f$

$R_g \cap D_g = [0,3]$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ g$

1) เนื่องจาก $g(0)=3$ และ $f(3)=1$ ดังนั้น $f(g(0)) = f(3) = 1$

เนื่องจาก $f(0)=-2$ และ $g(-2)=\sqrt{5}$ ดังนั้น $g(f(0)) = g(-2) = \sqrt{5}$

2) เนื่องจาก $f(3)=1$ และ $f(1)=-1$ ดังนั้น $f(f(3)) = f(1) = -1$

เนื่องจาก $g(-2)=\sqrt{5}$ และ $g(\sqrt{5})=2$ ดังนั้น $g(g(-2)) = g(\sqrt{5}) = 2$

3) เนื่องจาก $g(-1)=2\sqrt{2}$ และ $f(2\sqrt{2}) = |2\sqrt{2}+1|-3 = 2\sqrt{2}-2$

ดังนั้น $f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-2$

เนื่องจาก $f(2)=0$ และ $g(0)=3$

ดังนั้น $g\circ f(2)=g(f(2))=g(0)=3$

4) เนื่องจาก $f(1)=-1$ และ $f(-1)=-3$

ดังนั้น $f\circ f(1)=f(f(1))=f(-1)=-3$

เนื่องจาก $g(3)=0$ และ $g(0)=3$

ดังนั้น $g\circ g(2)=g(g(3))=g(0)=3$

5) เนื่องจาก $f(x)=|x+1|-3$ และ $f(|x+1|-3)=|(|x+1|-3)+1|-3$

ดังนั้น $f\circ f(x)=f(f(x))=f(|x+1|-3)=||x+1|-2|-3$

เนื่องจาก $g(x)=\sqrt{9-x^2}$ และ $g\left(\sqrt{9-x^2}\right)=\sqrt{9-\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2}=|x|$

ดังนั้น $g\circ g(x)=g(g(x))=g\left(\sqrt{9-x^2}\right)=|x|$

20. เนื่องจาก $f(x)=\{(-1,1),(0,4),(1,5)\}$, $g(x)=\{(-1,0),(1,4),(2,1)\}$ และ $h(x)=\{(0,0),(2,-1),(1,2)\}$

จะได้ $D_f=\{-1,0,1\}$, $D_g=\{-1,1,2\}$ และ $D_h=\{0,1,2\}$

1) โดเมนของ $f+g$ คือ $D_f\cap D_g=\{-1,1\}$

$(f+g)(-1) = f(-1)+g(-1) = 1+0 = 1$

จะได้ $(-1,1)\in f+g$

$(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 5+4 = 9$

จะได้ $(1,9)\in f+g$

ดังนั้น $f+g=\{(-1,1),(1,9)\}$

2) โดเมนของ $g-h$ คือ $D_g\cap D_h=\{1,2\}$

$(g-h)(1) = g(1)-h(1) = 4-2 = 2$

จะได้ $(1,2)\in g-h$

$(g-h)(2) \quad = \quad g(2)-h(2) \quad = \quad 1-(-1) \quad = \quad 2$

จะได้ $(2, 2) \in g-h$

ดังนั้น $g-h=\{(1, 2), (2, 2)\}$

3) โดเมนของ $\frac{g}{f}$ คือ $\{x \mid x \in D_g \cap D_h$ และ $f(x) \neq 0\} = \{-1, 1\}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(-1) \quad = \quad \frac{g(-1)}{f(-1)} \quad = \quad \frac{0}{1} \quad = \quad 0$

จะได้ $(-1, 0) \in \frac{g}{f}$

$\left(\frac{g}{f}\right)(1) \quad = \quad \frac{g(1)}{f(1)} \quad = \quad \frac{4}{5}$

จะได้ $\left(1, \frac{4}{5}\right) \in \frac{g}{f}$

ดังนั้น $\frac{g}{f} = \left\{(-1, 0), \left(1, \frac{4}{5}\right)\right\}$

4) โดเมนของ $\frac{f}{h}$ คือ $\{x \mid x \in D_f \cap D_h$ และ $h(x) \neq 0\} = \{1\}$

$\left(\frac{f}{h}\right)(1) \quad = \quad \frac{f(1)}{h(1)} \quad = \quad \frac{5}{2}$

จะได้ $\left(1, \frac{5}{2}\right) \in \frac{f}{h}$

ดังนั้น $\frac{f}{h} = \left\{\left(1, \frac{5}{2}\right)\right\}$

5) โดเมนของ hg คือ $D_h \cap D_g = \{1, 2\}$

$(hg)(1) \quad = \quad h(1)g(1) \quad = \quad 2 \times 4 \quad = \quad 8$

จะได้ $(1, 8) \in hg$

$(hg)(2) \quad = \quad h(2)g(2) \quad = \quad (-1) \times 1 \quad = \quad -1$

จะได้ $(2, -1) \in hg$

ดังนั้น $hg = \{(1, 8), (2, -1)\}$

6) $D_f = \{-1, 0, 1\}$, $D_h = \{0, 1, 2\}$ และ $R_h = \{-1, 0, 2\}$

จะได้ $R_h \cap D_f = \{-1, 0\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $f \circ h$

เนื่องจาก $h(0) = 0$ และ $f(0) = 4$ ดังนั้น $f \circ h(0) = f(h(0)) = f(0) = 4$

เนื่องจาก $h(1) = 2$ แต่ 2 ไม่อยู่ในโดเมนของ f

ดังนั้น 1 ไม่อยู่ในโดเมนของ $f \circ h$

เนื่องจาก $h(2) = -1$ และ $f(-1) = 1$

ดังนั้น $f \circ h(2) = f(h(2)) = f(-1) = 1$

จะได้ $f \circ h(2) = \{(0, 4), (2, 1)\}$

7) $D_h = \{0, 1, 2\}$, $D_f = \{-1, 0, 1\}$ และ $R_f = \{1, 4, 5\}$

จะได้ $R_f \cap D_h = \{1\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $h \circ f$

เนื่องจาก $f(-1) = 1$ และ $h(1) = 2$

ดังนั้น $h \circ f(-1) = h(f(-1)) = h(1) = 2$

เนื่องจาก $f(0) = 4$ แต่ 4 ไม่อยู่ในโดเมนของ h

ดังนั้น 0 ไม่อยู่ในโดเมนของ $h \circ f$

เนื่องจาก $f(1) = 5$ แต่ 5 ไม่อยู่ในโดเมนของ h

ดังนั้น 1 ไม่อยู่ในโดเมนของ $h \circ f$

จะได้ $h \circ f = \{(-1, 2)\}$

8) $D_h = \{0, 1, 2\}$, $D_g = \{-1, 1, 2\}$ และ $R_g = \{0, 1, 4\}$

จะได้ $R_g \cap D_h = \{0, 1\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $h \circ g$

เนื่องจาก $g(-1) = 0$ และ $h(0) = 0$

ดังนั้น $h \circ g(-1) = h(g(-1)) = h(0) = 0$

เนื่องจาก $g(1)=4$ แต่ 4 ไม่อยู่ในโดเมนของ h

ดังนั้น 1 ไม่อยู่ในโดเมนของ $h \circ g$

เนื่องจาก $g(2)=1$ และ $h(1)=2$

ดังนั้น $h \circ g(2)=h(g(2))=h(1)=2$

จะได้ $h \circ g=\{(-1,0),(2,2)\}$

9) $D_g=\{-1,1,2\}$, $D_h=\{0,1,2\}$ และ $R_h=\{-1,0,2\}$

จะได้ $R_h \cap D_g=\{-1,2\}$ ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จึงมี $g \circ h$

เนื่องจาก $h(0)=0$ แต่ 0 ไม่อยู่ในโดเมนของ g

ดังนั้น 0 ไม่อยู่ในโดเมนของ $g \circ h$

เนื่องจาก $h(1)=2$ และ $g(2)=1$ ดังนั้น $g \circ h(1)=g(h(1))=g(2)=1$

เนื่องจาก $h(2)=-1$ และ $g(-1)=0$

ดังนั้น $g \circ h(2)=g(h(2))=g(-1)=0$

จะได้ $g \circ h=\{(1,1),(2,0)\}$

21. 1) จาก $f(x)=5x-6$ จะได้ $D_f=\mathbb{R}$ และ $R_f=\mathbb{R}$

จาก $g(x)=\dfrac{x}{3}$ จะได้ $D_g=\mathbb{R}$ และ $R_g=\mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f=\mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{x}{3}\right) \\ &= 5\left(\frac{x}{3}\right)-6 \\ &= \frac{5x}{3}-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \left\{x\in D_g \,\middle|\, g(x)\in D_f\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x}{3}\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f\circ g(x)=\frac{5x}{3}-6$ โดยที่ $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f\cap D_g=\mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g\circ f$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(5x-6) \\ &= \frac{5x-6}{3} \\ &= \frac{5x}{3}-2 \\ D_{g\circ f} &= \left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, 5x-6\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g\circ f(x)=\frac{5x}{3}-2$ โดยที่ $D_{g\circ f}=\mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f\cap D_f=\mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f\circ f$

$$\begin{aligned} f\circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f(5x-6) \\ &= 5(5x-6)-6 \\ &= 25x-36 \\ D_{f\circ f} &= \left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_f\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, 5x-6\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f\circ f(x)=25x-36$ โดยที่ $D_{f\circ f}=\mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ g$

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g\left(\frac{x}{3}\right) \\ &= \frac{\frac{x}{3}}{3} \\ &= \frac{x}{9} \\ D_{g\circ g} &= \left\{x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_g\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x}{3} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = \frac{x}{9}$ โดยที่ $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$

2) จาก $f(x) = x^3 + 1$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

จาก $g(x) = x + 2$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x+2) \\ &= (x+2)^3 + 1 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 9 \\ D_{f\circ g} &= \left\{x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x + 2 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$ โดยที่ $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_g = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ f$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^3+1) \\ &= (x^3+1)+2 \\ &= x^3+3 \\ D_{g\circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^3+1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = x^3+3$ โดยที่ $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ f$

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f(x^3+1) \\ &= (x^3+1)^3+1 \\ &= x^9+3x^6+3x^3+2 \\ D_{f\circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^3+1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ f(x) = x^9+3x^6+3x^3+2$ โดยที่ $D_{f\circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ g$

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x+2) \\ &= (x+2)+2 \\ &= x+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{g\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x+2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = x+4$ โดยที่ $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$

3) จาก $f(x) = x^2$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [0, \infty)$

จาก $g(x) = \sqrt{x+5}$ จะได้ $D_g = [-5, \infty)$ และ $R_g = [0, \infty)$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = [0, \infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\sqrt{x+5}\right) \\ &= \left(\sqrt{x+5}\right)^2 \\ &= x+5 \\ D_{f\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in [-5, \infty) \mid \sqrt{x+5} \in \mathbb{R}\} \\ &= [-5, \infty) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = x+5$ โดยที่ $D_{f\circ g} = [-5, \infty)$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [0, \infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ f$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= \sqrt{x^2+5} \\ D_{g\circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [-5, \infty)\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = \sqrt{x^2+5}$ โดยที่ $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_f = [0, \infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ f$

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= (x^2)^2 \\ &= x^4 \\ D_{f \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ f(x) = x^4$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = [0, \infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ g$

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(\sqrt{x+5}) \\ &= \sqrt{\sqrt{x+5}+5} \\ D_{g \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in [-5, \infty) \mid \sqrt{x+5} \in [-5, \infty)\} \\ &= [-5, \infty) \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = \sqrt{\sqrt{x+5}+5}$ โดยที่ $D_{g \circ g} = [-5, \infty)$

4) จาก $f(x) = x+4$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

จาก $g(x) = |x-4|$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = [0, \infty)$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(|x-4|) \\ &= |x-4|+4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid |x-4|\in\mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f\circ g(x)=|x-4|+4$ โดยที่ $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f\cap D_g=\mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g\circ f$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x+4) \\ &= |(x+4)-4| \\ &= |x| \\ D_{g\circ f} &= \{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid x+4\in\mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g\circ f(x)=|x|$ โดยที่ $D_{g\circ f}=\mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_f\cap D_f=\mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f\circ f$

$$\begin{aligned} f\circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f(x+4) \\ &= (x+4)+4 \\ &= x+8 \\ D_{f\circ f} &= \{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid x+4\in\mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f\circ f(x)=x+8$ โดยที่ $D_{f\circ f}=\mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = [0, \infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ g$

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(|x-4|) \\ &= ||x-4|-4| \\ D_{g \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-4| \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = ||x-4|-4|$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

5) จาก $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ จะได้ $D_f = (0, \infty)$ และ $R_f = (0, \infty)$

จาก $g(x) = x^2 + 4x$ จะได้ $D_g = \mathbb{R}$ และ $R_g = [-4, \infty)$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = (0, \infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 + 4x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} \\ D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x \in (0, \infty)\} \\ &= (-\infty, -4) \cup (0, \infty) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}}$ โดยที่ $D_{f \circ g} = (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_g = (0, \infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ f$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \\ D_{g \circ f} &= \left\{x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g\right\} \\ &= \left\{x \in (0, \infty) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= (0, \infty) \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ โดยที่ $D_{g \circ f} = (0, \infty)$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_f = (0, \infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ f$

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}} \\ &= \sqrt[4]{x} \\ D_{f \circ f} &= \left\{x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_f\right\} \\ &= \left\{x \in (0, \infty) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{x}} \in (0, \infty)\right\} \\ &= (0, \infty) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ f(x) = \sqrt[4]{x}$ โดยที่ $D_{f \circ f} = (0, \infty)$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = [-4, \infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ g$

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x^2+4x) \\ &= (x^2+4x)^2 + 4(x^2+4x) \\ &= x^4+8x^3+20x^2+16x \\ D_{g\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+4x \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = x^4+8x^3+20x^2+16x$ โดยที่ $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$

6) จาก $f(x) = \dfrac{2}{x}$ จะได้ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ และ $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

จาก $g(x) = \dfrac{x-2}{x}$ จะได้ $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ และ $R_g = \mathbb{R} - \{1\}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\frac{x-2}{x}\right) \\ &= \frac{2}{\frac{x-2}{x}} \\ &= \frac{2x}{x-2} \\ D_{f\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \;\middle|\; \frac{x-2}{x} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} \\ &= \mathbb{R} - \{0, 2\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ g(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ โดยที่ $D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ f$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\frac{2}{x}\right) \\ &= \frac{\frac{2}{x} - 2}{\frac{2}{x}} \\ &= 1 - x \\ D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \,\middle|\, \frac{2}{x} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} \\ &= \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f(x) = 1 - x$ โดยที่ $D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$

- เนื่องจาก $R_f \cap D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ f$

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f\left(\frac{2}{x}\right) \\ &= \frac{2}{\frac{2}{x}} \\ &= x \\ D_{f \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \,\middle|\, \frac{2}{x} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} \\ &= \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f \circ f(x) = x$ โดยที่ $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g \circ g$

$$\begin{aligned} g \circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g\left(\frac{x-2}{x}\right) \\ &= \frac{\frac{x-2}{x} - 2}{\frac{x-2}{x}} \\ &= \frac{x+2}{2-x} \\ D_{g \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \,\middle|\, \frac{x-2}{x} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} \\ &= \mathbb{R} - \{0, 2\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ g(x) = \dfrac{x+2}{2-x}$ โดยที่ $D_{g \circ g} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

22. จาก $f(x) = x^3 - 1$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = \mathbb{R}$

จาก $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ จะได้ $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ และ $R_g = \mathbb{R} - \{0\}$

จาก $h(x) = (x-1)^2$ จะได้ $D_h = \mathbb{R}$ และ $R_h = [0, \infty)$

- เนื่องจาก $R_g \cap D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f \circ g$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{-1\} \,\middle|\, \frac{1}{x+1} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R} - \{-1\} \end{aligned}$$

สำหรับ $x \in D_{f \circ g}$ จะได้

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f\left(g(x)\right) \\ &= f\left(\frac{1}{x+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{x+1}\right)^3 - 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f\circ g(x) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^3 - 1$ โดยที่ $D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \{-1\}$

- เนื่องจาก $R_h \cap D_{f\circ g} = [0,\infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $(f\circ g)\circ h$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{(f\circ g)\circ h} &= \left\{x\in D_h \middle| h(x)\in D_{f\circ g}\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} \middle| (x-1)^2 \in \mathbb{R}-\{-1\}\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x\in D_{(f\circ g)\circ h}$ จะได้

$$\begin{aligned} (f\circ g)\circ h(x) &= (f\circ g)\left(h(x)\right) \\ &= (f\circ g)\left((x-1)^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{(x-1)^2+1}\right)^3 - 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(f\circ g)\circ h(x) = \left(\frac{1}{(x-1)^2+1}\right)^3 - 1$ โดยที่ $D_{(f\circ g)\circ h} = \mathbb{R}$

- เนื่องจาก $R_h \cap D_g = [0,\infty)$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $g\circ h$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{g\circ h} &= \left\{x\in D_h \middle| h(x)\in D_g\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} \middle| (x-1)^2 \in \mathbb{R}-\{-1\}\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x\in D_{g\circ h}$ จะได้

$$\begin{aligned} g\circ h(x) &= g(h(x)) \\ &= g\left((x-1)^2\right) \\ &= \frac{1}{(x-1)^2+1} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g\circ h(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2+1}$ โดยที่ $D_{g\circ h}=\mathbb{R}$ และ $R_{g\circ h}=(0,1]$

- เนื่องจาก $R_{g\circ h}\cap D_f=(0,1]$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง จึงมี $f\circ(g\circ h)$ โดยที่

$$\begin{aligned} D_{f\circ(g\circ h)} &= \left\{x\in D_{g\circ h} \,\middle|\, g\circ h(x)\in D_f\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{(x-1)^2+1}\in\mathbb{R}\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

สำหรับ $x\in D_{f\circ(g\circ h)}$ จะได้

$$\begin{aligned} f\circ(g\circ h)(x) &= f\left((g\circ h)(x)\right) \\ &= f\left(\frac{1}{(x-1)^2+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{(x-1)^2+1}\right)^3-1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f\circ(g\circ h)(x)=\left(\dfrac{1}{(x-1)^2+1}\right)^3-1$ โดยที่ $D_{f\circ(g\circ h)}=\mathbb{R}$

23. จาก $f(x)=3x+5$ และ $h(x)=3x^2+3x+2$

จะได้

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= h(x) \\ &= 3x^2+3x+2 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= 3(g(x))+5 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} 3(g(x))+5 &= 3x^2+3x+2 \\ 3(g(x)) &= 3x^2+3x+2-5 \\ g(x) &= \frac{3x^2+3x-3}{3} \\ &= x^2+x-1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $g(x)=x^2+x-1$ ที่ทำให้ $f\circ g=h$ ซึ่ง $f(x)=3x+5$ และ $h(x)=3x^2+3x+2$

24. 1) จาก $f(x)=3x,\ g(x)=\frac{1}{3}x$

ให้ $y=f(x)$ จะได้ $y=3x$ หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $$x = \frac{y}{3}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\frac{x}{3}$

นั่นคือ $f^{-1}(x)=\frac{x}{3}=g(x)$

ดังนั้น f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน

2) จาก $f(x)=\frac{3-x}{5},\ g(x)=3-5x$

ให้ $y=f(x)$ จะได้ $y=\frac{3-x}{5}$ หา x ในพจน์ของ y

จะได้

$$\begin{aligned} 3-x &= 5y \\ x &= 3-5y \end{aligned}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=3-5x$

นั่นคือ $f^{-1}(x)=3-5x=g(x)$

ดังนั้น f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน

3) จาก $f(x)=x^5,\ g(x)=\sqrt[5]{x}$

ให้ $y=f(x)$ จะได้ $y=x^5$ หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $x = \sqrt[5]{y}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = \sqrt[5]{x}$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x} = g(x)$

ดังนั้น f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน

4) จาก $f(x) = x^3 + 3,\ g(x) = (x-3)^{\frac{1}{3}}$

ให้ $y = f(x)$ จะได้ $y = x^3 + 3$ หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $x = \sqrt[3]{y-3}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = \sqrt[3]{x-3}$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-3} = (x-3)^{\frac{1}{3}} = g(x)$

ดังนั้น f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน

5) จาก $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $0 \le x \le 2$ และ $g(x) = \sqrt{4-x^2}$, $0 \le x \le 2$

ให้ $y = f(x)$ จะได้ $y = \sqrt{4-x^2}$, $0 \le x \le 2$ หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $x = \sqrt{4-y^2}$ เมื่อ $0 \le y \le 2$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = \sqrt{4-x^2}$ เมื่อ $0 \le x \le 2$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2}$, $0 \le x \le 2$ ซึ่ง $f^{-1}(x) = g(x)$

ดังนั้น f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน

25. 1) จาก $f(x) = 5x + 7$ จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน $1-1$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ว่า $5x_1 + 7 = 5x_2 + 7$ ทำให้ $x_1 = x_2$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน

ให้ $y = 5x + 7$ หา x ในพจน์ของ y จะได้ $x = \dfrac{y-7}{5}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\frac{x-7}{5}$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=\frac{x-7}{5}$

2) จาก $f(x)=\frac{1}{x+2}$ จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน $1-1$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า $\frac{1}{x_1+2}=\frac{1}{x_2+2}$ ทำให้ $x_1=x_2$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน

ให้ $y=\frac{1}{x+2}$ หา x ในพจน์ของ y จะได้ $x=\frac{1}{y}-2$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\frac{1}{x}-2$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}-2,\ x\neq 0$

3) จาก $f(x)=5+\sqrt[3]{x}$ จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน $1-1$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า $5+\sqrt[3]{x_1}=5+\sqrt[3]{x_2}$ ทำให้ $x_1=x_2$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน

ให้ $y=5+\sqrt[3]{x}$ หา x ในพจน์ของ y

$$y-5 = \sqrt[3]{x}$$

จะได้ $$x = (y-5)^3$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=(x-5)^3$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=(x-5)^3$

4) จาก $f(x)=x^6, x\geq 0$ จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน $1-1$

ให้ x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$

จะได้ว่า $x_1^6=x_2^6$ โดยที่ $x_1, x_2\geq 0$ ทำให้ $x_1=x_2$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ดังนั้น f มีฟังก์ชันผกผัน

ให้ $y=x^6$ หา x ในพจน์ของ y

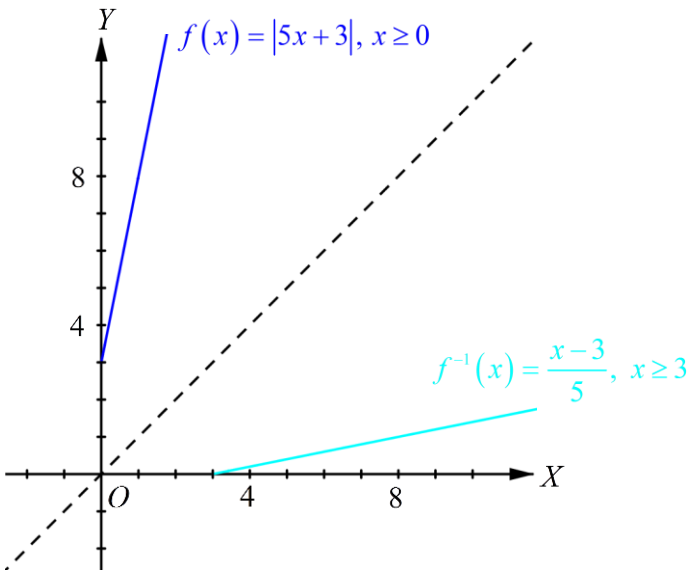
จะได้ $x = \pm\sqrt[6]{y}$

เนื่องจาก $x\geq 0$ ดังนั้น $x=\sqrt[6]{y}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\sqrt[6]{x}$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=\sqrt[6]{x}$, $x\geq 0$

26. ก. เขียนกราฟของ $f(x)=|5x+3|$ และเขียนกราฟของ $f^{-1}(x)$ จาก $f(x)$ ได้ดังนี้



จาก $f(x)=|5x+3|$, $x\geq 0$

นั่นคือ $f(x)=5x+3$, $x\geq 0$

จะได้ $R_f=[3,\infty)$ ซึ่งเป็นโดเมนของ f^{-1}

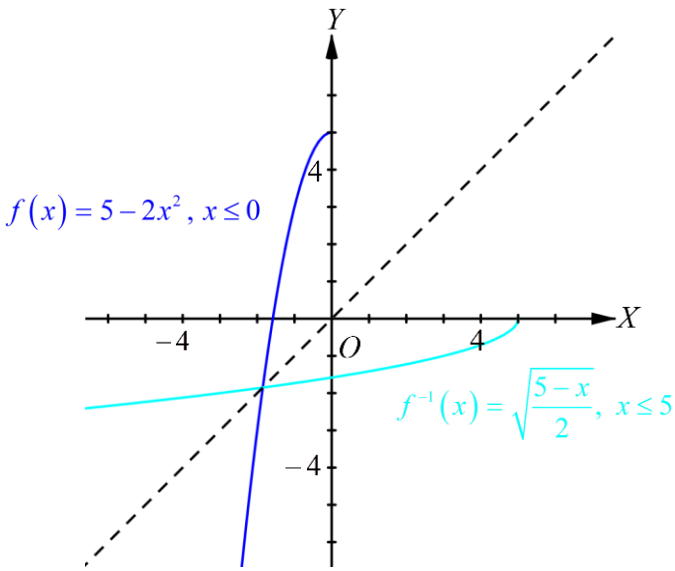
ให้ $y = f(x)$ จะได้ $y = 5x + 3$, $x \geq 0$ หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $$x = \frac{y-3}{5}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = \frac{x-3}{5}$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$ โดยที่ $D_{f^{-1}} = [3, \infty)$

ข. เขียนกราฟของ $f(x) = 5 - 2x^2, x \leq 0$ และเขียนกราฟของ $f^{-1}(x)$ จาก $f(x)$ ได้ดังนี้



จาก $f(x) = 5 - 2x^2, x \leq 0$

จะได้ $R_f = (-\infty, 5]$ ซึ่งเป็นโดเมนของ f^{-1}

ให้ $y = f(x)$ จะได้ $y = 5 - 2x^2$, $x \leq 0$ หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $$2x^2 = 5 - y$$

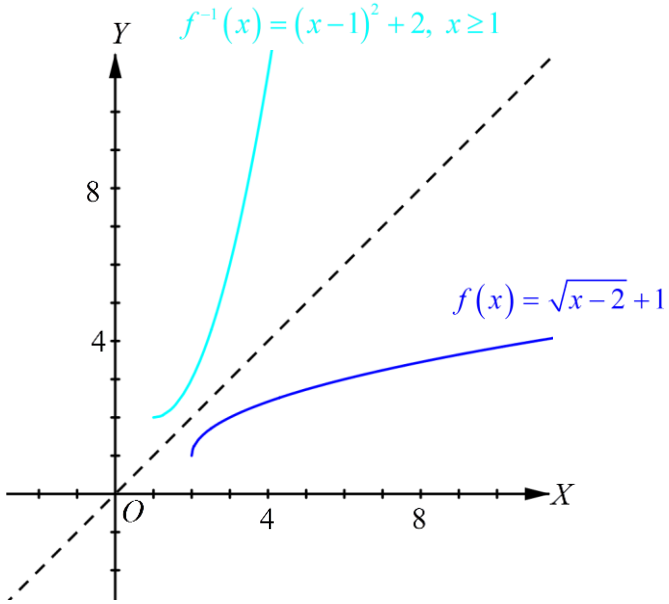
$$x^2 = \frac{5-y}{2}$$

เนื่องจาก $x \le 0$ ดังนั้น $x = -\sqrt{\frac{5-y}{2}}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = -\sqrt{\frac{5-x}{2}}$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{5-x}{2}}$ โดยที่ $D_{f^{-1}} = (-\infty, 5]$

ค. เขียนกราฟของ $f(x) = \sqrt{x-2}+1$ และเขียนกราฟของ $f^{-1}(x)$ จาก $f(x)$ ได้ดังนี้



จาก $f(x) = \sqrt{x-2}+1$

จะได้ $R_f = [1, \infty)$ ซึ่งเป็นโดเมนของ f^{-1}

ให้ $y = f(x)$ จะได้ $y = \sqrt{x-2}+1$ หา x ในพจน์ของ y

จะได้

$$\sqrt{x-2} = y-1$$

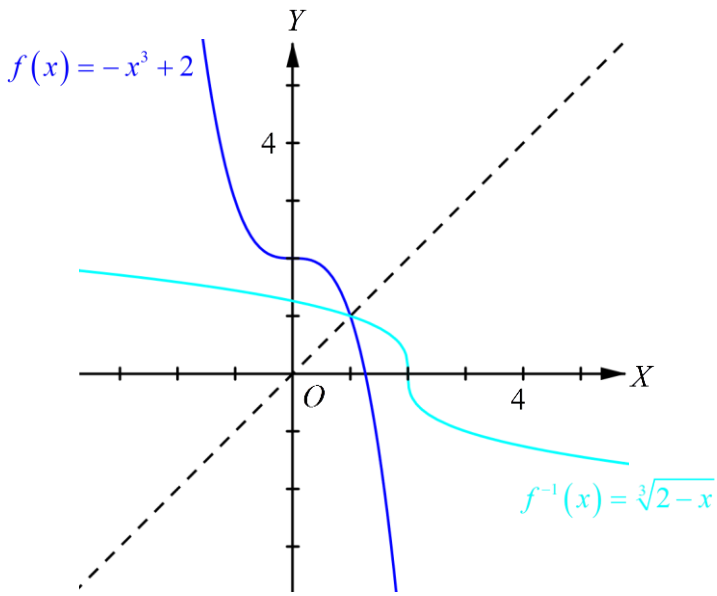
$$x-2 = (y-1)^2$$

$$x = (y-1)^2 + 2$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = (x-1)^2 + 2$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2$ โดยที่ $D_{f^{-1}} = [1, \infty)$

ง. เขียนกราฟของ $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ และเขียนกราฟของ $f^{-1}(x)$ จาก $f(x)$ ได้ดังนี้



จาก $f(x) = -x^3 + 2$

จะได้ $R_f = \mathbb{R}$ ซึ่งเป็นโดเมนของ f^{-1}

ให้ $y = f(x)$ จะได้ $y = -x^3 + 2$ หา x ในพจน์ของ y

จะได้

$$x^3 = 2 - y$$

$$x = \sqrt[3]{2-y}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = \sqrt[3]{2-x}$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2-x}$ โดยที่ $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

27. 1) สำหรับทุก $x \in A$ จะได้

$$f \circ I_A(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$
$$I_B \circ f(x) = I_B(f(x)) = f(x)$$

ดังนั้น $f \circ I_A = f$ และ $I_B \circ f = f$

2) ให้ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

สำหรับทุก $x \in A$ โดยที่ $A = D_f$ จะได้ว่า

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x = I_{D_f}(x)$$

สำหรับทุก $x \in R_f$ โดยที่ $R_f \subset B$ จะได้ว่า

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x = I_{R_f}(x)$$

ดังนั้น ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน แล้ว $f^{-1} \circ f = I_{D_f}$ และ $f \circ f^{-1} = I_{R_f}$

28. เนื่องจาก $f \circ g = h$ และ g มีฟังก์ชันผกผัน

ให้ $x \in D_{g^{-1}}$

จะได้

$$\begin{aligned} h \circ g^{-1}(x) &= h(g^{-1}(x)) \\ &= f \circ g(g^{-1}(x)) \\ &= f(g(g^{-1}(x))) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f = h \circ g^{-1}$

29. เนื่องจาก $f(x) = ax + b$

โดยที่ $f(x)$ แทนความดันน้ำในหน่วยปอนด์ต่อตารางนิ้ว (pound per square inch : psi) ที่ระดับความลึก x ฟุต

a แทนความดันน้ำที่เพิ่มขึ้นต่อความลึกทุก ๆ หนึ่งฟุต

และ b แทนความดันที่ผิวน้ำทะเล (psi)

จากขณะที่นักดำน้ำอยู่ที่ความลึก 40 ฟุต เมื่อความดันน้ำทะเลเพิ่มขึ้น 0.45 psi ทุก ๆ ความลึกหนึ่งฟุต และความดันที่ผิวน้ำทะเลประมาณ 14.7 psi

จะได้ว่า $a = 0.45,\ x = 40$ และ $b = 14.7$

นั่นคือ $f(x) = 0.45(40) + 14.7$

$= 32.7$ psi

ดังนั้น ความดันน้ำทะเลเป็น 32.7 psi

30. 1) ให้ $P(x) = mx + b$ เป็นฟังก์ชันรายได้ของพนักงานบริษัทแห่งนี้ เมื่อได้ค่าเบี้ยเลี้ยงและค่าพาหนะ b บาท และได้ค่านายหน้าร้อยละ m ของยอดขาย

จากโจทย์ นาย ก และนาย ข มียอดขาย 200,000 และ 150,000 บาท ตามลำดับ

จากค่านายหน้าร้อยละ m

จะได้ว่า มียอดขาย 100 บาท จะได้ค่านายหน้า m บาท

ถ้านาย ก มียอดขาย 200,000 บาท จะได้ค่านายหน้า $\frac{m \cdot 200,000}{100} = 2,000m$ บาท

และถ้านาย ข มียอดขาย 150,000 บาท จะได้ค่านายหน้า $\frac{m \cdot 150,000}{100} = 1,500m$ บาท

จากโจทย์ นาย ก และนาย ข ได้รับเงินจากบริษัท 34,000 และ 28,000 บาท ตามลำดับ

จะได้ว่า

$$34,000 = 2,000m + b \quad ---(1)$$

$$28,000 = 1,500m + b \quad ---(2)$$

$(1)-(2)$,

$$6,000 = 500m$$

$$m = 12$$

ดังนั้น บริษัทจ่ายค่านายหน้าให้กับพนักงานร้อยละ 12

2) จาก $34,000 = 2,000m + b$ และ $m = 12$

จะได้

$$34,000 = 2,000(12) + b$$

$$\begin{aligned} b &= 34,000 - 24,000 \\ &= 10,000 \end{aligned}$$

ดังนั้น บริษัทจ่ายค่าเบี้ยเลี้ยงและค่าพาหนะให้กับนาย ก และนาย ข เป็นเงิน

คนละ 10,000 บาท

3) ฟังก์ชันแสดงรายได้ที่พนักงานได้รับในแต่ละเดือน คือ $P(x) = \frac{12}{100}x + 10,000$

เมื่อ x คือยอดขายที่พนักงานทำได้

31. ให้ $f(x)$ แทนรายได้ของบริษัทท่องเที่ยวแห่งนี้

เมื่อ x คือจำนวนนักท่องเที่ยว

จะได้

$$\begin{aligned} f(x) &= [475 - 5(x-75)]x \\ &= (475 - 5x + 375)x \\ &= -5x^2 + 850x \end{aligned}$$

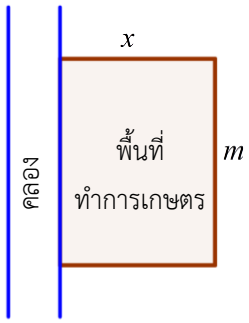
เนื่องจาก กราฟของ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ จะมีจุดวกกลับที่จุด $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

จะได้ว่า กราฟของ $f(x) = -5x^2 + 850x$ มีจุดวกกลับที่ $x = -\frac{850}{2(-5)} = 85$

และ $f(85) = -5(85)^2 + 850(85) = 36,125$

ดังนั้น จำนวนนักท่องเที่ยว 85 คน ทำให้บริษัทท่องเที่ยวมีรายได้มากที่สุด คือ 36,125 บาท

32. 1)



ให้ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

m แทนความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

y แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เนื่องจากรั้วทั้งหมดยาว 120 เมตร

จะได้

$$\begin{aligned} 120 &= x+x+m \\ &= 2x+m \\ m &= 120-2x \end{aligned}$$

ความสัมพันธ์ของพื้นที่กับความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้ คือ

$$\begin{aligned} y &= x\cdot m \\ &= x(120-2x) \\ &= -2x^2+120x \end{aligned}$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ของพื้นที่กับความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้ คือ

$y=-2x^2+120x$

2) เนื่องจาก y แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แสดงว่า $y>0$ เสมอ

จาก $y=f(x)=-2x^2+120x$

จะได้

$$\begin{aligned} -2x^2+120x &> 0 \\ -2x(x-60) &> 0 \\ 2x(x-60) &< 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $0<x<60$

ดังนั้น ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้จะกว้างได้มากที่สุดไม่เกิน 60 เมตร

3) จากกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง $f(x)=ax^2+bx+c$ มีจุดวกกลับ คือ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

จาก $y=f(x)=-2x^2+120x$

จะได้ $a=-2$ และ $b=120$

นั่นคือ จะมีจุดวกกลับเมื่อ $x=-\dfrac{120}{2(-2)}=30$

และ $f(30)=-2(30)^2+120(30)=1{,}800$

ดังนั้น ชายผู้นี้จะล้อมรั้วได้พื้นที่มากที่สุด 1,800 ตารางเมตร

33. จาก $6x+2y=8$ จะได้ $y=\dfrac{8-6x}{2}=4-3x$

เขียน xy ในรูปของ x ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} xy &= x(4-3x) \\ &= 4x-3x^2 \\ &= -3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right) \\ &= -3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= -3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3} \end{aligned}$$

พิจารณา $f(x)=-3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$ เมื่อเทียบกับ $a(x-h)^2+k$

จะได้ $a=-3, h=\dfrac{2}{3}$ และ $k=\dfrac{4}{3}$

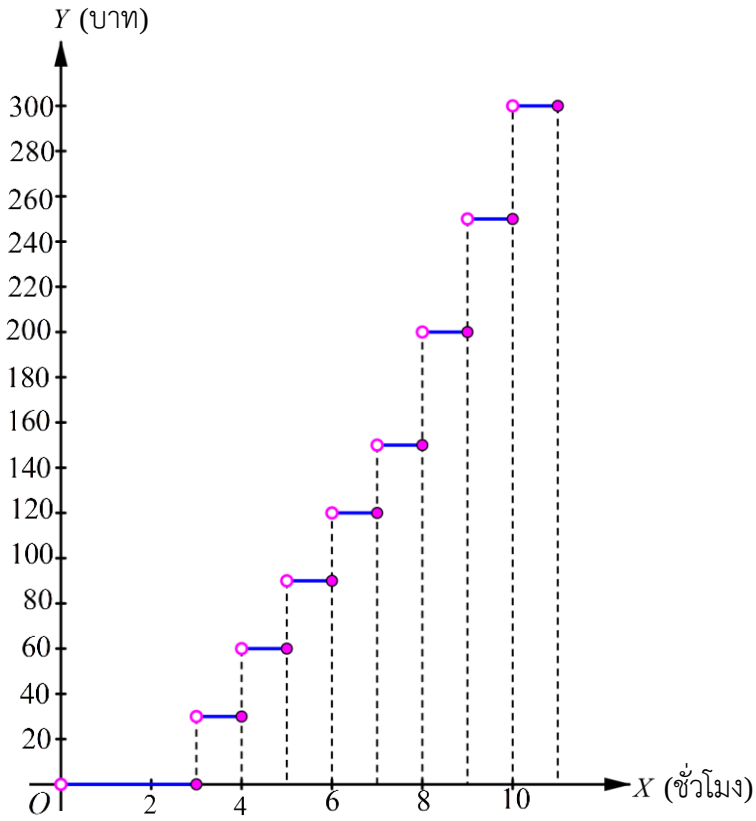
จะได้ว่า พิกัดของจุดวกกลับของกราฟ คือ $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

เนื่องจาก จุดวกกลับของกราฟของ $f(x)=-3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$ จะเป็นจุดที่ $f(x)$ มีค่ามากที่สุด

ดังนั้น ค่ามากที่สุดของ xy คือ $\dfrac{4}{3}$ เมื่อ $6x+2y=8$

34. เขียนฟังก์ชันในรูป $f(x)$ เมื่อ x แทนระยะเวลาในการจอดรถที่อาคารจอดรถแห่งนี้ในหน่วยชั่วโมง และ $f(x)$ แทนอัตราค่าบริการจอดรถของอาคารจอดรถแห่งนี้ในหน่วยบาท ดังนี้

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad 0<x\le 3 \\ 30 & ; \quad 3<x\le 4 \\ 60 & ; \quad 4<x\le 5 \\ 90 & ; \quad 5<x\le 6 \\ 120 & ; \quad 6<x\le 7 \\ 150 & ; \quad 7<x\le 8 \\ 200 & ; \quad 8<x\le 9 \\ 250 & ; \quad 9<x\le 10 \\ 300 & ; \quad 10<x\le 11 \\ \vdots & \qquad \vdots \end{cases}$$



35. สามารถเขียนค่าใช้จ่ายในการผลิตรถยนต์ในรูปฟังก์ชันของระยะเวลาในการผลิตรถยนต์ ได้ดังนี้

$C\circ N(t)=C(100t-5t^2)=5000+6000(100t-5t^2)$ โดยที่ $0\le t\le 10$

36. จาก $A(x) = x + 0.05x = 1.05x$ จะได้

$$\begin{aligned} A \circ A(x) &= A(A(x)) \\ &= A(1.05x) \\ &= 1.05(1.05x) \\ &= (1.05)^2 x \end{aligned}$$

ดังนั้น $A \circ A(x) = (1.05)^2 x$ เป็นฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินรวมที่จะได้เมื่อครบกำหนด 2 ปี

$$\begin{aligned} A \circ A(A(x)) &= A(A(A(x))) \\ &= A(A(1.05x)) \\ &= A\left((1.05)^2 x\right) \\ &= 1.05\left((1.05)^2 x\right) \\ &= (1.05)^3 x \end{aligned}$$

ดังนั้น $A \circ A(A(x)) = (1.05)^3 x$ เป็นฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินรวมที่จะได้เมื่อครบกำหนด 3 ปี

$$\begin{aligned} ((A \circ A) \circ A)(A(x)) &= A(A(A(A(x)))) \\ &= A(A(A(1.05x))) \\ &= A\left(A\left((1.05)^2 x\right)\right) \\ &= A\left((1.05)^3 x\right) \\ &= 1.05\left((1.05)^3 x\right) \\ &= (1.05)^4 x \end{aligned}$$

ดังนั้น $((A \circ A) \circ A)(A(x)) = (1.05)^4 x$ เป็นฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินรวมที่จะได้เมื่อครบกำหนด 4 ปี

และฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชัน A จำนวน n ฟังก์ชัน คือ $(1.05)^n x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันแสดงจำนวนเงินรวมที่จะได้เมื่อครบกำหนด n ปี เมื่อ n แทนจำนวนนับ

37. 1) ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์

เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จะได้ $f(x)=ax+b$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

จากจุดเยือกแข็งของน้ำบริสุทธิ์คือ $0°C$ หรือ $32°F$ จะได้ $f(0)=32$

แทน x ด้วย 0 ใน $f(x)=ax+b$

จะได้ $f(0)=a(0)+b=b$

เนื่องจาก $f(0)=32$ จะได้ $b=32$

ดังนั้น $f(x)=ax+32$

จากจุดเดือดของน้ำบริสุทธิ์คือ $100°C$ หรือ $212°F$ จะได้ $f(100)=212$

แทน x ด้วย 100 ใน $f(x)=ax+32$

จะได้ $f(100)=a(100)+32=100a+32$

เนื่องจาก $f(100)=212$ จะได้ $100a+32=212$ นั่นคือ $a=\frac{9}{5}$

จะได้ว่า $f(x)=\frac{9}{5}x+32$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์ เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส คือ $f(x)=\frac{9}{5}x+32$

2) **วิธีที่ 1** ให้ $g(x)$ ซึ่งแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส

เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์

เนื่องจาก $g(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จะได้ $g(x)=ax+b$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

จากจุดเยือกแข็งของน้ำบริสุทธิ์คือ $0°C$ หรือ $32°F$ จะได้ $g(32)=0$

แทน x ด้วย 32 ใน $g(x)=ax+b$

จะได้ $g(32)=a(32)+b=32a+b$

เนื่องจาก $g(32)=0$ จะได้ $-32a$

ดังนั้น $g(x)=ax-32a=a(x-32)$

จากจุดเดือดของน้ำบริสุทธิ์คือ $100°C$ หรือ $212°F$ จะได้ $g(212)=100$

แทน x ด้วย 212 ใน $g(x)=a(x-32)$

จะได้ $g(212)=a(212-32)=180a$

เนื่องจาก $g(212)=100$ จะได้ $180a=100$ นั่นคือ $a=\frac{5}{9}$

จะได้ว่า $g(x)=\frac{5(x-32)}{9}$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส

เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์ คือ $g(x)=\frac{5(x-32)}{9}$

วิธีที่ 2 ให้ $g(x)$ ซึ่งแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส

เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์

เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส

จะได้ว่า $g(x)=f^{-1}(x)$

จาก $f(x)=\frac{9}{5}x+32$

ให้ $y=f(x)$ จะได้ $y=\frac{9}{5}x+32$ หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $$x=\frac{5(y-32)}{9}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\frac{5(x-32)}{9}$

นั่นคือ $f^{-1}(x)=\frac{5(x-32)}{9}$

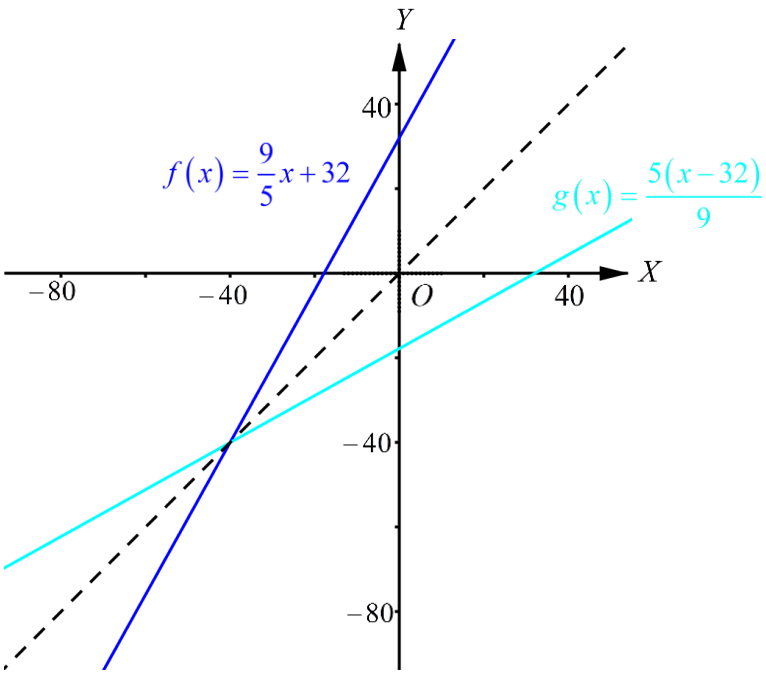
เนื่องจาก $g(x)=f^{-1}(x)$

จะได้ $g(x)=\frac{5(x-32)}{9}$

ดังนั้น ฟังก์ชันแสดงอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาเซลเซียส

เมื่อ x แทนอุณหภูมิที่มีหน่วยเป็นองศาฟาเรนไฮต์ คือ $g(x)=\frac{5(x-32)}{9}$

3) จาก $f(x)=\frac{9}{5}x+32$ และ $g(x)=\frac{5(x-32)}{9}$ เขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่ากราฟของ f และ g เป็นภาพสะท้อนข้ามเส้นตรง $y=x$ ของกันและกัน

ดังนั้น f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของกันและกัน

4) ถ้าอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์วัดได้ 117°F นั่นคือ แทน x ด้วย 117 ใน $g(x)=\frac{5(x-32)}{9}$

จะได้
$$g(117) = \frac{5(117-32)}{9}$$
$$\approx 47.22$$

ดังนั้น ถ้าอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์วัดได้ 117°F จะประมาณ 47.22°C

5) ถ้าอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์วัดได้ 30°C นั่นคือ แทน x ด้วย 30 ใน $f(x)=\frac{9}{5}x+32$

จะได้
$$f(30) = \frac{9}{5}(30)+32$$
$$= 86$$

ดังนั้น ถ้าอุณหภูมิของน้ำบริสุทธิ์วัดได้ 30°C จะเป็น 86°F

38. 1) ให้ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ตัดออก (นิ้ว)

และ $V(x)$ แทนปริมาตรของกล่อง (ลูกบาศก์นิ้ว)

จะได้ $V(x)=(10-2x)(15-2x)x$

2) เนื่องจากกระดาษกว้าง 10 นิ้ว โดยที่ $10-2x>0$ และ $15-2x>0$

จะได้ $0<x<5$

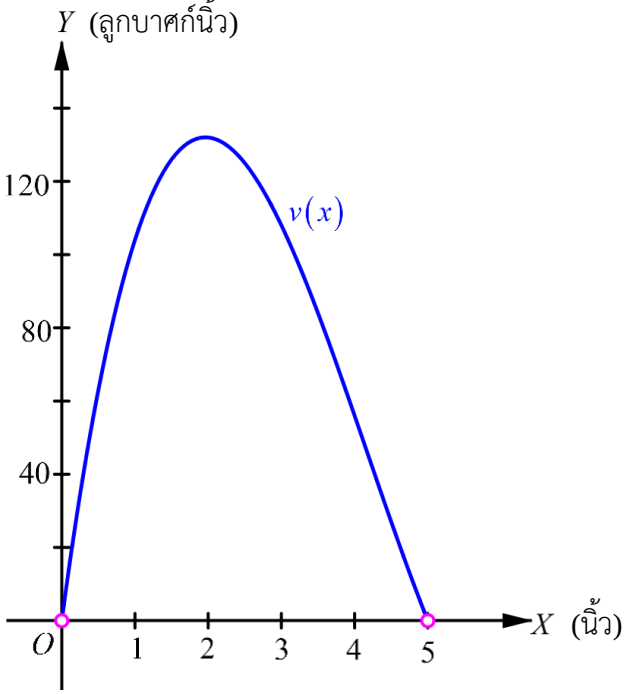
ดังนั้น $D_V=(0,5)$

3) เนื่องจาก $D_V=(0,5)$ และ x เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $x\in\{1,2,3,4\}$

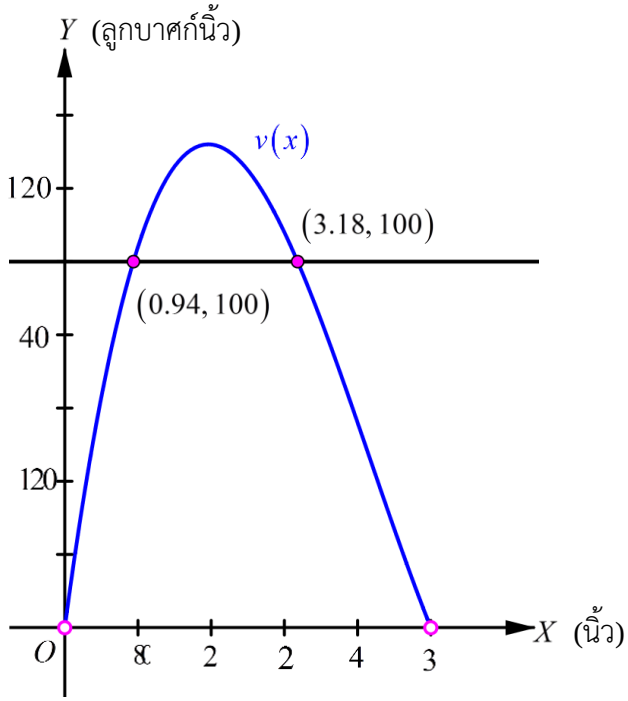
จะได้
$$V(1) = (10-2(1))(15-2(1))(1) = 104$$
$$V(2) = (10-2(2))(15-2(2))(2) = 132$$
$$V(3) = (10-2(3))(15-2(3))(3) = 108$$
$$V(4) = (10-2(4))(15-2(4))(4) = 56$$

ดังนั้น กล่องจะมีปริมาตรมากที่สุดเมื่อ x เป็น 2 และกล่องมีปริมาตร 132 ลูกบาศก์นิ้ว

4) เขียนกราฟของฟังก์ชัน $V(x)$ ได้ดังนี้



5) ในการหาค่า x ที่ทำให้กล่องมีปริมาตรเท่ากับ 100 ลูกบาศก์นิ้ว สามารถทำได้โดยเขียนเส้นตรง $y = 100$ ลงในกราฟข้อ 4) จะได้จุดตัด ดังรูป



ดังนั้น กล่องจะมีความจุ 100 ลูกบาศก์นิ้ว เมื่อด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวประมาณ 0.94 นิ้ว และ 3.18 นิ้ว

บทที่ 2 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

แบบฝึกหัด 2.1ก

1. 1)

$$\frac{2^{-3}3^{-5}}{3^{-5}2^{0}} = 2^{-3-0}3^{-5-(-5)} = 2^{-3}3^{0} = \frac{1}{2^{3}} = \frac{1}{8}$$

2)

$$\frac{x^{9}(2x)^{4}}{x^{3}} = \frac{x^{9}2^{4}x^{4}}{x^{3}} = 16x^{9+4-3} = 16x^{10}$$

3)

$$b^{4}\left(\frac{1}{3}b^{2}\right)\left(12b^{-8}\right) = \frac{12}{3}b^{4+2+(-8)} = 4b^{-2} = \frac{4}{b^{2}}$$

4)

$$\left(a^{-5}b^{7}\right)\left(a^{-2}b^{-7}c^{0}\right) = a^{-5+(-2)}b^{7+(-7)}c^{0} = a^{-7}b^{0}c^{0} = \frac{1}{a^{7}}$$

5)

$$\left(2ab^{-1}\right)\left(ab^{2}\right)^{-2} = \left(2ab^{-1}\right)\left(a^{-2}b^{-4}\right) = 2a^{1+(-2)}b^{-1+(-4)} = 2a^{-1}b^{-5} = \frac{2}{ab^{5}}$$

6)
$$\left(\frac{1}{2}x^{-3}y^{2}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} x^{(-3)(-4)}y^{(2)(-4)}$$
$$= 2^{4}x^{12}y^{-8}$$
$$= \frac{16x^{12}}{y^{8}}$$

7)
$$\left(\frac{1}{3a^{2}b^{-3}}\right)^{-2} = \frac{(1)^{-2}}{3^{-2}a^{(2)(-2)}b^{(-3)(-2)}}$$
$$= \frac{1}{3^{-2}a^{-4}b^{6}}$$
$$= \frac{3^{2}a^{4}}{b^{6}}$$
$$= \frac{9a^{4}}{b^{6}}$$

8)
$$\frac{\left(x^{2}y^{3}\right)\left(xy^{4}\right)^{-3}}{x^{2}y} = \frac{\left(x^{2}y^{3}\right)\left(x^{(1)(-3)}y^{(4)(-3)}\right)}{x^{2}y}$$
$$= \frac{\left(x^{2}y^{3}\right)\left(x^{-3}y^{-12}\right)}{x^{2}y}$$
$$= x^{2+(-3)-2}\,y^{3+(-12)-1}$$
$$= x^{-3}y^{-10}$$
$$= \frac{1}{x^{3}y^{10}}$$

2. 1) เป็นจริง

2) เป็นเท็จ

เช่น ให้ $x=2,\ m=3$ และ $n=2$

จะได้ $\dfrac{x^{m}}{x^{-n}} = \dfrac{2^{3}}{2^{-2}} = \dfrac{8}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 8\times 4 = 32$ แต่ $x^{m-n} = 2^{3-2} = 2$

ซึ่งจะเห็นว่า $\dfrac{x^{m}}{x^{-n}} \neq x^{m-n}$

3) เป็นเท็จ

เช่น ให้ $x=2,\ m=3$ และ $n=2$

จะได้ $\frac{1}{x^m}\cdot\frac{1}{x^n} = \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{32}$ แต่ $x^{m-n} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

ซึ่งจะเห็นว่า $\frac{1}{x^m}\cdot\frac{1}{x^n} \neq x^{m-n}$

4) เป็นเท็จ

เช่น ให้ $x=2,\ m=3$ และ $n=2$

จะได้ $x^m + x^n = 2^3 + 2^2 = 8+4 = 12$ แต่ $x^{m+n} = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

ซึ่งจะเห็นว่า $x^m + x^n \neq x^{m+n}$

5) เป็นจริง

6) เป็นเท็จ

เช่น ให้ $x=\frac{1}{2}$ และ $m=2$

จะได้ $x^m = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

ซึ่งจะเห็นว่า $x^m < 1$

3. 1)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{64} &= \sqrt[3]{4\times4\times4}\\ &= 4\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\sqrt[4]{256} &= \sqrt[4]{4\times4\times4\times4}\\ &= 4\end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt[3]{-27}} &= \frac{3}{\sqrt[3]{(-3)\times(-3)\times(-3)}}\\ &= \frac{3}{-3}\\ &= -1\end{aligned}$$

4) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt[6]{1}}{\sqrt[6]{64}}$

$= \frac{1}{\sqrt[6]{2\times2\times2\times2\times2\times2}}$

$= \frac{1}{2}$

5) $\sqrt{8x^2} = \sqrt{8}\cdot\sqrt{x^2}$

$= 2\sqrt{2}\cdot|x|$

6) $\sqrt[4]{16x^8} = 2\sqrt[4]{x^8}$

$= 2x^2$

4. 1) $\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{5\times2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{10}}{2}$

2) $\sqrt{\frac{3}{20}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}\cdot\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{20}}$

$= \frac{\sqrt{3\times20}}{20}$

$= \frac{\sqrt{3\times2\times2\times5}}{20}$

$= \frac{2\sqrt{15}}{20}$

$$= \frac{\sqrt{15}}{10}$$

3)
$$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{7\times 3}}{\sqrt{5\times 3}}$$
$$= \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}}{5}$$
$$= \frac{\sqrt{7\times 5}}{5}$$
$$= \frac{\sqrt{35}}{5}$$

4)
$$\frac{\sqrt{96}}{2\sqrt{12}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{12}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{96}{12}}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{8}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}$$

5)
$$\frac{3\sqrt{8}}{4\sqrt{12}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}}$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\sqrt{\frac{8}{12}}$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{12}$$

$$= \frac{3\sqrt{2 \times 3}}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}$$

6) $$\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{18}}{2}$$

5. 1) $$\left(\sqrt{72} - 3\sqrt{5}\right) + \left(3\sqrt{20} + \sqrt{50}\right) = \left(6\sqrt{2} - 3\sqrt{5}\right) + \left(6\sqrt{5} + 5\sqrt{2}\right)$$

$$= 11\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$$

2) $$3\sqrt{5}\left(\sqrt{10} + 2\sqrt{5}\right) = \left(3\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}\right) + \left(3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}\right)$$

$$= 15\sqrt{2} + 30$$

3) $$\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 = (2)^2 + 2(2)\left(\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 7 + 4\sqrt{3}$$

4) $$\left(\sqrt{5} - 2\right)\left(2\sqrt{5} - 1\right) = \left(\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} - \sqrt{5}\right) - \left(4\sqrt{5} - 2\right)$$

$$= 12 - 5\sqrt{5}$$

5) $$\left(2\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{3} - \sqrt{7}\right) = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$= 12 - 7$$

$$= 5$$

6) **วิธีที่ 1** $$\left(\sqrt[3]{3} - 1\right)\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1\right) = \left(\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3}\right) - \left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1\right)$$

$$= \left(3 + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}\right) - \left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1\right)$$

$$= 2$$

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1\right) &= \left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}+1\right]\\ &= \left(\sqrt[3]{3}\right)^3-1^3\\ &= 3-1\\ &= 2\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.1ข

1. 1)

$$\begin{aligned}27^{\frac{2}{3}} &= \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}\\ &= 3^{3\cdot\frac{2}{3}}\\ &= 3^2\\ &= 9\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}16^{-\frac{1}{4}} &= \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}\\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{\frac{1}{4}}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{4\cdot\frac{1}{4}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}(0.25)^{\frac{3}{2}} &= \left[(0.5)^2\right]^{\frac{3}{2}}\\ &= (0.5)^{2\cdot\frac{3}{2}}\\ &= (0.5)^3\\ &= 0.125\end{aligned}$$

4)
$$\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\right]^{\frac{2}{3}}$$
$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{3\cdot\frac{2}{3}}$$
$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$$
$$= \frac{1}{25}$$

5)
$$(-125)^{-\frac{1}{3}} = \left(-\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{3}\right]^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(-\frac{1}{5}\right)^{3\cdot\frac{1}{3}}$$
$$= -\frac{1}{5}$$

6)
$$(-27)^{\frac{2}{3}} = \left[(-3)^{3}\right]^{\frac{2}{3}}$$
$$= (-3)^{3\cdot\frac{2}{3}}$$
$$= (-3)^{2}$$
$$= 9$$

7)
$$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}}$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2\cdot\frac{3}{2}}$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{3}$$
$$= \frac{27}{64}$$

8)
$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[(2)^{-3}\right]^{\frac{2}{3}}$$
$$= 2^{(-3)\left(\frac{2}{3}\right)}$$
$$= 2^{-2}$$
$$= \frac{1}{2^2}$$
$$= \frac{1}{4}$$

2. 1)
$$\left(\frac{27x^3}{y^6}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{27^{\frac{2}{3}}x^{3\left(\frac{2}{3}\right)}}{y^{6\left(\frac{2}{3}\right)}}$$
$$= \frac{3^2x^2}{y^4}$$
$$= \frac{9x^2}{y^4}$$

2)
$$\left(\frac{x^{-4}}{4y^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4x^4y^6}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}x^{4\left(\frac{1}{2}\right)}y^{6\left(\frac{1}{2}\right)}}$$
$$= \frac{1}{2x^2y^3}$$

3)
$$\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{3}{2}}}\right)^3 = \left(x^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{2}\right)}\right)^3$$
$$= \left(x^{\frac{13}{6}}\right)^3$$
$$= x^{\frac{13}{2}}$$

4) $$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}\right)^2$$
$$= \left(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}\right)^2$$
$$= x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$$

3. 1) $$5\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108} = 5\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4}$$
$$= 6\sqrt[3]{4}$$

2) $$\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375}-\sqrt[3]{192} = 3\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}$$
$$= 4\sqrt[3]{3}$$

3) $$3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt[4]{64} = 3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2\sqrt[4]{4}$$
$$= 3\sqrt{2}+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

4) $$\sqrt{4x^3}-\sqrt{16x^5}+\sqrt{x^9} = 2x\sqrt{x}-4x^2\sqrt{x}+x^4\sqrt{x}$$
$$= x\sqrt{x}\left(2-4x+x^3\right)$$
$$= x\sqrt{x}\left(x^3-4x+2\right)$$

4. 1) $$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{8-3}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$$

2)
$$\frac{40}{9\sqrt{5}-5\sqrt{7}} = \frac{40}{9\sqrt{5}-5\sqrt{7}} \times \frac{9\sqrt{5}+5\sqrt{7}}{9\sqrt{5}+5\sqrt{7}}$$
$$= \frac{40\left(9\sqrt{5}+5\sqrt{7}\right)}{\left(9\sqrt{5}-5\sqrt{7}\right)\left(9\sqrt{5}+5\sqrt{7}\right)}$$
$$= \frac{40\left(9\sqrt{5}+5\sqrt{7}\right)}{\left(9\sqrt{5}\right)^2-\left(5\sqrt{7}\right)^2}$$
$$= \frac{40\left(9\sqrt{5}+5\sqrt{7}\right)}{405-175}$$
$$= \frac{40\left(9\sqrt{5}+5\sqrt{7}\right)}{230}$$
$$= \frac{4\left(9\sqrt{5}+5\sqrt{7}\right)}{23}$$

3)
$$\frac{7\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{4\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{4\sqrt{6}+\sqrt{5}} \times \frac{4\sqrt{6}-\sqrt{5}}{4\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\left(7\sqrt{6}+3\sqrt{5}\right)\left(4\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}{\left(4\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(4\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)}$$
$$= \frac{7\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{6}-7\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}+3\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{6}-3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\left(4\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$
$$= \frac{168-7\sqrt{30}+12\sqrt{30}-15}{96-5}$$
$$= \frac{153+5\sqrt{30}}{91}$$

4)
$$\frac{10\sqrt{6}-2\sqrt{7}}{3\sqrt{6}+2\sqrt{7}} = \frac{10\sqrt{6}-2\sqrt{7}}{3\sqrt{6}+2\sqrt{7}}\times\frac{3\sqrt{6}-2\sqrt{7}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{7}}$$
$$= \frac{\left(10\sqrt{6}-2\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{7}\right)}{\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{6}-2\sqrt{7}\right)}$$
$$= \frac{\left(10\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{6}-10\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{7}\right)-\left(2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{6}-2\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\right)}{\left(3\sqrt{6}\right)^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2}$$
$$= \frac{\left(180-20\sqrt{42}\right)-\left(6\sqrt{42}-28\right)}{54-28}$$
$$= \frac{208-26\sqrt{42}}{26}$$
$$= 8-\sqrt{42}$$

5. 1)
$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$
$$= \frac{\left(3-2\sqrt{3}+1\right)+\left(3+2\sqrt{3}+1\right)}{3-1}$$
$$= \frac{8}{2}$$
$$= 4$$

2)
$$\frac{18}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{12}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{18\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+12\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}$$
$$= \frac{\left(18\sqrt{3}-18\sqrt{2}\right)+\left(12\sqrt{3}+12\sqrt{2}\right)}{3-2}$$
$$= \frac{30\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{1}$$
$$= 30\sqrt{3}-6\sqrt{2}$$
$$= 6\left(5\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

3)
$$\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}-1}-\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \left(\frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right)-\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} - \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{3-1} - \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4-3}$$

$$= 2\left(\sqrt{3}+1\right)^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)^2$$

$$= 2\left(3+2\sqrt{3}+1\right) - \left(4+4\sqrt{3}+3\right)$$

$$= \left(8+4\sqrt{3}\right) - \left(7+4\sqrt{3}\right)$$

$$= 1$$

6. 1) $$\left(\sqrt{p+q}+\sqrt{p-q}\right)^2 = \left(\sqrt{p+q}\right)^2 + 2\sqrt{p+q}\cdot\sqrt{p-q} + \left(\sqrt{p-q}\right)^2$$

$$= (p+q) + 2\sqrt{(p+q)(p-q)} + (p-q)$$

$$= 2p + 2\sqrt{p^2-q^2}$$

$$= 2\left(p+\sqrt{p^2-q^2}\right)$$

2) $$\left(3\sqrt{a^2+b^2}-2\sqrt{a^2-b^2}\right)^2 = \left(3\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 - 2\left(3\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(2\sqrt{a^2-b^2}\right) + \left(2\sqrt{a^2-b^2}\right)^2$$

$$= 9\left(a^2+b^2\right) - 12\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2} + 4\left(a^2-b^2\right)$$

$$= 13a^2+5b^2-12\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)}$$

$$= 13a^2+5b^2-12\sqrt{a^4-b^4}$$

3) $$\left(\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+3}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2x-1}\right)\left(2\sqrt{x+3}\right) + \left(2\sqrt{x+3}\right)^2$$

$$= (2x-1) + 4\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x+3} + 4(x+3)$$

$$= 6x+11+4\sqrt{(2x-1)(x+3)}$$

$$= 6x+11+4\sqrt{2x^2+5x-3}$$

7. 1) $$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2-1}$$

$$\approx \frac{2.44949-1.73205-1.41421+1}{2-1}$$

$$= 0.30323$$

2) $$\frac{\sqrt{5}-2}{9-4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-2}{9-4\sqrt{5}} \times \frac{9+4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)}{\left(9-4\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{9\sqrt{5}+20-18-8\sqrt{5}}{81-80}$$

$$= \sqrt{5}+2$$

$$\approx 2.23607+2$$

$$= 4.23607$$

3) $$\frac{5+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} = \frac{5+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} \times \frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(5+2\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{35-20\sqrt{3}+14\sqrt{3}-24}{49-48}$$

$$= 11-6\sqrt{3}$$

$$\approx 11-6\left(1.73205\right)$$

$$= 0.6077$$

8. 1) จาก

$$\begin{aligned} \sqrt{m}-8 &= 0 \\ \sqrt{m} &= 8 \\ \left(\sqrt{m}\right)^2 &= (8)^2 \end{aligned}$$

จะได้ $m = 64$

ตรวจคำตอบ แทน m ในสมการ $\sqrt{m}-8 = 0$ ด้วย 64 จะได้

$$\begin{aligned} \sqrt{64}-8 &= 0 \\ 8-8 &= 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{64\}$

2) จาก

$$\begin{aligned} \sqrt{5x+1}+6 &= 10 \\ \sqrt{5x+1} &= 4 \\ \left(\sqrt{5x+1}\right)^2 &= (4)^2 \\ 5x+1 &= 16 \\ 5x &= 15 \end{aligned}$$

จะได้ $x = 3$

ตรวจคำตอบ แทน x ในสมการ $\sqrt{5x+1}+6 = 10$ ด้วย 3 จะได้

$$\begin{aligned} \sqrt{5(3)+1}+6 &= 10 \\ \sqrt{16}+6 &= 10 \\ 4+6 &= 10 \\ 10 &= 10 \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{3\}$

3) จาก

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2+5} &= r \\ \left(\sqrt{r^2+5}\right)^2 &= r^2 \\ r^2+5 &= r^2 \end{aligned}$$

จะได้ $5 = 0$ เป็นเท็จ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\varnothing$

4) จาก
$$\sqrt{x+7} = x-5$$
$$\left(\sqrt{x+7}\right)^2 = (x-5)^2$$
$$x+7 = x^2-10x+25$$
$$x^2-11x+18 = 0$$
$$(x-2)(x-9) = 0$$

จะได้ $x=2$ หรือ $x=9$

ตรวจคำตอบ แทน x ในสมการ $\sqrt{x+7} = x-5$ ด้วย 2 จะได้
$$\sqrt{2+7} = 2-5$$
$$\sqrt{9} = -3$$
$$3 = -3$$ เป็นเท็จ

แทน x ในสมการ $\sqrt{x+7} = x-5$ ด้วย 9 จะได้
$$\sqrt{9+7} = 9-5$$
$$\sqrt{16} = 4$$
$$4 = 4$$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{9\}$

5) จาก
$$\sqrt{x-7} = \sqrt{3x+1}$$
$$\left(\sqrt{x-7}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+1}\right)^2$$
$$x-7 = 3x+1$$
$$2x = -8$$

จะได้ $x = -4$

ตรวจคำตอบ แทน x ในสมการ $\sqrt{x-7} = \sqrt{3x+1}$ ด้วย -4 จะได้

$$\sqrt{-4-7} = \sqrt{3(-4)+1}$$
$$\sqrt{-11} = \sqrt{-11}$$

เนื่องจาก $\sqrt{-11} \notin \mathbb{R}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\varnothing$

6) จาก
$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 2$$
$$\sqrt{x+1} = 2+\sqrt{x}$$
$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(2+\sqrt{x}\right)^2$$
$$x+1 = 4+4\sqrt{x}+x$$
$$4\sqrt{x} = -3$$
$$\sqrt{x} = -\frac{3}{4}$$

เนื่องจาก $\sqrt{x} \geq 0$ เสมอ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\varnothing$

7) จาก
$$\sqrt{x-3} = \sqrt{x}-3$$
$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(\sqrt{x}-3\right)^2$$
$$x-3 = x-6\sqrt{x}+9$$
$$6\sqrt{x} = 12$$
$$\sqrt{x} = 2$$
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (2)^2$$

จะได้
$$x = 4$$

ตรวจคำตอบ แทน x ในสมการ $\sqrt{x-3} = \sqrt{x}-3$ ด้วย 4 จะได้

$$\sqrt{4-3} = \sqrt{4}-3$$
$$\sqrt{1} = 2-3$$

$$1 = -1$$ เป็นเท็จ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\varnothing$

8) จาก
$$\sqrt{x+12}+\sqrt{x} = 2$$
$$\sqrt{x+12} = 2-\sqrt{x}$$
$$\left(\sqrt{x+12}\right)^2 = \left(2-\sqrt{x}\right)^2$$
$$x+12 = 4-4\sqrt{x}+x$$
$$4\sqrt{x} = -8$$
$$\sqrt{x} = -2$$

เนื่องจาก $\sqrt{x} \geq 0$ เสมอ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\varnothing$

9) จาก
$$-\sqrt{x^2+21} = x+3$$
$$\left(-\sqrt{x^2+21}\right)^2 = (x+3)^2$$
$$x^2+21 = x^2+6x+9$$
$$6x = 12$$

จะได้
$$x = 2$$

ตรวจคำตอบ แทน x ในสมการ $-\sqrt{x^2+21} = x+3$ ด้วย 2 จะได้

$$-\sqrt{(2)^2+21} = 2+3$$
$$-\sqrt{4+21} = 5$$
$$-\sqrt{25} = 5$$
$$-5 = 5$$ เป็นเท็จ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\varnothing$

10) จาก
$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x-5} = 9$$
$$\sqrt{3x+4} = 9-\sqrt{3x-5}$$
$$\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = \left(9-\sqrt{3x-5}\right)^2$$

$$3x+4 = 81-18\sqrt{3x-5}+(3x-5)$$
$$18\sqrt{3x-5} = 72$$
$$\sqrt{3x-5} = 4$$
$$\left(\sqrt{3x-5}\right)^2 = 4^2$$
$$3x-5 = 16$$
$$3x = 21$$

จะได้ $x = 7$

ตรวจคำตอบ แทน x ในสมการ $\sqrt{3x+4}+\sqrt{3x-5} = 9$ ด้วย 7 จะได้

$$\sqrt{3(7)+4}+\sqrt{3(7)-5} = 9$$
$$\sqrt{21+4}+\sqrt{21-5} = 9$$
$$\sqrt{25}+\sqrt{16} = 9$$
$$5+4 = 9$$
$$9 = 9$$ เป็นจริง

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{7\}$

11) จาก $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}$

$$\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{x-2}\right)^2 = \left(\sqrt{x+3}\right)^2$$
$$(4x+1)-2\sqrt{4x+1}\cdot\sqrt{x-2}+(x-2) = x+3$$
$$2\sqrt{(4x+1)(x-2)} = 4x-4$$
$$2\sqrt{4x^2-7x-2} = 4x-4$$
$$\sqrt{4x^2-7x-2} = 2x-2$$
$$\left(\sqrt{4x^2-7x-2}\right)^2 = (2x-2)^2$$
$$4x^2-7x-2 = 4x^2-8x+4$$

จะได้ $x = 6$

ตรวจคำตอบ แทน x ในสมการ $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}$ ด้วย 6 จะได้

$$\begin{aligned}
\sqrt{4(6)+1}-\sqrt{6-2} &= \sqrt{6+3} \\
\sqrt{25}-\sqrt{4} &= \sqrt{9} \\
5-2 &= 3 \\
3 &= 3 \quad \text{เป็นจริง}
\end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{6\}$

12) จาก

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2} &= \sqrt{6x+13} \\
\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}\right)^2 &= \left(\sqrt{6x+13}\right)^2 \\
(x+7)+2\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{x+2}+(x+2) &= 6x+13 \\
2\sqrt{(x+7)(x+2)} &= 4x+4 \\
\sqrt{x^2+9x+14} &= 2x+2 \\
\left(\sqrt{x^2+9x+14}\right)^2 &= (2x+2)^2 \\
x^2+9x+14 &= 4x^2+8x+4 \\
3x^2-x-10 &= 0 \\
(3x+5)(x-2) &= 0
\end{aligned}$$

จะได้ $x=-\frac{5}{3}$ หรือ $x=2$

ตรวจคำตอบ แทน x ในสมการ $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$ ด้วย $-\frac{5}{3}$ จะได้

$$\begin{aligned}
\sqrt{-\frac{5}{3}+7}+\sqrt{-\frac{5}{3}+2} &= \sqrt{6\left(-\frac{5}{3}\right)+13} \\
\sqrt{\frac{16}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}} &= \sqrt{3} \\
\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3} &= \sqrt{3} \\
\frac{5\sqrt{3}}{3} &= \sqrt{3} \quad \text{เป็นเท็จ}
\end{aligned}$$

แทน x ในสมการ $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$ ด้วย 2 จะได้

$$\sqrt{2+7}+\sqrt{2+2} = \sqrt{6(2)+13}$$
$$\sqrt{9}+\sqrt{4} = \sqrt{25}$$
$$3+2 = 5$$
$$5 = 5 \quad \text{เป็นจริง}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{2\}$

9. ให้ a เป็นระยะทางเฉลี่ยจากดาวเคราะห์ไปยังดวงอาทิตย์ มีหน่วยเป็น AU ซึ่งหาได้จาก

$$a = p^{\frac{2}{3}}$$

เมื่อ p แทนเวลาที่ดาวเคราะห์โคจรรอบดวงอาทิตย์ 1 รอบ มีหน่วยเป็นปี

1) เนื่องจาก ดาวเนปจูนมีเวลาโคจรรอบดวงอาทิตย์ประมาณ 165 ปี

จะได้ ระยะทางเฉลี่ยจากดาวเนปจูนไปยังดวงอาทิตย์เป็น

$$a = 165^{\frac{2}{3}}$$
$$a \approx 30.0831$$

ดังนั้น ระยะทางเฉลี่ยจากดาวเนปจูนไปยังดวงอาทิตย์ประมาณ 30.0831 AU

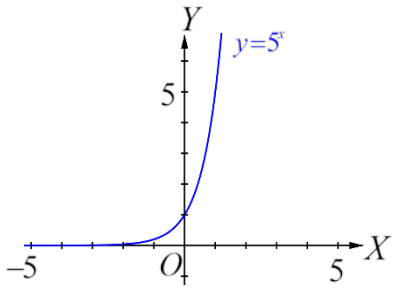
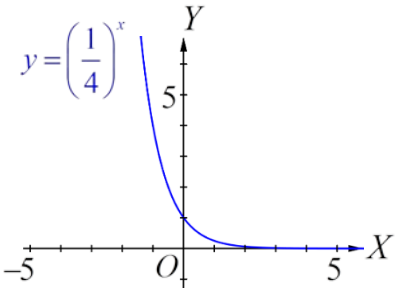
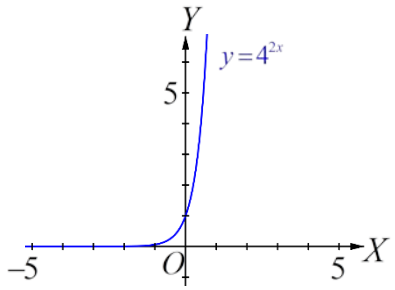
2) เนื่องจาก ดาวศุกร์มีระยะทางเฉลี่ยไปยังดวงอาทิตย์เป็น 0.72 AU

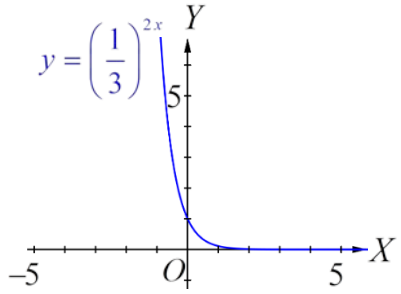
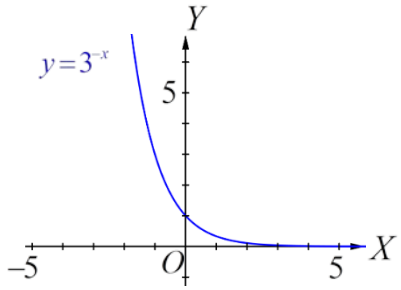
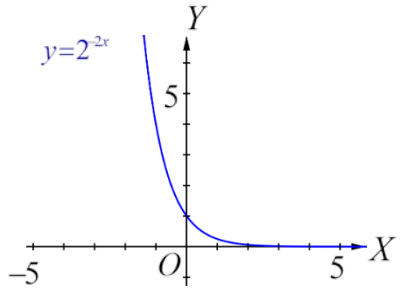
จะได้
$$0.72 = p^{\frac{2}{3}}$$
$$\left(p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = (0.72)^{\frac{3}{2}}$$
$$p = (0.72)^{\frac{3}{2}}$$
$$p \approx 0.6109$$

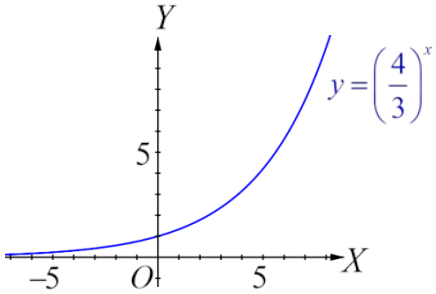
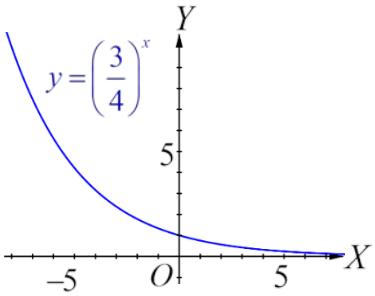
ดังนั้น ดาวศุกร์จะมีเวลาโคจรรอบดวงอาทิตย์ประมาณ 0.6109 ปี

แบบฝึกหัด 2.2

1. แสดงการเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดและเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังตารางต่อไปนี้

ฟังก์ชันที่กำหนดให้	ฟังก์ชันเพิ่ม	ฟังก์ชันลด	กราฟของฟังก์ชัน
1) $y = 5^x$	✓	–	
2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	–	✓	
3) $y = 4^{2x}$	✓	–	

ฟังก์ชันที่กำหนดให้	ฟังก์ชันเพิ่ม	ฟังก์ชันลด	กราฟของฟังก์ชัน
4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$	–	✓	
5) $y=3^{-x}$	–	✓	
6) $y=2^{-2x}$	–	✓	

ฟังก์ชันที่กำหนดให้	ฟังก์ชันเพิ่ม	ฟังก์ชันลด	กราฟของฟังก์ชัน
7) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$	✓	–	
8) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$	–	✓	

2. 1) เนื่องจากกราฟผ่านจุด $(2, 9)$

ดังนั้น แทน x และ y ในสมการ $y=a^x$ ด้วย 2 และ 9 ตามลำดับ

จะได้ว่า $9 = a^2$

นั่นคือ $a=-3$ หรือ $a=3$

เนื่องจาก $a>0$

ดังนั้น กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของฟังก์ชัน $y=3^x$

2) เนื่องจากกราฟผ่านจุด $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$

ดังนั้น แทน x และ y ในสมการ $y = a^x$ ด้วย -1 และ $\frac{1}{5}$ ตามลำดับ

จะได้ว่า $\frac{1}{5} = a^{-1}$

นั่นคือ $a = 5$

ดังนั้น กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของฟังก์ชัน $y = 5^x$

3) เนื่องจากกราฟผ่านจุด $\left(2, \frac{1}{16}\right)$

ดังนั้น แทน x และ y ในสมการ $y = a^x$ ด้วย 2 และ $\frac{1}{16}$ ตามลำดับ

จะได้ว่า $\frac{1}{16} = a^2$

นั่นคือ $a = -\frac{1}{4}$ หรือ $a = \frac{1}{4}$

เนื่องจาก $a > 0$

ดังนั้น กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของฟังก์ชัน $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

4) เนื่องจากกราฟผ่านจุด $(-3, 8)$

ดังนั้น แทน x และ y ในสมการ $y = a^x$ ด้วย -3 และ 8 ตามลำดับ

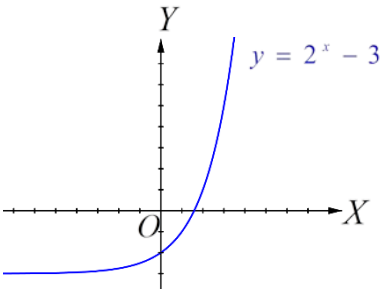
จะได้ว่า $8 = a^{-3}$

$a^3 = \frac{1}{8}$

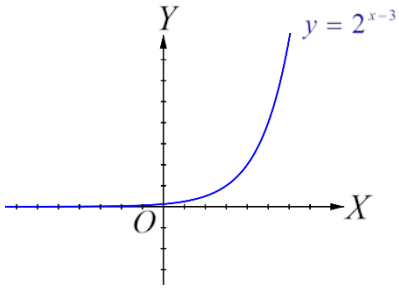
นั่นคือ $a = \frac{1}{2}$

ดังนั้น กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของฟังก์ชัน $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

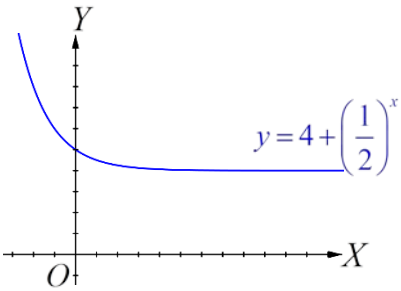
3. 1)



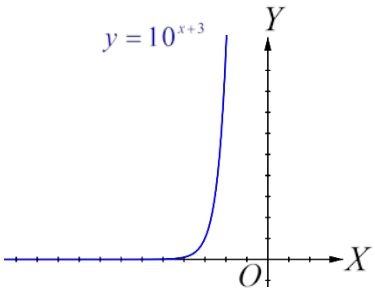
2)



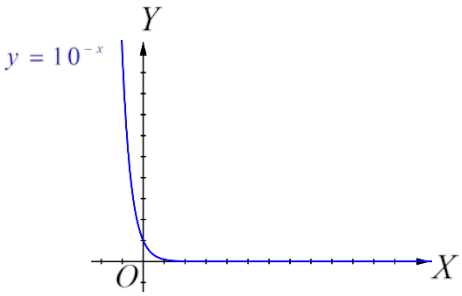
3)



4)



5)



4. 1) ค 2) ก

3) จ 4) ข

5) ง

5. 1) $f(2) = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

2) $g(3) = 3^3 = 27$

3) $f(0) = 2^{-0} = 2^0 = 1$

$g(0) = 3^0 = 1$

ดังนั้น $f(0)+g(0) = 1+1 = 2$

4) $g(4) = 3^4 = 81$

$f(4) = 2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

ดังนั้น $g(4)-f(4) = 81-\frac{1}{16} = \frac{1295}{16}$

5) $f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$g(1) = 3^1 = 3$

ดังนั้น $f(1)\cdot g(1) = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2}$

6) $f(3) = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$g(2) = 3^2 = 9$

ดังนั้น $\frac{f(3)}{g(2)} = \frac{\frac{1}{8}}{9} = \frac{1}{72}$

7) $(f\circ g)(1) = f(g(1)) = f(3^1) = f(3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

8) $(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(2^{-1}) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

6. 1) จาก $10^x = 100$

$10^x = 10^2$

เนื่องจาก $f(x)=10^x$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$

จะได้ $x = 2$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{2\}$

2) จาก $3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 3^{-3}$

เนื่องจาก $f(x) = 3^x$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$

จะได้ $x = -3$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-3\}$

3) จาก $16^x = 4$

$4^{2x} = 4^1$

เนื่องจาก $f(x) = 4^x$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$

จะได้ $2x = 1$

นั่นคือ $x = \frac{1}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

4) จาก $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

เนื่องจาก $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$

จะได้ $x = -4$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-4\}$

5) จาก $4^{-x} = \frac{1}{64}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3}$$

เนื่องจาก $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$

จะได้ $x = 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{3\}$

6) จาก $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 64$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$$

เนื่องจาก $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$

จะได้ $2x = -6$

นั่นคือ $x = -3$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-3\}$

7) จาก $5^{x} \leq 125$

$$5^{x} \leq 5^{3}$$

เนื่องจาก $f(x) = 5^{x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ $x \leq 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty, 3]$

8) จาก $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq \frac{81}{16}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

เนื่องจาก $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลด

จะได้ $x \leq -4$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty,-4]$

9) จาก $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} < 64$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

เนื่องจาก $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลด

จะได้ $2x > -3$

นั่นคือ $x > -\frac{3}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$

10) จาก $\frac{27}{125} < \left(\frac{5}{3}\right)^x \leq 1$

$\left(\frac{5}{3}\right)^{-3} < \left(\frac{5}{3}\right)^x \leq \left(\frac{5}{3}\right)^0$

เนื่องจาก $f(x)=\left(\frac{5}{3}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ $-3 < x \leq 0$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-3,0]$

7. 1) จาก $x^2 2^x - 2^x = 0$

$2^x(x^2-1) = 0$

$2^x(x-1)(x+1) = 0$

เนื่องจาก ไม่มีจำนวนจริงที่ทำให้ $2^x=0$

จะได้ $x-1 = 0$ หรือ $x+1 = 0$

นั่นคือ $x = 1$ หรือ $x = -1$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-1, 1\}$

2) จาก

$$2^{2x+2} - 9\left(2^x\right) + 2 = 0$$

$$2^2 \cdot 2^{2x} - 9\left(2^x\right) + 2 = 0$$

$$4\left(2^x\right)^2 - 9\left(2^x\right) + 2 = 0$$

$$\left(4 \cdot 2^x - 1\right)\left(2^x - 2\right) = 0$$

จะได้ $4 \cdot 2^x - 1 = 0$ หรือ $2^x - 2 = 0$

$2^x = \frac{1}{4}$ หรือ $2^x = 2$

นั่นคือ $x = -2$ หรือ $x = 1$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-2, 1\}$

3) จาก

$$3^{2x+1} + 9 = 28\left(3^x\right)$$

$$3\left(3^x\right)^2 - 28\left(3^x\right) + 9 = 0$$

$$\left(3 \cdot 3^x - 1\right)\left(3^x - 9\right) = 0$$

จะได้ $3 \cdot 3^x - 1 = 0$ หรือ $3^x - 9 = 0$

$3^x = \frac{1}{3}$ หรือ $3^x = 9$

นั่นคือ $x = -1$ หรือ $x = 2$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-1, 2\}$

8. จากโจทย์ $q = 2(3^t)$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนของแบคทีเรีย (พันเซลล์) กับเวลา (ชั่วโมง)

เมื่อ $t = 0$ จะได้ $q = 2(3^0) = 2(1) = 2$

เมื่อ $t = \frac{1}{6}$ จะได้ $q = 2\left(3^{\frac{1}{6}}\right) \approx 2(1.20093) = 2.40186$

เมื่อ $t = \frac{1}{2}$ จะได้ $q = 2\left(3^{\frac{1}{2}}\right) \approx 2(1.73205) = 3.46410$

เมื่อ $t = 1$ จะได้ $q = 2(3^1) = 2(3) = 6$

ดังนั้น จำนวนเริ่มต้นของแบคทีเรีย เท่ากับ 2,000 เซลล์

จำนวนของแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที ประมาณ 2,401 เซลล์

จำนวนของแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป 30 นาที ประมาณ 3,464 เซลล์

จำนวนของแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง เท่ากับ 6,000 เซลล์

9. จากโจทย์ ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณธาตุเรเดียม–226 ที่มีอยู่เดิม (q_0) และปริมาณของธาตุเรเดียม–226 ที่เหลือ (q) เมื่อเวลาผ่านไป t ปี คือ $q = q_0 2^{kt}$

เนื่องจาก ธาตุเรเดียม–226 มีครึ่งชีวิต 1,600 ปี หมายความว่า เมื่อเวลาผ่านไป 1,600 ปี ธาตุเรเดียม–226 ซึ่งหนัก q_0 มิลลิกรัม จะมีน้ำหนักเหลือ $\frac{1}{2}q_0$ มิลลิกรัม

จะได้ $\frac{1}{2}q_0 = q_0 2^{k \cdot 1600}$

$\frac{1}{2} = 2^{1600k}$

$2^{-1} = 2^{1600k}$

นั่นคือ $1600k = -1$

ดังนั้น $k = -\frac{1}{1600}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. 1) $\log_4 16 = 2$ 2) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

   3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ 4) $\log_{10} 0.0001 = -4$

   5) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$ 6) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = -3$

   7) $\log_{\frac{1}{100}} 10000 = -2$ 8) $\log_4 0.125 = -\frac{3}{2}$

2. 1) $10^2 = 100$ 2) $2^5 = 32$

   3) $5^0 = 1$ 4) $4^{-3} = \frac{1}{64}$

   5) $10^{-3} = 0.001$ 6) $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$

3. 1)
$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt[3]{2} &= \log_2 2^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\log_2 2 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   2)
$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}} 9 &= \log_{3^{-1}} 3^2 \\ &= \frac{2}{-1}\log_3 3 \\ &= -2 \end{aligned}$$

   3)
$$\begin{aligned} \log_{10} 100 &= \log_{10} 10^2 \\ &= 2\log_{10} 10 \\ &= 2 \end{aligned}$$

   4)
$$\begin{aligned} \log_{10} 0.1 &= \log_{10} 10^{-1} \\ &= -1\log_{10} 10 \\ &= -1 \end{aligned}$$

5) $\log_{\sqrt{3}} 3^{12} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{12}$

$= \dfrac{12}{\frac{1}{2}} \log_3 3$

$= 24$

6) $\log_{\frac{1}{4}} 16 = \log_{4^{-1}} 4^2$

$= \dfrac{2}{-1} \log_4 4$

$= -2$

7) $\log_{12} 9 + \log_{12} 16 = \log_{12}(9 \times 16)$

$= \log_{12} 144$

$= \log_{12} 12^2$

$= 2\log_{12} 12$

$= 2$

8) $\log_2 112 - \log_2 7 = \log_2 \left(\dfrac{112}{7}\right)$

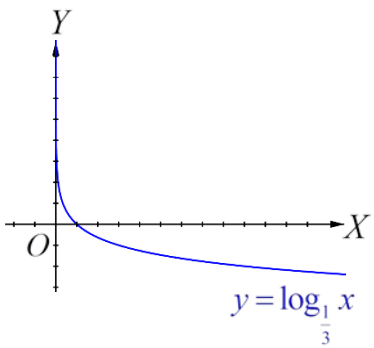
$= \log_2 16$

$= \log_2 2^4$

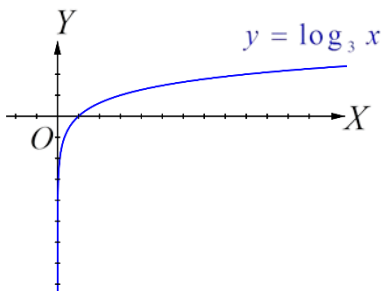
$= 4\log_2 2$

$= 4$

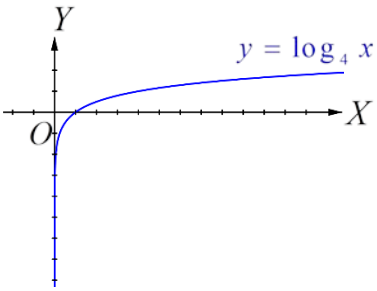
4. 1)



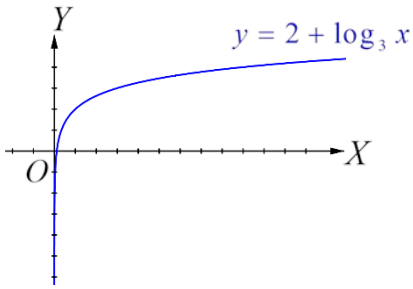
2)



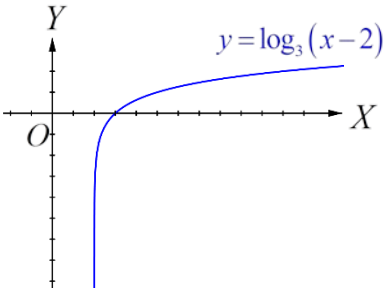
3)



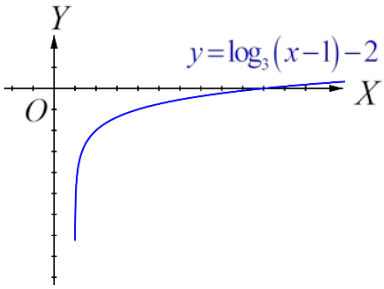
4)



5)



6)



5. 1) จาก $\log_2 x = 5$

จะได้ $x = 2^5$

ดังนั้น $x = 32$

2) จาก $\log_{10} x = 2$

จะได้ $x = 10^2$

ดังนั้น $x = 100$

3) จาก $\log_x 1000 = 3$

จะได้ $1000 = x^3$

$10^3 = x^3$

ดังนั้น $x = 10$

4) จาก $\log_x 16 = 4$

จะได้ $16 = x^4$

$2^4 = x^4$

ดังนั้น $x = 2$ (เนื่องจาก $x > 0$)

5) จาก $\log_x 6 = \frac{1}{2}$

จะได้ $6 = x^{\frac{1}{2}}$

$6^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2$

ดังนั้น $x = 36$

6.

$$\begin{aligned}
\log_5 45 &= \log_5(5\times 9)\\
&= \log_5 5 + \log_5 9\\
&= 1 + \log_5 3^2\\
&= 1 + 2\log_5 3\\
&\approx 1 + 2(0.6826)\\
&= 2.3652
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log_{25} 15 &= \log_{5^2}(5\times 3)\\
&= \frac{1}{2}(\log_5 5 + \log_5 3)\\
&\approx \frac{1}{2}(1 + 0.6826)\\
&= 0.8413
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\log_5 45 \approx 2.3652$ และ $\log_{25} 15 \approx 0.8413$

แบบฝึกหัด 2.4

1. 1)

$$\begin{aligned} \log 37100 &= \log\left(3.71\times10^{4}\right) \\ &= \log 3.71 + \log 10^{4} \\ &\approx 0.5694 + 4 \\ &= 4.5694 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\log 37100 \approx 4.5694$

2)

$$\begin{aligned} \log 0.00371 &= \log\left(3.71\times10^{-3}\right) \\ &= \log 3.71 + \log 10^{-3} \\ &\approx 0.5694 - 3 \\ &= -2.4306 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\log 0.00371 \approx -2.4306$

3)

$$\begin{aligned} \log 832 &= \log\left(8.32\times10^{2}\right) \\ &= \log 8.32 + \log 10^{2} \\ &\approx 0.9201 + 2 \\ &= 2.9201 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\log 832 \approx 2.9201$

4)

$$\begin{aligned} \log 0.0832 &= \log\left(8.32\times10^{-2}\right) \\ &= \log 8.32 + \log 10^{-2} \\ &\approx 0.9201 - 2 \\ &= -1.0799 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\log 0.0832 \approx -1.0799$

2. 1) จาก

$$\begin{aligned} \log N &= 0.4082 \\ &\approx \log 2.56 \end{aligned}$$

ดังนั้น $N \approx 2.56$

2) จาก

$$\begin{aligned}\log N &= 3.4082\\ &= 3+0.4082\\ &\approx 3\log 10+\log 2.56\\ &= \log(1000\times 2.56)\\ &= \log 2560\end{aligned}$$

ดังนั้น $N \approx 2560$

3) จาก

$$\begin{aligned}\log N &= -0.5918\\ &= 0.4082-1\\ &\approx \log 2.56-\log 10\\ &= \log\left(\frac{2.56}{10}\right)\\ &= \log 0.256\end{aligned}$$

ดังนั้น $N \approx 0.256$

แบบฝึกหัด 2.5

1.

$$\begin{aligned}\log_{36} 5 &= \log_{6^2} 5\\ &= \frac{1}{2}\log_6 5\\ &\approx \frac{1}{2}\times 0.8982\\ &= 0.4491\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\log_{64} 46 &= \log_{4^3} 46\\ &= \frac{1}{3}\log_4 46\\ &\approx \frac{1}{3}\times 2.7617\\ &= 0.9206\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\ln 423 &= \frac{\log 423}{\log e} \\
&= \frac{\log\left(4.23\times 10^{2}\right)}{\log e} \\
&= \frac{\log 4.23+\log 10^{2}}{\log e} \\
&\approx \frac{0.6263+2}{0.4343} \\
&= \frac{2.6263}{0.4343} \\
&\approx 6.0472
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln 0.163 &= \frac{\log 0.163}{\log e} \\
&= \frac{\log\left(1.63\times 10^{-1}\right)}{\log e} \\
&= \frac{\log 1.63+\log 10^{-1}}{\log e} \\
&\approx \frac{0.2122-1}{0.4343} \\
&= -\frac{0.7878}{0.4343} \\
&\approx -1.8140
\end{aligned}$$

4. 1) 2.5237 2) 3.4829

3) 0.4930 4) 6.5903

5) 4.7362 6) 4.5951

7) 4.6728 8) –4.3901

แบบฝึกหัด 2.6

1. 1) จาก $\ln x = 10$

จะได้ $x = e^{10}$

2) จาก $\log x = -2$

จะได้ $x = 10^{-2}$

ดังนั้น $x = 0.01$

3) จาก $\log 2x = 3$

จะได้ $2x = 10^{3}$

$x = \frac{1000}{2}$

ดังนั้น $x = 500$

4) จาก $\log(3x+5) = 2$

จะได้ $3x+5 = 10^{2}$

$x = \frac{100-5}{3}$

ดังนั้น $x = \frac{95}{3}$

5) จาก $\log 2x = \log 2 + 5$

จะได้ $\log 2x - \log 2 = 5$

$\log\left(\frac{2x}{2}\right) = 5$

$\log x = 5$

$x = 10^{5}$

ดังนั้น $x = 100{,}000$

2. 1) จาก

$$\begin{aligned}
\log(3x+5)+3 &= \log(2x+1) \\
\log(2x+1)-\log(3x+5) &= 3 \\
\log\left(\frac{2x+1}{3x+5}\right) &= 3 \\
\frac{2x+1}{3x+5} &= 10^3 \\
2x+1 &= 1000(3x+5) \\
2x+1 &= 3000x+5000 \\
2998x &= -4999
\end{aligned}$$

จะได้ $x = -\frac{4999}{2998}$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย $-\frac{4999}{2998}$ ใน $\log(3x+5)$

จะได้ $\log\left[3\left(-\frac{4999}{2998}\right)+5\right] = \log\left(-\frac{7}{2998}\right)$

แทน x ด้วย $-\frac{4999}{2998}$ ใน $\log(2x+1)$

จะได้ $\log\left[2\left(-\frac{4999}{2998}\right)+1\right] = \log\left(-\frac{7000}{2998}\right)$

เนื่องจากไม่นิยาม $y=\log_a x$ เมื่อ x ไม่เป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ว่า ไม่มี x ที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\varnothing$

2) จาก

$$\begin{aligned}
\log(x+2)-\log(x+1) &= 3 \\
\log\left(\frac{x+2}{x+1}\right) &= 3 \\
\frac{x+2}{x+1} &= 10^3 \\
x+2 &= 1000(x+1)
\end{aligned}$$

$$x+2 = 1000x+1000$$
$$999x = -998$$

จะได้ $$x = -\frac{998}{999}$$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย $-\frac{998}{999}$ ใน $\log(x+2)-\log(x+1) = 3$ จะได้

$$\log\left(-\frac{998}{999}+2\right)-\log\left(-\frac{998}{999}+1\right) = 3$$
$$\log\frac{1000}{999}-\log\frac{1}{999} = 3$$
$$\log\left(\frac{\frac{1000}{999}}{\frac{1}{999}}\right) = 3$$
$$\log 1000 = 3$$
$$3 = 3 \quad \text{เป็นจริง}$$

จะได้ว่า $x = -\frac{998}{999}$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\left\{-\frac{998}{999}\right\}$

3) จาก $$\log x = 1-\log(x-9)$$
$$\log x+\log(x-9) = 1$$
$$\log[x(x-9)] = 1$$
$$x(x-9) = 10$$
$$x^2-9x-10 = 0$$
$$(x+1)(x-10) = 0$$

จะได้ $x+1 = 0$ หรือ $x-10 = 0$

นั่นคือ $x=-1$ หรือ $x=10$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

กรณี $x=-1$ แทน x ด้วย -1 ใน $\log x$

จะได้ $\log(-1)$ ซึ่ง $-1 < 0$

แทน x ด้วย -1 ใน $\log(x-9)$

จะได้ $\log(-1-9) = \log(-10)$ ซึ่ง $-10 < 0$

เนื่องจากไม่นิยาม $y=\log_a x$ เมื่อ x ไม่เป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ว่า $x=-1$ ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

กรณี $x=10$ แทน x ด้วย 10 ใน $\log x = 1-\log(x-9)$ จะได้

$$\begin{aligned} \log 10 &= 1-\log(10-9) \\ \log 10 &= 1-\log 1 \\ 1 &= 1-0 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$ เป็นจริง

นั่นคือ $x=10$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{10\}$

4) จาก

$$\begin{aligned} \log_2 3+\log_2 x &= \log_2 5+\log_2(x-2) \\ \log_2 3x &= \log_2[5(x-2)] \\ 3x &= 5(x-2) \\ 3x &= 5x-10 \\ 2x &= 10 \end{aligned}$$

จะได้ $x = 5$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย 5 ใน $\log_2 3+\log_2 x = \log_2 5+\log_2(x-2)$ จะได้

$$\begin{aligned} \log_2 3+\log_2 5 &= \log_2 5+\log_2(5-2) \\ \log_2 3 &= \log_2 3 \end{aligned}$$ เป็นจริง

นั่นคือ $x=5$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{5\}$

5) จาก

$$\begin{aligned}
\log_5(x+1)-\log_5(x-1) &= 2 \\
\log_5\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= 2 \\
\frac{x+1}{x-1} &= 5^2 \\
x+1 &= 25(x-1) \\
x+1 &= 25x-25 \\
24x &= 26
\end{aligned}$$

จะได้

$$x = \frac{13}{12}$$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย $\frac{13}{12}$ ใน $\log_5(x+1)-\log_5(x-1) = 2$ จะได้

$$\begin{aligned}
\log_5\left(\frac{13}{12}+1\right)-\log_5\left(\frac{13}{12}-1\right) &= 2 \\
\log_5\frac{25}{12}-\log_5\frac{1}{12} &= 2 \\
\log_5\left(\frac{\frac{25}{12}}{\frac{1}{12}}\right) &= 2 \\
\log_5 25 &= 2 \\
2 &= 2 \qquad \text{เป็นจริง}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $x=\frac{13}{12}$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\left\{\frac{13}{12}\right\}$

6) จาก $\log_9(x-5)+\log_9(x+3) = 1$

$$\log_9\left[(x-5)(x+3)\right] = 1$$
$$(x-5)(x+3) = 9^1$$
$$x^2-2x-24 = 0$$
$$(x+4)(x-6) = 0$$

จะได้ $x+4 = 0$ หรือ $x-6 = 0$

นั่นคือ $x=-4$ หรือ $x=6$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

กรณี $x=-4$ แทน x ด้วย -4 ใน $\log_9(x-5)$

จะได้ $\log_9(-4-5) = \log_9(-9)$ ซึ่ง $-9 < 0$

แทน x ด้วย -4 ใน $\log_9(x+3)$

จะได้ $\log_9(-4+3) = \log_9(-1)$ ซึ่ง $-1 < 0$

เนื่องจากไม่นิยาม $y=\log_a x$ เมื่อ x ไม่เป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ว่า $x=-4$ ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

กรณี $x=6$ แทน x ด้วย 6 ใน $\log_9(x-5)+\log_9(x+3) = 1$ จะได้

$$\log_9(6-5)+\log_9(6+3) = 1$$
$$\log_9 1+\log_9 9 = 1$$
$$0+1 = 1$$
$$1 = 1 \quad \text{เป็นจริง}$$

นั่นคือ $x=6$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{6\}$

7) จาก

$$\log_2(\log_3 x) = 4$$
$$\log_3 x = 2^4$$
$$x = 3^{16}$$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย 3^{16} ใน $\log_2(\log_3 x) = 4$ จะได้

$$\log_2(\log_3 3^{16}) = 4$$
$$\log_2 16 = 4$$
$$4 = 4 \quad \text{เป็นจริง}$$

นั่นคือ $x = 3^{16}$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{3^{16}\}$

8) จาก

$$2^{\frac{2}{\log_5 x}} = \frac{1}{16}$$
$$\log_2 2^{\frac{2}{\log_5 x}} = \log_2 2^{-4}$$
$$\frac{2}{\log_5 x}\log_2 2 = -4\log_2 2$$
$$\frac{2}{\log_5 x} = -4$$
$$\log_5 x = -\frac{1}{2}$$
$$x = 5^{-\frac{1}{2}}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

จะได้

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ใน $2^{\frac{2}{\log_5 x}} = \frac{1}{16}$

เนื่องจาก $\log_5 x = \log_5 \frac{\sqrt{5}}{5}$

$= \log_5 \sqrt{5} - \log_5 5$

$= \frac{1}{2} - 1$

$= -\frac{1}{2}$

จะได้ว่า $2^{\frac{2}{\log_5 x}} = 2^{\frac{2}{-\frac{1}{2}}}$

$= 2^{-4}$

$= \frac{1}{16}$

นั่นคือ $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$

3. 1) จาก $3^x = 36$

$\log_3 3^x = \log_3 36$

$x \log_3 3 = \log_3 (3 \times 3 \times 4)$

$x = \log_3 3 + \log_3 3 + \log_3 4$

จะได้ $x = 2 + \log_3 4$

2) จาก $9^x = 3^{2x}$

$(3^2)^x = 3^{2x}$

$3^{2x} = 3^{2x}$

นั่นคือ $2x = 2x$

ดังนั้น จำนวนจริงทุกจำนวนสอดคล้องกับสมการที่กำหนด

3) จาก

$$5^x = 4^{x+1}$$
$$\log_4 5^x = \log_4 4^{x+1}$$
$$x\log_4 5 = (x+1)\log_4 4$$
$$\frac{x+1}{x} = \log_4 5$$
$$1+\frac{1}{x} = \log_4 5$$
$$\frac{1}{x} = \log_4 5-1$$

จะได้ $x = \dfrac{1}{\log_4 5-1}$

4) จาก

$$2^{3x+1} = 3^{x-2}$$
$$\log 2^{3x+1} = \log 3^{x-2}$$
$$(3x+1)\log 2 = (x-2)\log 3$$
$$3x\log 2+\log 2 = x\log 3-2\log 3$$
$$x\log 3-3x\log 2 = \log 2+2\log 3$$
$$x(\log 3-3\log 2) = \log 2+2\log 3$$

จะได้ $x = \dfrac{\log 2+2\log 3}{\log 3-3\log 2}$

4. 1) จาก

$$4x^3e^{-3x}-3x^4e^{-3x} = 0$$
$$x^3e^{-3x}(4-3x) = 0$$

จะได้ $x^3e^{-3x} = 0$ หรือ $4-3x = 0$

กรณี $x^3e^{-3x} = 0$

เนื่องจาก $e^{-3x} \neq 0$

จะได้ $x^3 = 0$

นั่นคือ $x = 0$

กรณี $4-3x=0$

จะได้ $x = \frac{4}{3}$

ดังนั้น $x=0$ หรือ $x=\frac{4}{3}$

2) จาก $e^{2x}-3e^{x}+2 = 0$

$(e^{x}-1)(e^{x}-2) = 0$

จะได้ $e^{x}-1 = 0$ หรือ $e^{x}-2 = 0$

กรณี $e^{x}-1=0$

จะได้ $e^{x} = 1$

$x = 0$

กรณี $e^{x}-2=0$

จะได้ $e^{x} = 2$

$x = \ln 2$

ดังนั้น $x=0$ หรือ $x=\ln 2$

3) จาก $e^{4x}+4e^{2x}-21 = 0$

$(e^{2x}-3)(e^{2x}+7) = 0$

จะได้ $e^{2x}-3 = 0$ หรือ $e^{2x}+7 = 0$

กรณี $e^{2x}-3=0$

จะได้ $e^{2x} = 3$

$2x = \ln 3$

$x = \frac{\ln 3}{2}$

กรณี $e^{2x}+7=0$

จะได้ $e^{2x} = -7$ ไม่มีคำตอบ

เพราะว่า $e^{2x}>0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ดังนั้น $x=\dfrac{\ln 3}{2}$

5. 1) จาก

$$
\begin{aligned}
12^{2-5x}\,8^{x+3} &= 16\\
\left(2^2\times 3\right)^{2-5x}\left(2^3\right)^{x+3} &= 2^4\\
\frac{2^{2(2-5x)}\,3^{2-5x}\,2^{3(x+3)}}{2^4} &= 1\\
2^{2(2-5x)+3(x+3)-4}\,3^{2-5x} &= 1\\
2^{9-7x}\,3^{2-5x} &= 1\\
\log\left(2^{9-7x}\,3^{2-5x}\right) &= \log 1\\
\log 2^{9-7x}+\log 3^{2-5x} &= 0\\
(9-7x)\log 2+(2-5x)\log 3 &= 0\\
(9\log 2-7x\log 2)+(2\log 3-5x\log 3) &= 0\\
7x\log 2+5x\log 3 &= 9\log 2+2\log 3\\
x(7\log 2+5\log 3) &= 9\log 2+2\log 3\\
x &= \frac{9\log 2+2\log 3}{7\log 2+5\log 3}\\
x &\approx \frac{9(0.3010)+2(0.4771)}{7(0.3010)+5(0.4771)}\\
x &\approx \frac{3.6632}{4.4925}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x \approx 0.8154$

2) จาก

$$
\begin{aligned}
2^{2x+1}\,3^{2x+2} &= 5^{4x}\\
\log\left(2^{2x+1}\,3^{2x+2}\right) &= \log 5^{4x}\\
\log 2^{2x+1}+\log 3^{2x+2} &= \log 5^{4x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2x+1)\log 2+(2x+2)\log 3 &= 4x\log 5\\
2x\log 2+\log 2+2x\log 3+2\log 3 &= 4x\log\frac{10}{2}\\
2x\log 2+\log 2+2x\log 3+2\log 3 &= 4x(\log 10-\log 2)\\
2x\log 2+\log 2+2x\log 3+2\log 3 &= 4x(1-\log 2)\\
2x\log 2+\log 2+2x\log 3+2\log 3 &= 4x-4x\log 2\\
4x-4x\log 2-2x\log 2-2x\log 3 &= \log 2+2\log 3\\
x(4-6\log 2-2\log 3) &= \log 2+2\log 3\\
x &= \frac{\log 2+2\log 3}{4-6\log 2-2\log 3}\\
x &\approx \frac{0.3010+2(0.4771)}{4-6(0.3010)-2(0.4771)}\\
x &\approx \frac{1.2552}{1.2398}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x \approx 1.0124$

3) จาก

$$
\begin{aligned}
\frac{5^{2x}}{2^{x-4}} &= 3^{3x-7}\\
\log\left(\frac{5^{2x}}{2^{x-4}}\right) &= \log 3^{3x-7}\\
\log 5^{2x}-\log 2^{x-4} &= \log 3^{3x-7}\\
2x\log 5-(x-4)\log 2 &= (3x-7)\log 3\\
2x\log\frac{10}{2}-x\log 2+4\log 2 &= 3x\log 3-7\log 3\\
2x(\log 10-\log 2)-x\log 2+4\log 2 &= 3x\log 3-7\log 3\\
2x(1-\log 2)-x\log 2+4\log 2 &= 3x\log 3-7\log 3\\
2x-2x\log 2-x\log 2+4\log 2 &= 3x\log 3-7\log 3\\
2x-3x\log 2+4\log 2 &= 3x\log 3-7\log 3\\
3x\log 3+3x\log 2-2x &= 4\log 2+7\log 3\\
x(3\log 3+3\log 2-2) &= 4\log 2+7\log 3
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{4\log 2 + 7\log 3}{3\log 3 + 3\log 2 - 2}$$

$$x \approx \frac{4(0.3010) + 7(0.4771)}{3(0.4771) + 3(0.3010) - 2}$$

$$x \approx \frac{4.5437}{0.3343}$$

ดังนั้น $x \approx 13.5917$

6. 1) จาก $5^x \geq 27$

เนื่องจาก $f(x) = \log_5 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ $\log_5 5^x \geq \log_5 3^3$

$x\log_5 5 \geq 3\log_5 3$

นั่นคือ $x \geq 3\log_5 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $[3\log_5 3, \infty)$

2) จาก $e^{4x} - e^{2x} > 110$

$e^{4x} - e^{2x} - 110 > 0$

$(e^{2x} + 10)(e^{2x} - 11) > 0$

จะได้ $e^{2x} + 10 < 0$ และ $e^{2x} - 11 < 0$

หรือ $e^{2x} + 10 > 0$ และ $e^{2x} - 11 > 0$

กรณีที่ 1 $e^{2x} + 10 < 0$ และ $e^{2x} - 11 < 0$

เนื่องจาก $e^{2x} + 10 > 0$ เสมอ

ดังนั้น กรณีนี้จึงเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2 $e^{2x} + 10 > 0$ และ $e^{2x} - 11 > 0$

เนื่องจาก $e^{2x} + 10 > 0$ เสมอ

ดังนั้น จึงพิจารณาเพียง $e^{2x} - 11 > 0$ ซึ่งจะได้ $e^{2x} > 11$

เนื่องจาก $f(x) = \ln x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้

$$\ln e^{2x} > \ln 11$$
$$2x \ln e > \ln 11$$
$$x > \frac{\ln 11}{2}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\left(\frac{\ln 11}{2}, \infty\right)$

3) จาก

$$\log x > -3.5$$
$$\log x > -3.5 \log 10$$
$$\log x > \log 10^{-3.5}$$

เนื่องจาก $f(x) = \log x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้

$$x > 10^{-3.5}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\left(10^{-3.5}, \infty\right)$

4) จาก

$$\log(7x+1) \leq 4.5$$
$$\log(7x+1) \leq 4.5 \log 10$$
$$\log(7x+1) \leq \log 10^{4.5}$$

เนื่องจาก $f(x) = \log x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้

$$0 < 7x+1 \leq 10^{4.5}$$

นั่นคือ

$$-\frac{1}{7} < x \leq \frac{10^{4.5}-1}{7}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\left(-\frac{1}{7}, \frac{10^{4.5}-1}{7}\right]$

5) จาก

$$\log_{0.5}(x+2) - \log_{0.5}(x+1) < 2$$
$$\log_{0.5}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < 2$$
$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < 2$$

$$\log_{2^{-1}}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < 2$$

$$-\log_2\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < 2\log_2 2$$

$$\log_2\left(\frac{x+1}{x+2}\right) < \log_2 2^2$$

เนื่องจาก $f(x)=\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

$$\frac{x+1}{x+2} < 4$$

$$\frac{x+1}{x+2}-4 < 0$$

$$\frac{(x+1)-4(x+2)}{x+2} < 0$$

$$\frac{-3x-7}{x+2} < 0$$

$$\frac{3x+7}{x+2} > 0$$

จะได้ $x<-\frac{7}{3}$ หรือ $x>-2$

เนื่องจาก อสมการที่กำหนดให้มีพจน์ $\log_{0.5}(x+2)$ และ $\log_{0.5}(x+1)$

จะได้ว่า $x>-1$ และ $x>-2$ นั่นคือ $x>-1$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-1,\infty)$

แบบฝึกหัด 2.7

1. 1) จาก $n(t) = n_0(1+r)^t$

ในที่นี้ $n_0 = 112,000$, $r = \frac{4}{100} = 0.04$ และ $t = 10$

จะได้ $n(10) = 112000(1+0.04)^{10}$

≈ 165787.3499

ดังนั้น ใน พ.ศ. 2569 จะมีจำนวนประชากรประมาณ 165,787 คน

2) จาก $n(t) = n_0(1+r)^t$

ในที่นี้ $n_0 = 112,000$, $r = \frac{4}{100} = 0.04$ และ $n(t) = 200,000$

จะได้ $200000 = 112000(1+0.04)^t$

$$(1.04)^t = \frac{25}{14}$$

$$\ln(1.04)^t = \ln\left(\frac{25}{14}\right)$$

$$t\ln 1.04 = \ln\left(\frac{25}{14}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{25}{14}\right)}{\ln 1.04}$$

$$t \approx 14.7835$$

นั่นคือ จังหวัดนี้จะมีจำนวนประชากร 200,000 คน ในอีกประมาณ 15 ปีข้างหน้า

ดังนั้น จังหวัดนี้จะมีจำนวนประชากร 200,000 คน ใน พ.ศ. 2574

2. 1) จาก $B(n) = B_0(1+r)^n$

ในที่นี้ $B_0 = 50,000$, $r = \frac{0.75}{100} = 0.0075$ และ $n = 10$

จะได้ $B(10) = 50000(1+0.0075)^{10}$

≈ 53879.1273

ดังนั้น จำนวนเงินฝากในบัญชีเมื่อสิ้นปีที่ 10 ประมาณ 53,879 บาท

2) จาก $B(n) = B_0(1+r)^n$

ในที่นี้ $n = 15$, $B(15) = 150,000$ และ $r = \frac{0.75}{100} = 0.0075$

จะได้ $150000 = B_0(1+0.0075)^{10}$

$B_0 = \frac{150000}{(1+0.0075)^{10}}$

นั่นคือ $B_0 \approx 139200.473$

ดังนั้น จะต้องฝากเงินต้นไว้ประมาณ 139,201 บาท

3) จาก $B(n) = B_0(1+r)^n$

ในที่นี้ $B_0 = 100,000$, $r = \frac{0.75}{100} = 0.0075$ และ $B_n = 200,000$

จะได้ $200000 = 100000(1+0.0075)^n$

$(1.0075)^n = 2$

$\ln(1.0075)^n = \ln 2$

$n\ln(1.0075) = \ln 2$

$n = \frac{\ln 2}{\ln(1.0075)}$

นั่นคือ $n \approx 92.7658$

ดังนั้น ต้องใช้เวลาอย่างน้อย 93 ปี จึงจะมีเงินในบัญชี 200,000 บาท

3. จาก $V(t) = V_0 e^{-rt}$

ในที่นี้ $V_0 = 20,000$, $r = \frac{4}{100} = 0.04$ และ $t = 5$

จะได้ $V(5) = 20000e^{-(0.04\times 5)}$

≈ 16374.6151

ดังนั้น เงิน 20,000 บาท ที่มีในปัจจุบัน จะมีมูลค่าประมาณ 16,375 บาท ในอีก 5 ปีข้างหน้า

4. 1) จาก $n(t) = n_0 e^{rt}$

ในที่นี้ $n_0 = 500$, $r = \frac{45}{100} = 0.45$ และ $t = 3$

จะได้ $n(3) = 500e^{(0.45\times 3)}$

≈ 1928.7128

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง จะมีจำนวนแบคทีเรียประมาณ 1,928 เซลล์

2) จาก $n(t) = n_0 e^{rt}$

ในที่นี้ $n_0 = 500$, $r = \frac{45}{100} = 0.45$ และ $n(t) = 10,000$

จะได้

$$\begin{aligned} 10000 &= 500e^{0.45t} \\ e^{0.45t} &= 20 \\ \ln e^{0.45t} &= \ln 20 \\ (0.45t)\ln e &= \ln 20 \\ 0.45t &= \ln 20 \\ t &= \frac{\ln 20}{0.45} \end{aligned}$$

นั่นคือ $t \approx 6.6572$

ดังนั้น จะใช้เวลานานประมาณ 7 ชั่วโมง จึงจะมีจำนวนแบคทีเรีย 10,000 เซลล์

5. 1) จาก $m(t) = m_0 e^{-rt}$ เมื่อ $r = \dfrac{\ln 2}{h}$

ในที่นี้ $t = 80 \times 365$, $m_0 = 10$ และ $h = 30 \times 365$

จะได้
$$\begin{aligned} m(80 \times 365) &= 10e^{-\left(\frac{\ln 2}{30 \times 365}\right)(80 \times 365)} \\ &\approx 10e^{-1.8484} \\ &\approx 1.5749 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 80 ปี จะมีปริมาณของธาตุ–137 เหลืออยู่ประมาณ 1.5749 กรัม

2) จาก $m(t) = m_0 e^{-rt}$ เมื่อ $r = \dfrac{\ln 2}{h}$

ในที่นี้ $m_0 = 10$, $h = 30 \times 365$ และ $m(t) = 2$

จะได้
$$\begin{aligned} 2 &= 10e^{-\left(\frac{\ln 2}{30 \times 365}\right)t} \\ e^{-\left(\frac{\ln 2}{30 \times 365}\right)t} &= 0.2 \\ \ln e^{-\left(\frac{\ln 2}{30 \times 365}\right)t} &= \ln 0.2 \\ -\left(\frac{\ln 2}{30 \times 365}\right)t \ln e &= \ln 0.2 \\ -\left(\frac{\ln 2}{30 \times 365}\right)t &= \ln 0.2 \\ t &= \frac{\ln 0.2}{-\frac{\ln 2}{30 \times 365}} \\ t &\approx \frac{-1.6094}{-\frac{0.6931}{30 \times 365}} \end{aligned}$$

นั่นคือ $t \approx 25426.2441$

ดังนั้น จะใช้เวลาอย่างน้อย $\dfrac{25426.2441}{365} \approx 69.6610$ หรือ 70 ปี จึงจะมีธาตุซีเซียม–137 เหลืออยู่ 2 กรัม

6. จาก $m(t) = m_0 e^{-rt}$ เมื่อ $r = \frac{\ln 2}{h}$

ในที่นี้ $m_0 = 250$, $t = \frac{48}{24} = 2$ และ $m(2) = 200$

จะได้

$$200 = 250e^{-\left(\frac{\ln 2}{h}\right)(2)}$$

$$e^{-\left(\frac{\ln 2}{h}\right)(2)} = 0.8$$

$$\ln e^{-\left(\frac{\ln 2}{h}\right)(2)} = \ln 0.8$$

$$-\left(\frac{2\ln 2}{h}\right)\ln e = \ln 0.8$$

$$-\frac{2\ln 2}{h} = \ln 0.8$$

$$h = -\frac{2\ln 2}{\ln 0.8}$$

$$h \approx -\frac{2\times 0.6931}{(-0.2231)}$$

นั่นคือ $h \approx 6.2134$

ดังนั้น ครึ่งชีวิตของสารนี้ประมาณ 6.2134 วัน

7. จาก $\beta = 10\log\frac{I}{I_0}$

ในที่นี้ $\beta = 98$ และ $I_0 = 10^{-12}$

จะได้

$$98 = 10\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$98 = 10\left(\log I - \log 10^{-12}\right)$$

$$\log I - (-12)\log 10 = \frac{98}{10}$$

$$\log I + 12 = \frac{98}{10}$$

$$\log I = \frac{98}{10} - 12$$

$$\log I = -\frac{11}{5}$$
$$I = 10^{-2.2}$$

ดังนั้น ความเข้มเสียงของรถไฟฟ้าขบวนนี้เท่ากับ $10^{-2.2}$ วัตต์ต่อตารางเมตร

8. จาก $pH = -\log\left[H_3O^+\right]$

ในที่นี้ $pH = 6.5$

จะได้
$$6.5 = -\log\left[H_3O^+\right]$$
$$\log\left[H_3O^+\right] = -6.5$$
$$\left[H_3O^+\right] = 10^{-6.5}$$

ดังนั้น นมชนิดนี้มีความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออนอยู่ $10^{-6.5}$ โมลต่อลิตร

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. 1)
$$\left(12x^2y^4\right)\left(\frac{1}{2}x^5y\right) = \frac{12}{2}x^{2+5}y^{4+1}$$
$$= 6x^7y^5$$

2)
$$\left(\frac{x^{-1}yz^{-2}}{y^{-5}zx^{-8}}\right)^{-1} = \left(x^{-1-(-8)}y^{1-(-5)}z^{-2-1}\right)^{-1}$$
$$= \left(x^7y^6z^{-3}\right)^{-1}$$
$$= \left(\frac{x^7y^6}{z^3}\right)^{-1}$$
$$= \frac{z^3}{x^7y^6}$$

3)
$$\left(\frac{xy^{-\frac{1}{2}}}{9x^{\frac{3}{2}}}\right)^2 = \left(\frac{x^{1-\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}}{9}\right)^2$$
$$= \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}}{9}\right)^2$$
$$= \frac{x^{-1}y^{-1}}{3^4}$$
$$= \frac{1}{3^4xy}$$

4)
$$\left(\frac{-8y^{-2}}{x^6y}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{(-2)^3y^{-2-1}}{x^6}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(\frac{(-2)^3y^{-3}}{x^6}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{-2y^{-1}}{x^2}$$
$$= -\frac{2}{x^2y}$$

5)
$$\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}} = \sqrt[5]{\left(-\frac{1}{4}\right)^5}$$
$$= -\frac{1}{4}$$

6)
$$\frac{2}{\sqrt[3]{-8x^6}} = \frac{2}{\sqrt[3]{(-2x^2)^3}}$$
$$= -\frac{2}{2x^2}$$
$$= -\frac{1}{x^2}$$

7) $$\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2 = 2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+5$$
$$= 7+2\sqrt{10}$$
$$= 7+2\cdot 10^{\frac{1}{2}}$$

8) $$\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1\right) = \left(2^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1\right)$$
$$= \left(2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)+\left(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1\right)$$
$$= \left(2-2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)+\left(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1\right)$$
$$= 3$$

9) $$\left(\sqrt[4]{64}+\sqrt{32}\right)\left(\sqrt[5]{\frac{243}{32}}-\sqrt[3]{-64}\right) = \left(\sqrt[4]{2^6}+\sqrt{2^5}\right)\left(\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^5}-\sqrt[3]{(-4)^3}\right)$$
$$= \left(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)\left(\frac{3}{2}+4\right)$$
$$= 6\sqrt{2}\times\frac{11}{2}$$
$$= 33\sqrt{2}$$
$$= 33\cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

10) $$2\sqrt{27}-\sqrt[4]{144}+3\sqrt[6]{27} = 6\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}$$
$$= 7\sqrt{3}$$
$$= 7\cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

11) $$(0.027)^{\frac{2}{3}} = \left[(0.3)^3\right]^{\frac{2}{3}}$$
$$= (0.3)^{3\cdot\frac{2}{3}}$$
$$= (0.3)^2$$
$$= 0.09$$

12)
$$\left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = (-8)^{\frac{2}{3}}$$
$$= \left[(-8)^{\frac{1}{3}}\right]^2$$
$$= (-2)^2$$
$$= 4$$

13)
$$\left(\frac{125x^3y^4}{27x^{-6}y}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{5^3x^{3-(-6)}y^{4-1}}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(\frac{5^3x^9y^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{5}{3}x^3y$$

14)
$$\frac{\sqrt[3]{x^2}+2+x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{x^{-2}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}+2+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}$$
$$= \frac{x^{\frac{2}{3}}+2+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$
$$= \frac{x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}+1}{x^{\frac{4}{3}}-1}$$
$$= \frac{\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)^2}{\left(x^{\frac{2}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)}$$
$$= \frac{x^{\frac{2}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}-1}$$

2. 1)
$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt[4]{9}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$
$$= 5$$

2)
$$\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{10}\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}$$
$$= \frac{10\sqrt{2}+6\sqrt{5}}{20-18}$$
$$= 5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$$

3)
$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \left(\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}\right)$$
$$= \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)+2\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{5-7}$$
$$= -\frac{5\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}$$

4)
$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3-2}+\frac{2\left(1+2\sqrt{3}+3\right)}{3-1}$$
$$= 3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+4$$

3. กำหนดให้ $x = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ และ $y = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

จะได้
$$x^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}\right)^2$$

$$= 3+2\sqrt{6}+2$$

$$= 5+2\sqrt{6}$$

$$6xy = 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{6}{3-2}$$

$$= 6$$

$$y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}\right)^2$$

$$= 3-2\sqrt{6}+2$$

$$= 5-2\sqrt{6}$$

ดังนั้น $\sqrt{x^2+6xy+y^2} = \sqrt{\left(5+2\sqrt{6}\right)+6+\left(5-2\sqrt{6}\right)}$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4$$

4. 1) $a = -1$

2) จาก $f(x) = 5^x - 1$ และ $f(b) = 24$

จะได้ $5^b - 1 = 24$

$5^b = 25$

ดังนั้น $b = 2$

3) จากกราฟ จะได้ว่า $D_{f^{-1}} = R_f = (-1, \infty)$

5. 1) โดเมนของ f คือ $(-\infty, 2]$

2) จากกราฟ จะได้ว่า $D_{f^{-1}} = R_f = [0, 4)$

3) เนื่องจาก $f^{-1}(b) = -2$

ดังนั้น $f(-2) = b$

จาก $f(x) = 4 - 2^x$ เมื่อ $x \le 2$

จะได้ $f(-2) = 4 - 2^{-2}$

$= 4 - \frac{1}{4}$

$= \frac{15}{4}$

ดังนั้น $b = \frac{15}{4}$

6. (ก) q (ข) p

(ค) h (ง) f

(จ) r (ฉ) s

7. 1) จาก $f(x) = 2 \cdot 3^x + 1$ ให้ $y = f(x)$

จะได้ $y = 2 \cdot 3^x + 1$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้
$$3^x = \frac{y-1}{2}$$
$$\log_3 3^x = \log_3\left(\frac{y-1}{2}\right)$$
$$x\log_3 3 = \log_3\left(\frac{y-1}{2}\right)$$
$$x = \log_3\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = \log_3\left(\frac{x-1}{2}\right)$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{x-1}{2}\right)$

2) จาก $f(x) = 2^{1-x}$ ให้ $y = f(x)$

จะได้
$$y = 2^{1-x}$$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้
$$\log_2 y = \log_2 2^{1-x}$$
$$(1-x)\log_2 2 = \log_2 y$$
$$1-x = \log_2 y$$
$$x = 1-\log_2 y$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y = 1-\log_2 x$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = 1-\log_2 x$

3) จาก $f(x) = \log_5(2x+1)$ ให้ $y = f(x)$

จะได้
$$y = \log_5(2x+1)$$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้
$$5^y = 2x+1$$
$$x = \frac{5^y-1}{2}$$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\frac{5^x-1}{2}$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=\frac{5^x-1}{2}$

4) จาก $f(x)=\ln(3x)-5$ ให้ $y=f(x)$

จะได้ $y = \ln(3x)-5$

หา x ในพจน์ของ y

จะได้ $\ln(3x) = y+5$

$3x = e^{y+5}$

$x = \frac{1}{3}e^{y+5}$

เปลี่ยน y เป็น x และเปลี่ยน x เป็น y จะได้ $y=\frac{1}{3}e^{x+5}$

ดังนั้น $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}e^{x+5}$

8. 1) จาก $3^{2x+1} = 1-2\cdot 3^x$

$3\cdot 3^{2x}+2\cdot 3^x-1 = 0$

$(3\cdot 3^x-1)(3^x+1) = 0$

จะได้ $3\cdot 3^x-1 = 0$ หรือ $3^x+1 = 0$

ถ้า $3\cdot 3^x-1=0$

จะได้ $3^x = \frac{1}{3}$

$x = -1$

ถ้า $3^x+1=0$

จะได้ $3^x = -1$ ไม่มีคำตอบ

เพราะว่า $3^x>0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-1\}$

2) จาก

$$11^{2-x} = 2^{x-1}$$

$$\frac{11^2}{11^x} = \frac{2^x}{2}$$

$$2^x \cdot 11^x = 242$$

$$22^x = 242$$

$$x = \log_{22} 242$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{\log_{22} 242\}$

3) จาก

$$\log_{16}(x-1) = 0.25$$

$$\log_{16}(x-1) = \frac{1}{4}$$

$$x-1 = 16^{\frac{1}{4}}$$

$$x-1 = 2$$

จะได้ $x = 3$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย 3 ใน $\log_{16}(x-1)$

จะได้ $\log_{16}(3-1) = \log_{16} 2 = \frac{1}{4} = 0.25$

จะได้ว่า $x = 3$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{3\}$

4) จาก

$$\log_5(x-1)+2 = 0$$

$$\log_5(x-1) = -2$$

$$x-1 = 5^{-2}$$

$$x = \frac{1}{25}+1$$

จะได้ $x = \frac{26}{25}$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย $\frac{26}{25}$ ใน $\log_5(x-1)+2$

จะได้ $\log_5\left(\frac{26}{25}-1\right)+2 = \log_5\frac{1}{25}+2 = -2+2 = 0$

จะได้ว่า $x=\frac{26}{25}$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\left\{\frac{26}{25}\right\}$

5) จาก

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}(x+1) &= 3\\
\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) &= 3\\
\frac{x+2}{x+1} &= \left(\frac{1}{3}\right)^3\\
\frac{x+2}{x+1} &= \frac{1}{27}\\
27(x+2) &= x+1\\
27x+54 &= x+1
\end{aligned}$$

จะได้ $x = -\frac{53}{26}$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย $-\frac{53}{26}$ ใน $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

จะได้ $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{53}{26}+2\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{26}\right)$ ซึ่ง $-\frac{1}{26}<0$

แทน x ด้วย $-\frac{53}{26}$ ใน $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

จะได้ $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{53}{26}+1\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{27}{26}\right)$ ซึ่ง $-\frac{27}{26}<0$

จะได้ว่า $x=-\frac{53}{26}$ ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\varnothing$

6) จาก

$$\begin{aligned}
\log_2 x + \log_x 2 &= 2 \\
\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} - 2 &= 0 \\
(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 1 &= 0 \\
(\log_2 x - 1)^2 &= 0 \\
\log_2 x &= 1
\end{aligned}$$

จะได้ $x = 2$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ด้วย 2 ใน $\log_2 x + \log_x 2$

จะได้ $\log_2 2 + \log_2 2 = 1 + 1 = 2$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{2\}$

7) จาก

$$\begin{aligned}
\frac{9}{25} \le \left(\frac{3}{5}\right)^x &< \frac{125}{27} \\
\left(\frac{3}{5}\right)^2 \le \left(\frac{3}{5}\right)^x &< \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\left(\frac{3}{5}\right)^x \ge \left(\frac{3}{5}\right)^2$ และ $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$

เนื่องจาก $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลด

จะได้ $x \le 2$ และ $x > -3$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-3, 2]$

8) จาก

$$\begin{aligned}
2^{2x+1} - 12 \cdot 2^x + 16 &< 0 \\
2 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 16 &< 0 \\
(2 \cdot 2^x - 4)(2^x - 4) &< 0
\end{aligned}$$

$$2\left(2^x-2\right)\left(2^x-4\right) < 0$$

$$\left(2^x-2\right)\left(2^x-4\right) < 0$$

จะได้ $$2 < 2^x < 4$$

$$2^1 < 2^x < 2^2$$

เนื่องจาก $f(x)=2^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ $$1 < x < 2$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(1, 2)$

9) จาก $$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) < 4$$

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) < 4\log_2 2$$

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right) < \log_2 2^4$$

เนื่องจาก $f(x)=\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ $$\log_{\frac{1}{3}} x < 16$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x < 16\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{16}$$

เนื่องจาก $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$ เป็นฟังก์ชันลด

จะได้ $$x > \left(\frac{1}{3}\right)^{16}$$

นั่นคือ $$x > \frac{1}{3^{16}}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\left(\frac{1}{3^{16}}, \infty\right)$

10) จาก $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(2x^2-2x-4\right)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(-3x-3)}$

เนื่องจาก $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลด

จะได้ $\log_2\left(2x^2-2x-4\right) \geq \log_2(-3x-3)$

เนื่องจาก $f(x)=\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้

$$\begin{aligned} 2x^2-2x-4 &\geq -3x-3 \\ 2(x+1)(x-2) &\geq -3(x+1) \\ 2(x+1)(x-2)+3(x+1) &\geq 0 \\ (x+1)\left[2(x-2)+3\right] &\geq 0 \\ (x+1)(2x-1) &\geq 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $x \leq -1$ หรือ $x \geq \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $2x^2-2x-4>0$ และ $-3x-3>0$

จะได้ว่า $x<-1$ เสมอ

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty,-1)$

9. จาก

$$\begin{aligned} \log_2\left(2^{3-2x}\right) &= 6+\log_2\left(8\cdot 2^x\right) \\ \log_2\left(2^{3-2x}\right) &= 6+\log_2\left(2^{x+3}\right) \\ (3-2x)\log_2 2 &= 6+(x+3)\log_2 2 \\ 3-2x &= 6+x+3 \end{aligned}$$

จะได้ $x = -2$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้ว่าสอดคล้องกับสมการที่กำหนดหรือไม่

แทน x ใน $\log_2\left(2^{3-2x}\right) = 6+\log_2\left(8\cdot 2^x\right)$ ด้วย -2

จะได้

$$\begin{aligned} \log_2\left[2^{3-2(-2)}\right] &= 6+\log_2\left[8\cdot(2)^{-2}\right] \\ \log_2 2^{3+4} &= 6+\log_2\left(2^3\cdot 2^{-2}\right) \end{aligned}$$

$$\log_2 2^7 = 6+\log_2 2^{3-2}$$
$$7\log_2 2 = 6+\log_2 2$$
$$7 = 6+1$$
$$7 = 7 \quad \text{เป็นจริง}$$

จะได้ว่า $x=-2$ สอดคล้องกับสมการที่กำหนด

ดังนั้น $2^{\log_2(5+x)} = 2^{\log_2(5+(-2))} = 2^{\log_2 3} = 3$

10. ในเมืองแห่งหนึ่งมีประชากรอยู่ 10,000 คน

จำนวนประชากรใน x ปีข้างหน้า หาได้จาก

$$f(x) = 10000(1.3)^{\frac{x}{10}}$$

ในที่นี้ $x=10$

จะได้
$$f(10) = 10000(1.3)^{\frac{10}{10}}$$
$$= 10000(1.3)$$
$$= 13,000$$

ดังนั้น ในอีก 10 ปีข้างหน้า จะมีจำนวนประชากรในเมืองนี้ประมาณ 13,000 คน

11. การฝากเงินที่มีการคิดอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อปี หาได้จาก

$$B(n) = B_0(1+r)^n$$

ในที่นี้ $r=\frac{3}{100}=0.03$ และ $B(n)=3B_0$

จะได้
$$3B_0 = B_0(1+0.03)^n$$
$$(1+0.03)^n = 3$$
$$\log_{1.03}(1.03)^n = \log_{1.03}3$$
$$n\log_{1.03}1.03 = \log_{1.03}3$$
$$n \approx 37.1670$$

ดังนั้น จะใช้เวลาฝากเงินอย่างน้อย 38 ปี

12. 1) จำนวนแบคทีเรียชนิด A ในจานเพาะเชื้อ เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$n_A(t) = 500e^{0.45t}$$

จำนวนแบคทีเรียชนิด B ในจานเพาะเชื้อ เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$n_B(t) = 400e^{0.5t}$$

ในที่นี้ $t = 0$

จะได้ $n_A(0) = 500e^{0.45(0)}$

$= 500$

และ $n_B(0) = 400e^{0.5(0)}$

$= 400$

ดังนั้น เมื่อเวลาเริ่มต้น มีแบคทีเรียชนิด A จำนวน 500 เซลล์ และมีแบคทีเรีย B จำนวน 400 เซลล์

2) สมมติให้ $n_B(t) > n_A(t)$

จะได้ $400e^{0.5t} > 500e^{0.45t}$

$$\frac{e^{0.5t}}{e^{0.45t}} > \frac{5}{4}$$

$$e^{0.05t} > \frac{5}{4}$$

เนื่องจาก $f(x) = \ln x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

จะได้ $\ln e^{0.05t} > \ln\frac{5}{4}$

$$(0.05t)\ln e > \ln\frac{5}{4}$$

$$t > 20\ln\frac{5}{4}$$

$$t > 4.4629$$

ดังนั้น เป็นไปได้ที่จะมีจำนวนแบคทีเรียชนิด B มากกว่าจำนวนแบคทีเรียชนิด A เมื่อเวลาผ่านไปประมาณ 4.4629 ชั่วโมง

13. ปริมาณสารกัมมันตรังสีที่มีครึ่งชีวิต h วัน ที่เหลืออยู่เมื่อเวลาผ่านไป t วัน หาได้จาก

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

สารกัมมันตรังสีจำนวนเริ่มต้น 300 มิลลิกรัม สลายตัวเหลือ 200 มิลลิกรัม ในเวลา 48 ชั่วโมง

นั่นคือ $m_0 = 300$, $t = \frac{48}{24} = 2$ และ $m(2) = 200$

จะได้

$$\begin{aligned} 200 &= 300e^{-r(2)} \\ e^{-2r} &= \frac{2}{3} \\ \ln e^{-2r} &= \ln\frac{2}{3} \\ -2r\ln e &= \ln\frac{2}{3} \\ r &= -\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} \end{aligned}$$

ถ้าต้องการให้สารกัมมันตรังสีชนิดนี้สลายตัวเหลือ 100 มิลลิกรัม

จะได้

$$\begin{aligned} 100 &= 300e^{-\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}\right)t} \\ e^{\left(\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}\right)t} &= \frac{1}{3} \\ \ln e^{\left(\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}\right)t} &= \ln\frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}\right)t &= \ln\frac{1}{3} \\ t &= \frac{2\ln\frac{1}{3}}{\ln\frac{2}{3}} \\ t &\approx 5.4190 \end{aligned}$$

ดังนั้น ต้องใช้เวลานานประมาณ 5.4190 วัน เมื่อคำนวณจากเวลาเริ่มต้น

14. จาก $m(t) = m_0 e^{-rt}$ เมื่อ $r = \dfrac{\ln 2}{h}$

เนื่องจาก คาร์บอน–14 มีครึ่งชีวิตประมาณ 5,730 ปี จะได้ว่า $h = 5370 \times 365$

นั่นคือ $r = \dfrac{\ln 2}{5730 \times 365}$

จะได้ว่า การสลายตัวของคาร์บอน–14 หาได้จาก

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t}$$

1) มัมมี่ของชาวอียิปต์โบราณมีปริมาณคาร์บอน–14 เหลืออยู่สามในห้าของปริมาณคาร์บอน–14 ในคนปกติ นั่นคือ $m(t) = \dfrac{3}{5}m_0$

จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5}m_0 &= m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t} \\
e^{-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t} &= \frac{3}{5} \\
\ln e^{-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t} &= \ln\frac{3}{5} \\
\left(-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t\right)\ln e &= \ln\frac{3}{5} \\
-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t &= \ln\frac{3}{5} \\
t &= \frac{5730\times 365\times \ln\frac{5}{3}}{\ln 2} \\
t &\approx 4222.8129
\end{aligned}$$

ดังนั้น ชาวอียิปต์โบราณตายไปแล้วประมาณ 4,223 ปี

2) ถ่านจากต้นไม้ที่ไหม้ช่วงการระเบิดของภูเขาไฟมีปริมาณคาร์บอน–14 เหลืออยู่เพียง 45% จากปริมาณเดิม นั่นคือ $m(t) = \dfrac{45}{100}m_0 = \dfrac{9}{20}m_0$

จะได้
$$\frac{9}{20}m_0 = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t}$$
$$e^{-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t} = \frac{9}{20}$$
$$\ln e^{-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t} = \ln\frac{9}{20}$$
$$\left(-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t\right)\ln e = \ln\frac{9}{20}$$
$$-\frac{\ln 2}{5730\times 365}t = \ln\frac{9}{20}$$
$$t = \frac{5730\times 365\times \ln\frac{20}{9}}{\ln 2}$$
$$t \approx 6600.9777$$

ดังนั้น ภูเขาไฟระเบิดไปแล้วอย่างน้อยประมาณ 6,601 ปี

15. จาก $A(t) = 10(0.8)^t$

ถ้าต้องการให้ปริมาณยาที่เหลืออยู่ในร่างกายน้อยกว่า 1 มิลลิกรัม จะได้ว่า $A(t) < 1$

นั่นคือ
$$10(0.8)^t < 1$$
$$(0.8)^t < 10^{-1}$$
$$\log(0.8)^t < \log 10^{-1}$$
$$t\log 0.8 < -1$$

เนื่องจาก $\log 0.8 < 0$ จะได้ $t > -\frac{1}{\log 0.8}$ นั่นคือ $t > 10.3189$

ดังนั้น จะต้องใช้เวลาอย่างน้อย 10.32 ชั่วโมง

16. จาก $M_W = \frac{2}{3}\log M_0 - 10.7$

1) แผ่นดินไหวที่เมืองซานฟรานซิสโก รัฐแคลิฟอร์เนีย ใน ค.ศ. 1906 มีโมเมนต์แผ่นดินไหวเป็น 5.6×10^{27} นั่นคือ $M_0 = 5.6\times 10^{27}$

จะได้
$$\begin{aligned} M_W &= \frac{2}{3}\log\left(5.6\times10^{27}\right)-10.7 \\ &= \frac{2}{3}\left(\log 5.6+\log 10^{27}\right)-10.7 \\ &= \frac{2}{3}\left(\log 5.6+27\log 10\right)-10.7 \\ &\approx \frac{2}{3}\left(0.7482+27\right)-10.7 \\ &= 7.7988 \end{aligned}$$

ดังนั้น แผ่นดินไหวที่เมืองซานฟรานซิสโก รัฐแคลิฟอร์เนีย ใน ค.ศ. 1906 มีขนาดแผ่นดินไหวประมาณ 7.8 ตามมาตราขนาดโมเมนต์แผ่นดินไหว

2) แผ่นดินไหวที่ฝั่งตะวันตกของเกาะสุมาตราของประเทศอินโดนีเซีย ใน ค.ศ. 2004 มีขนาดแผ่นดินไหว 9.1 ตามมาตราขนาดโมเมนต์แผ่นดินไหว

นั่นคือ $M_W = 9.1$

จะได้
$$\begin{aligned} 9.1 &= \frac{2}{3}\log M_0-10.7 \\ \frac{2}{3}\log M_0 &= 9.1+10.7 \\ \log M_0 &= 19.8\times\frac{3}{2} \\ \log M_0 &= 29.7 \\ M_0 &= 10^{29.7} \end{aligned}$$

ดังนั้น โมเมนต์แผ่นดินไหวของการเกิดแผ่นดินไหวที่ฝั่งตะวันตกของเกาะสุมาตราของประเทศอินโดนีเซีย ใน ค.ศ. 2004 คือ $10^{29.7}$

17. จาก
$$T(t) = T_E+\left(T_0-T_E\right)e^{-Zt}$$

ในที่นี้ $T_E=14$, $T(t)=21$, $T_0=37$ และ $Z=0.1$

จะได้
$$\begin{aligned} 21 &= 14+\left(37-14\right)e^{-0.1t} \\ 23e^{-0.1t} &= 7 \end{aligned}$$

$$e^{-0.1t} = \frac{7}{23}$$

$$\ln e^{-0.1t} = \ln\frac{7}{23}$$

$$-0.1t \ln e = \ln\frac{7}{23}$$

$$t = -\frac{\ln\frac{7}{23}}{0.1}$$

$$t \approx 11.8958$$

ดังนั้น ผู้ตายเสียชีวิตมาแล้วอย่างน้อยประมาณ 12 ชั่วโมง

บทที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์

แบบฝึกหัด 3.1.1

1. 1) ระยะทางระหว่างจุด $(0,0)$ และ $(3,0)$ คือ $|0-3| = 3$ หน่วย

2) ระยะทางระหว่างจุด $(-6,4)$ และ $(-6,17)$ คือ $|4-17| = 13$ หน่วย

3) ระยะทางระหว่างจุด $(2,5)$ และ $(9,5)$ คือ $|2-9| = 7$ หน่วย

4) ระยะทางระหว่างจุด $(0,0)$ และ $(-2,5)$ คือ $\sqrt{(0-(-2))^2+(0-5)^2} = \sqrt{29}$ หน่วย

5) ระยะทางระหว่างจุด $(3,-2)$ และ $(5,0)$ คือ $\sqrt{(3-5)^2+(-2-0)^2} = 2\sqrt{2}$ หน่วย

6) ระยะทางระหว่างจุด $(-4,7)$ และ $(6,7)$ คือ $|-4-6| = 10$ หน่วย

7) ระยะทางระหว่างจุด $(-1,-2)$ และ $(3,-4)$ คือ $\sqrt{(-1-3)^2+(-2-(-4))^2} = 2\sqrt{5}$ หน่วย

8) จาก
$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\ &= \sqrt{(0-s)^2+(0-t)^2} \\ &= \sqrt{(-s)^2+(-t)^2} \\ &= \sqrt{s^2+t^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $(0,0)$ และ (s,t) คือ $\sqrt{s^2+t^2}$ หน่วย

9) จาก
$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\ &= \sqrt{(0-t)^2+(s-0)^2} \\ &= \sqrt{(-t)^2+s^2} \\ &= \sqrt{s^2+t^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $(0,s)$ และ $(t,0)$ คือ $\sqrt{s^2+t^2}$ หน่วย

10) จาก $P_1P_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$= \sqrt{(0-(s+t))^2+((s+t)-0)^2}$

$= \sqrt{(-(s+t))^2+(s+t)^2}$

$= \sqrt{2(s+t)^2}$

$= \sqrt{2}|s+t|$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $(0, s+t)$ และ $(s+t, 0)$ คือ $\sqrt{2}|s+t|$ หน่วย

2. 1) ให้ C มีพิกัดเป็น $(c,4)$

จากรูป $\overline{BC}$ ขนานกับแกน X

จะได้ $BC = |c-(-1)|$

$8 = |c+1|$

$c = -9$ หรือ $c = 7$

เนื่องจาก จุด C อยู่ในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น จุด C มีพิกัดเป็น $(7,4)$

2) จากพิกัดของจุด A และ B ที่กำหนดให้

จะได้ $AB = \sqrt{(-4-(-1))^2+(0-4)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$

$= 5$

ดังนั้น $\overline{AB}$ ยาว 5 หน่วย

3) ให้ D มีพิกัดเป็น $(d,0)$

ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด B มาตั้งฉากกับแกน X ที่จุด $(-1,0)$

ดังนั้น ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูคือ $|4-0| = 4$ หน่วย

เนื่องจาก พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2} \times$ ผลบวกของความยาวด้านคู่ขนาน $\times$ สูง

จะได้ $48 = \frac{1}{2}\times(BC+AD)\times 4$

$= \frac{1}{2}\times(8+AD)\times 4$

$= 2\times(8+AD)$

$AD = 16$

และจากรูป $\overline{AD}$ ขนานกับแกน X

จะได้ $AD = |d-(-4)|$

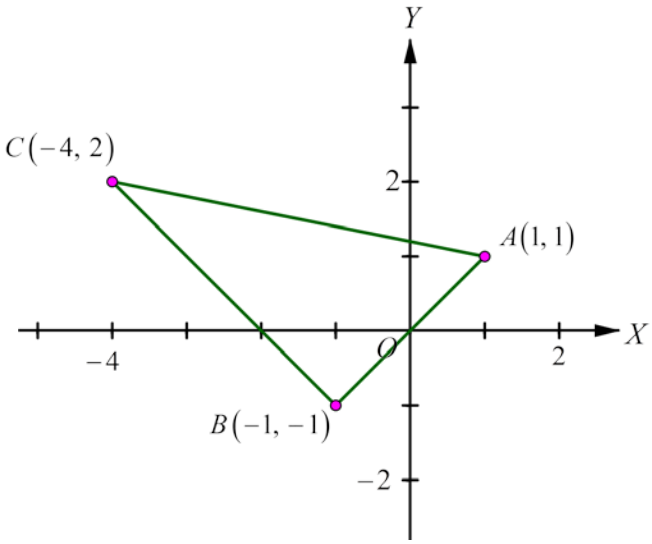
$16 = |d+4|$

$d = -20$ หรือ $d = 12$

จากรูป D อยู่บนแกน X ทางด้านบวก

ดังนั้น จุด D จึงมีพิกัดเป็น $(12,0)$

3. ให้ $A(1,1)$, $B(-1,-1)$ และ $C(-4,2)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม และเขียนกราฟได้ดังนี้



$$AB=\sqrt{(1-(-1))^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{8}$$

$$BC=\sqrt{(-1-(-4))^2+(-1-2)^2}=\sqrt{18}$$

$$AC=\sqrt{(1-(-4))^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}$$

จะเห็นว่า $AB^2+BC^2=\left(\sqrt{18}\right)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2=18+8=26=\left(\sqrt{26}\right)^2=AC^2$

นั่นคือ $AB^2+BC^2=AC^2$

ดังนั้น จุด $(1,1)$, $(-1,-1)$ และ $(-4,2)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

4. ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC หาได้จาก $AB+BC+AC$

จาก $AB = \sqrt{(3-7)^2+(4-8)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(7-(-1))^2+(8-(-2))^2} = \sqrt{64+100} = 2\sqrt{41}$

$AC = \sqrt{(3-(-1))^2+(4-(-2))^2} = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$

ดังนั้น เส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC ยาว $4\sqrt{2}+2\sqrt{13}+2\sqrt{41}$ หน่วย

5. ให้ $P(4,y)$ อยู่ห่างจาก $P_1(-5,2)$ และ $P_2(13,-6)$ เป็นระยะเท่ากัน

จะได้ $PP_1 = \sqrt{(4-(-5))^2+(y-2)^2}$

$= \sqrt{81+(y-2)^2}$

และ $PP_2 = \sqrt{(4-13)^2+(y-(-6))^2}$

$= \sqrt{81+(y+6)^2}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sqrt{81+(y-2)^2} &= \sqrt{81+(y+6)^2} \\
81+(y-2)^2 &= 81+(y+6)^2 \\
(y-2)^2 &= (y+6)^2 \\
y^2-4y+4 &= y^2+12y+36 \\
16y &= -32
\end{aligned}$$

จะได้ $y = -2$

ดังนั้น ค่าของ y คือ -2

6. ให้ P_1 แทนจุด $(2,5)$

P_2 แทนจุด $(3,-7)$

และ P เป็นจุดบนแกน Y มีพิกัดเป็น $(0,y)$ ซึ่ง $PP_1 = PP_2$

จะได้
$$\begin{aligned}
\sqrt{(0-2)^2+(y-5)^2} &= \sqrt{(0-3)^2+(y-(-7))^2} \\
\sqrt{(-2)^2+(y-5)^2} &= \sqrt{(-3)^2+(y+7)^2} \\
\sqrt{y^2-10y+29} &= \sqrt{y^2+14y+58} \\
y^2-10y+29 &= y^2+14y+58 \\
24y &= -29 \\
y &= -\frac{29}{24}
\end{aligned}$$

ดังนั้น จุดซึ่งอยู่บนแกน Y และอยู่ห่างจากจุด $(2,5)$ และ $(3,-7)$ เป็นระยะเท่ากัน

คือ จุด $\left(0,-\frac{29}{24}\right)$

7. ให้ $A(6,8)$, $B(4,6)$ และ $C(-2,-2)$

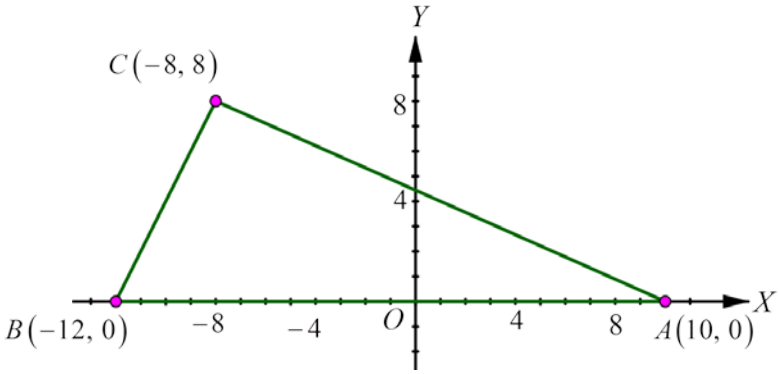
จะได้
$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(6-4)^2+(8-6)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \\
BC &= \sqrt{(4-(-2))^2+(6-(-2))^2} = \sqrt{36+64} = 10 \\
AC &= \sqrt{(6-(-2))^2+(8-(-2))^2} = \sqrt{64+100} = 2\sqrt{41}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $AB \neq BC \neq AC$

นั่นคือ ไม่มีสองด้านใดเลยของรูปสามเหลี่ยมนี้ที่มีความยาวเท่ากัน

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมนี้ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

8. ให้ $A(10,0)$, $B(-12,0)$ และ $C(-8,8)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม และเขียนกราฟได้ดังนี้



จากรูป ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด C มาตั้งฉากกับแกน X ที่จุด $(-8,0)$

ดังนั้น ความสูงของรูปสามเหลี่ยม ABC คือ $|8-0| = 8$ หน่วย

และความยาวฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC คือ $|10-(-12)| = 22$ หน่วย

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC คือ $\frac{1}{2} \times 22 \times 8 = 88$ ตารางหน่วย

9. ให้ $A(0,0)$, $B(8,18)$ และ $C(12,27)$

จะได้

$$AB = \sqrt{(0-8)^2+(0-18)^2} = \sqrt{64+324} = 2\sqrt{97}$$

$$BC = \sqrt{(8-12)^2+(18-27)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$$

$$AC = \sqrt{(0-12)^2+(0-27)^2} = \sqrt{144+729} = 3\sqrt{97}$$

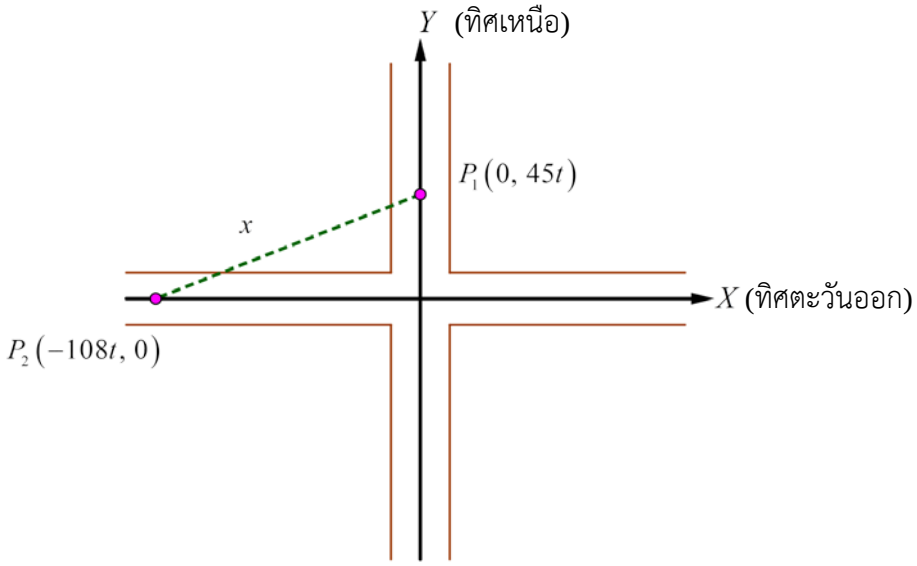
เนื่องจาก $AB+BC = 2\sqrt{97}+\sqrt{97} = 3\sqrt{97} = AC$

ดังนั้น จุด $(0,0)$, $(8,18)$ และ $(12,27)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

10. เงื่อนไขที่ทำให้จุด P_1, P_2 และ P_3 ใด ๆ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันคือ

$P_1P_2 + P_2P_3 = P_1P_3$ หรือ $P_1P_3 + P_2P_3 = P_1P_2$ หรือ $P_1P_2 + P_1P_3 = P_2P_3$

11. แสดงสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ดังนี้



เมื่อกำหนดให้ระยะทางหนึ่งหน่วยในกราฟ แทนระยะทาง 1 กิโลเมตร

1) เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง

จะได้ว่า พิกัดของรถคันแรกเป็น $P_1(0, 45t)$

พิกัดของรถคันที่สองเป็น $P_2(-108t, 0)$

และให้ x แทนระยะทางระหว่างรถทั้งสองคันในหน่วยกิโลเมตร เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง

จะได้ $x^2 = (108t)^2 + (45t)^2$

$= 11664t^2 + 2025t^2$

$= 13689t^2$

$x = 117t$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง รถทั้งสองคันจะมีระยะทางห่างกัน $117t$ กิโลเมตร

2) จากข้อ 1) จะได้ว่า เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง รถทั้งสองคันจะมีระยะทางห่างกัน $117t$ กิโลเมตร

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 5 ชั่วโมง รถทั้งสองคันมีระยะทางห่างกัน $117 \times 5 = 585$ กิโลเมตร

3) ให้ t แทนระยะเวลาที่ทำให้รถทั้งสองคันมีระยะทางห่างกัน 39 กิโลเมตร

จากข้อ 1) จะได้

$$117t = 39$$

$$t = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น รถทั้งสองคันจะมีระยะทางห่างกัน 39 กิโลเมตร เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที

12. เริ่มต้นโดยการวางพิกัดให้กับวัตถุต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

ให้จุดกำเนิด O เป็นจุดเริ่มต้นที่แก้วและกล้าเริ่มออกเดินทาง

แกน Y อยู่แนวกึ่งกลางทางเดินในแนวเหนือ-ใต้

แกน X อยู่แนวกึ่งกลางทางเดินในแนวตะวันออก-ตะวันตก

เนื่องจากแก้วออกเดินทางไปทางทิศเหนือ ตั้งแต่ 7.00 น. ด้วยความเร็ว 3 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

และกล้าออกเดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้ เวลา 8.00 น. ด้วยความเร็ว

$3\sqrt{2}$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง ซึ่งทำให้แก้วและกล้าอยู่ห่างกัน $3\sqrt{29}$ กิโลเมตร

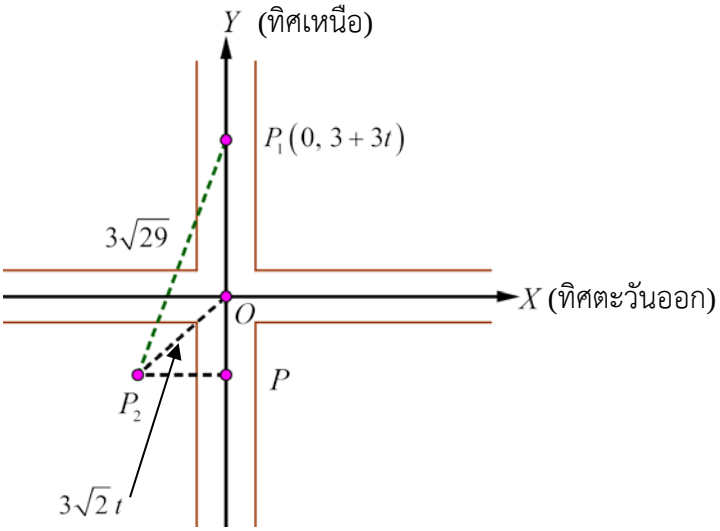
ให้ t แทนระยะเวลา (ชั่วโมง) ที่กล้าเดินทาง

จะได้ว่า กล้าจะเดินทางได้ $3\sqrt{2}\,t$ กิโลเมตร ทางทิศตะวันตกเฉียงใต้

และแก้วจะเดินทางได้ $3+3t$ กิโลเมตร ทางทิศเหนือ

จะได้ว่า พิกัดของแก้วเป็น $P_1(0, 3+3t)$

แสดงสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ดังนี้



จากรูปจะได้ $OP_2^{\,2} = OP^2 + PP_2^{\,2}$

เนื่องจาก $OP = PP_2$

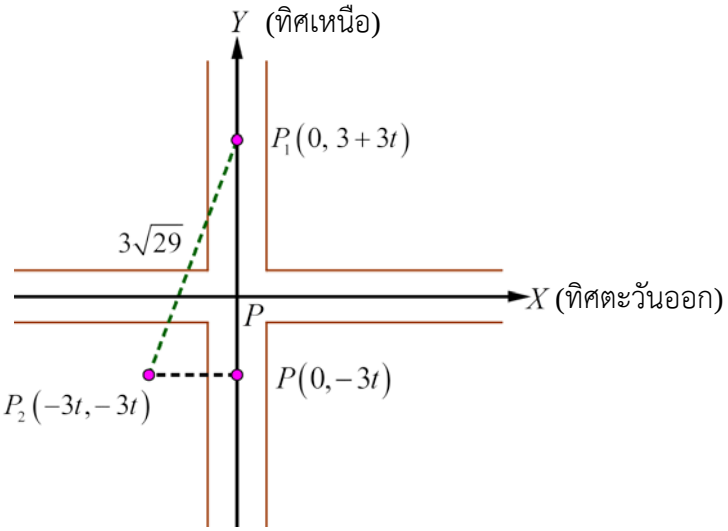
จะได้ว่า $\left(3\sqrt{2}\,t\right)^2 = OP^2 + OP^2$

$$18t^2 = 2OP^2$$

$$9t^2 = OP^2$$

$$OP = 3t$$

จะได้ว่า พิกัดของกล้าเป็น $P_2(-3t, -3t)$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้



จากรูปจะได้

$$\begin{aligned}
\left(3\sqrt{29}\right)^2 &= (3t)^2+\left[(3+3t)+3t\right]^2 \\
261 &= 9t^2+(3+6t)^2 \\
29 &= t^2+(1+2t)^2 \\
29 &= t^2+(1+4t+4t^2) \\
5t^2+4t-28 &= 0 \\
(5t+14)(t-2) &= 0
\end{aligned}$$

นั่นคือ $t=-\dfrac{14}{5}$ หรือ $t=2$

เนื่องจาก $t \geq 0$ จะได้ว่า $t=2$

เนื่องจาก กล้าออกเดินทางเวลา 8.00 น.

จะได้ว่า แก้วและกล้าจะอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง $3\sqrt{29}$ กิโลเมตร ณ เวลา 10.00 น.

แบบฝึกหัด 3.1.2

1. 1) ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางที่ต้องการ

$$x = \frac{\frac{1}{2}+3}{2} = \frac{7}{4}$$

$$y = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น จุดกึ่งกลางระหว่างจุด $\left(\frac{1}{2},2\right)$ และ $(3,-1)$ คือ $\left(\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right)$

2) ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางที่ต้องการ

$$x = \frac{3+(-3)}{2} = 0$$

$$y = \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)+(-9)}{2} = -\frac{23}{4}$$

ดังนั้น จุดกึ่งกลางระหว่างจุด $\left(3,-\frac{5}{2}\right)$ และ $(-3,-9)$ คือ $\left(0,-\frac{23}{4}\right)$

3) ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางที่ต้องการ

$$x = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$y = \frac{-3+3}{2} = 0$$

ดังนั้น จุดกึ่งกลางระหว่างจุด $(-1,-3)$ และ $(5,3)$ คือ $(2,0)$

4) ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางที่ต้องการ

$$x = \frac{-3+(-1)}{2} = -2$$

$$y = \frac{-2+(-1)}{2} = -\frac{3}{2}$$

ดังนั้น จุดกึ่งกลางระหว่างจุด $(-3,-2)$ และ $(-1,1)$ คือ $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$

2. 1) ให้ (x,y) เป็นพิกัดของจุด P

เนื่องจาก $M(1,2)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ

ดังนั้น $1 = \frac{x+3}{2}$ และ $2 = \frac{y+4}{2}$

จะได้ $x=-1$ และ $y=0$

ดังนั้น $(-1,0)$ เป็นพิกัดของจุด P

2) ให้ (x,y) เป็นพิกัดของจุด P

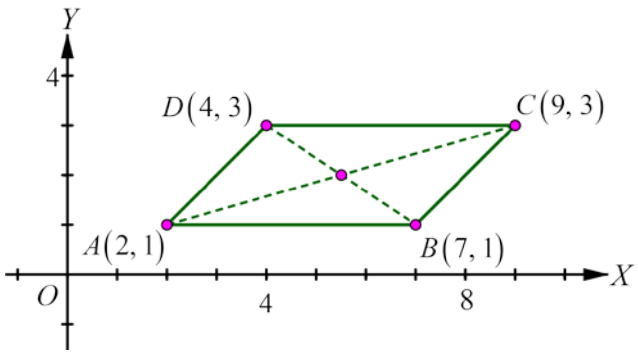
เนื่องจาก $M(5,6)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ

ดังนั้น $5 = \frac{x+15}{2}$ และ $6 = \frac{y+(-4)}{2}$

จะได้ $x=-5$ และ $y=16$

ดังนั้น $(-5,16)$ เป็นพิกัดของจุด P

3. แสดงรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ได้ดังนี้



ให้ P เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BD}$

จุด P จะมีพิกัด $\left(\frac{2+9}{2},\frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{11}{2},2\right)$

และ จุด Q จะมีพิกัด $\left(\frac{7+4}{2},\frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{11}{2},2\right)$

ซึ่งจุด P และจุด Q มีพิกัดเดียวกัน

ดังนั้น จุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมนี้เป็นจุดเดียวกัน

4. ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางที่ต้องการ

จะได้ $x = \frac{x_1+3x_1}{2} = 2x_1$

$y = \frac{y_1+3y_1}{2} = 2y_1$

5. ให้ $M(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{PQ}$

จะได้ $x=\frac{2+6}{2} = 4$ และ $y=\frac{1+5}{2} = 3$

นั่นคือ $(4,3)$ เป็นพิกัดของจุด M

จะได้ $MA = \sqrt{(8-4)^2+(2-3)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

ดังนั้น ความยาวของส่วนของเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุด $A(8,2)$ และจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PQ คือ $\sqrt{17}$ หน่วย

6. ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB

จะได้ $x = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$ และ $y = \frac{9+8}{2} = \frac{17}{2}$

นั่นคือ $\left(\frac{7}{2},\frac{17}{2}\right)$ เป็นพิกัดของจุด P

ให้ $Q(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC

จะได้ $x = \frac{3+(-1)}{2} = 1$ และ $y = \frac{8+2}{2} = 5$

นั่นคือ $(1,5)$ เป็นพิกัดของจุด Q

ให้ $R(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC

จะได้ $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$ และ $y = \frac{9+2}{2} = \frac{11}{2}$

นั่นคือ $\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$ เป็นพิกัดของจุด R

ดังนั้น พิกัดของจุดปลายของเส้นมัธยฐานที่มี AB เป็นฐานคือ $\left(\frac{7}{2},\frac{17}{2}\right)$

พิกัดของจุดปลายของเส้นมัธยฐานที่มี BC เป็นฐานคือ $(1,5)$

และพิกัดของจุดปลายของเส้นมัธยฐานที่มี AC เป็นฐานคือ $\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$

7. ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง RT

จะได้ $x = \frac{-7+6}{2} = -\frac{1}{2}$

และ $y = \frac{-5+1}{2} = -2$

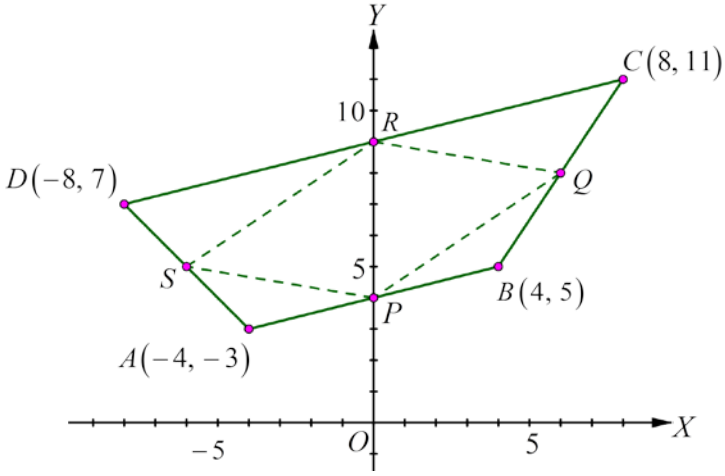
จะได้ พิกัดของจุด P คือ $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$

ให้ SP เป็นความยาวของเส้นมัธยฐานจากจุด S ไปยังด้าน RT จะได้

$$SP = \sqrt{\left(3-\left(\frac{-1}{2}\right)\right)^2+\left(7-(-2)\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4}+81} = \frac{\sqrt{373}}{2}$$

ดังนั้น เส้นมัธยฐานจากจุด S ไปยังด้าน RT ยาว $\frac{\sqrt{373}}{2}$ หน่วย

8. แสดงรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ได้ดังนี้



ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB

จะได้ $x = \frac{-4+4}{2} = 0$ และ $y = \frac{3+5}{2} = 4$

นั่นคือ $(0,4)$ เป็นพิกัดของจุด P

ให้ $Q(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง BC

จะได้ $x = \frac{4+8}{2} = 6$ และ $y = \frac{5+11}{2} = 8$

นั่นคือ $(6,8)$ เป็นพิกัดของจุด Q

ให้ $R(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง CD

จะได้ $x = \frac{8+(-8)}{2} = 0$ และ $y = \frac{11+7}{2} = 9$

นั่นคือ $(0,9)$ เป็นพิกัดของจุด R

ให้ $S(x,y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง DA

จะได้ $x = \frac{(-8)+(-4)}{2} = -6$ และ $y = \frac{7+3}{2} = 5$

นั่นคือ $(-6,5)$ เป็นพิกัดของจุด S

ความยาวของเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม $PQRS$ หาได้จาก $PQ+QR+RS+SP$

$$PQ = \sqrt{(0-6)^2+(4-8)^2} = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$$

$$QR = \sqrt{(6-0)^2+(8-9)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

$$RS = \sqrt{(0-(-6))^2+(9-5)^2} = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$$

$$SP = \sqrt{(-6-0)^2+(5-4)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$$

จะได้ว่า $PQ+QR+RS+SP = 2\sqrt{13}+\sqrt{37}+2\sqrt{13}+\sqrt{37} = 4\sqrt{13}+2\sqrt{37}$

ดังนั้น ความยาวของเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม $PQRS$ คือ $4\sqrt{13}+2\sqrt{37}$ หน่วย

9. ให้ $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB

จะได้ $x_1 = \dfrac{2+(-5)}{2} = -\dfrac{3}{2}$ และ $y_1 = \dfrac{7+6}{2} = \dfrac{13}{2}$

นั่นคือ จุด P มีพิกัดเป็น $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$

ให้ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง PB

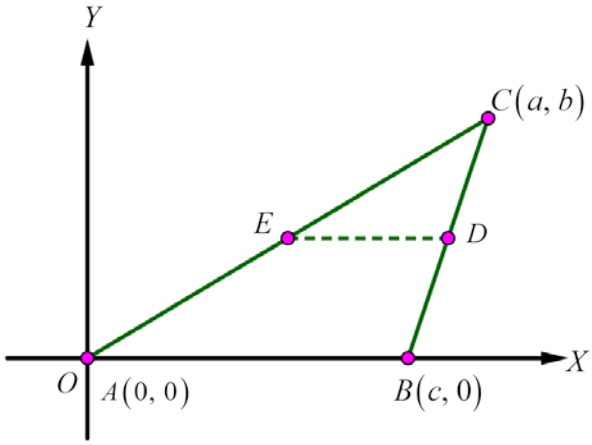
จะได้ $x_2 = \dfrac{-5+\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} = -\dfrac{13}{4}$ และ $y = \dfrac{\frac{13}{2}+6}{2} = \dfrac{25}{4}$

นั่นคือ จุด P มีพิกัดเป็น $\left(-\dfrac{13}{4}, \dfrac{25}{4}\right)$

เนื่องจาก จุด Q อยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ $\dfrac{3}{4}$ ของระยะทางระหว่างจุด A และ B

ดังนั้น พิกัดของจุดบนส่วนของเส้นตรง AB ซึ่งอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะทาง $\dfrac{3}{4}$ ของระยะทางระหว่าง A และ B คือ $\left(-\dfrac{13}{4}, \dfrac{25}{4}\right)$

10. แสดงสถานการณ์ที่โจทย์กำหนดได้ดังนี้



พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC

ให้จุด A มีพิกัดเป็น $(0,0)$ จุด B มีพิกัดเป็น $(c,0)$ จุด C มีพิกัดเป็น (a,b)

และกำหนดให้จุด D และจุด E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และด้าน AC ตามลำดับ

จะได้ว่า จุด D มีพิกัดเป็น $\left(\frac{c+a}{2},\frac{0+b}{2}\right)=\left(\frac{a+c}{2},\frac{b}{2}\right)$

และจุด E มีพิกัดเป็น $\left(\frac{0+a}{2},\frac{0+b}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$

ดังนั้น AD และ BE เป็นเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC

เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
AD &= BE \\
\sqrt{\left(0-\left(\frac{a+c}{2}\right)\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(c-\frac{a}{2}\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2} \\
\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{2c-a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 \\
a^2+2ac+c^2 &= 4c^2-4ac+a^2 \\
6ac-3c^2 &= 0 \\
c(c-2a) &= 0
\end{aligned}
$$

$c = 2a$ หรือ $c = 0$

เนื่องจาก c เป็นความยาวด้าน AB ดังนั้น $c > 0$ จะได้ว่า $c = 2a$

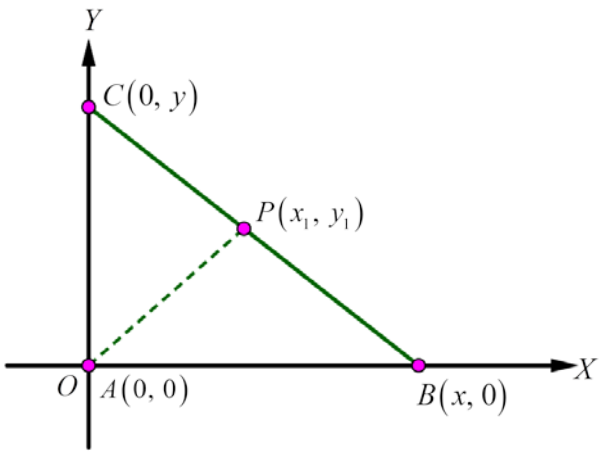
จะได้ $AC = \sqrt{(0-a)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$BC = \sqrt{(c-a)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{(2a-a)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

นั่นคือ $AC = BC$

ดังนั้น ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

11. แสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ดังนี้



ให้ $A(0,0)$, $B(x,0)$ และ $C(0,y)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

โดยมี $B\hat{A}C$ เป็นมุมฉาก

และให้ $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC

จะได้ $x_1 = \frac{x+0}{2} = \frac{x}{2}$ และ $y_1 = \frac{0+y}{2} = \frac{y}{2}$

นั่นคือ $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ เป็นพิกัดของจุด P

จะได้ $AP = \sqrt{\left(0-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$

$$BP = \sqrt{\left(x-\frac{x}{2}\right)^2+\left(0-\frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$CP = \sqrt{\left(0-\frac{x}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

จะได้ว่า $AP = BP = CP$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากกับจุดยอดทั้งสามเท่ากัน

แบบฝึกหัด 3.1.3

1. 1) ให้ $(x_1, y_1) = (0,0)$ และ $(x_2, y_2) = (2,6)$

ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{0-6}{0-2} = 3$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0,0)$ และ $(2,6)$ คือ 3

2) ให้ $(x_1, y_1) = (0,0)$ และ $(x_2, y_2) = (-2,6)$

ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{0-6}{0-(-2)} = -3$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0,0)$ และ $(-2,6)$ คือ -3

3) ให้ $(x_1, y_1) = (5,3)$ และ $(x_2, y_2) = (12,7)$

ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3-7}{5-12} = \frac{4}{7}$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(5,3)$ และ $(12,7)$ คือ $\frac{4}{7}$

4) ให้ $(x_1, y_1) = (0,0)$ และ $(x_2, y_2) = (-3,-4)$

ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{0-(-4)}{0-(-3)} = \frac{4}{3}$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0,0)$ และ $(-3,-4)$ คือ $\frac{4}{3}$

5) ให้ $(x_1, y_1) = (3,-8)$ และ $(x_2, y_2) = (-5,7)$

ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{(-8)-7}{3-(-5)} = -\frac{15}{8}$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,-8)$ และ $(-5,7)$ คือ $-\frac{15}{8}$

6) ให้ $(x_1, y_1) = (t+1\,,\, s)$ และ $(x_2, y_2) = (2t\,,\, s-3)$

ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{s-(s-3)}{(t+1)-(2t)} = \frac{3}{1-t}$ เมื่อ $t \neq 1$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(t+1\,,\, s)$ และ $(2t\,,\, s-3)$ คือ $\frac{3}{1-t}$ เมื่อ $t \neq 1$

2. 1) จาก $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

จะได้

$$
\begin{aligned}
4 &= \frac{2-6}{5-x} \\
4 &= \frac{-4}{5-x} \\
4(5-x) &= -4 \\
20-4x &= -4 \\
24 &= 4x \\
x &= 6
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ค่าของ x คือ 6

2) จาก $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{x-1}{4-(-3)} \\
\frac{1}{2} &= \frac{x-1}{7} \\
7 &= 2x-2 \\
2x &= 9
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{9}{2}$$

ดังนั้น ค่าของ x คือ $\frac{9}{2}$

3) จาก $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

จะได้

$$-\frac{2}{3} = \frac{-3-x}{6-9}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{x+3}{3}$$

$$3x+9 = -6$$

$$3x = -15$$

$$x = -5$$

ดังนั้น ค่าของ x คือ -5

4) จาก $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

จะได้

$$0 = \frac{12-12}{x-5}$$

$$0 = \frac{0}{x-5}$$

$$0(x-5) = 0$$

$$0 = 0$$

ดังนั้น ค่าของ x คือ จำนวนจริงทุกจำนวนยกเว้น 5

5) จาก $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

จะได้

$$\frac{4}{3} = \frac{x-3}{1-4}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{3-x}{3}$$

$$9-3x = 12$$

$$3x = -3$$

$$x = -1$$

ดังนั้น ค่าของ x คือ -1

6) จาก $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

จะได้ $3 = \dfrac{1-2}{x-2x}$

$3 = \dfrac{-1}{-x}$

$-3x = -1$

$x = \dfrac{1}{3}$

ดังนั้น ค่าของ x คือ $\dfrac{1}{3}$

3. ให้ $(x_1, y_1) = \left(a, \dfrac{a}{b}\right)$ และ $(x_2, y_2) = \left(b, \dfrac{b}{a}\right)$

ความชันของเส้นตรง เท่ากับ $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)}{a-b} = \dfrac{\left(\dfrac{a^2 - b^2}{ab}\right)}{a-b} = \dfrac{a+b}{ab}$

โดยที่ $a \neq 0,\ b \neq 0$ และ $a \neq b$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(a, \dfrac{a}{b}\right)$ และ $\left(b, \dfrac{b}{a}\right)$ คือ $\dfrac{a+b}{ab}$

โดยที่ $a \neq 0,\ b \neq 0$ และ $a \neq b$

4. หาความชันและความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม

ให้ m_{AB} แทนความชันของส่วนของเส้นตรง AB

จะได้ $m_{AB} = \dfrac{10-7}{2-5} = -1$

ให้ m_{BC} แทนความชันของส่วนของเส้นตรง BC

จะได้ $m_{BC} = \dfrac{7-4}{5-2} = 1$

ให้ m_{AC} แทนความชันของส่วนของเส้นตรง AC

เนื่องจาก AC ขนานกับแกน Y

ดังนั้น m_{AC} ไม่นิยาม

จะได้

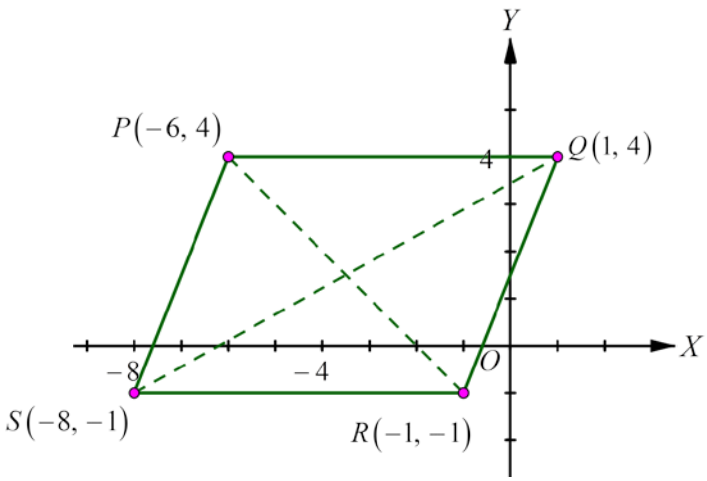
$$AB = \sqrt{(2-5)^2+(10-7)^2} = \sqrt{(-3)^2+3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(5-2)^2+(7-4)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(2-2)^2+(10-4)^2} = \sqrt{0^2+6^2} = 6$$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน AB ยาว $3\sqrt{2}$ หน่วย และมีความชัน -1 มีด้าน BC ยาว $3\sqrt{2}$ หน่วย และมีความชัน 1 และมีด้าน AC ยาว 6 หน่วย และไม่นิยามความชัน

5. ให้ $P(-6,4)$, $Q(1,4)$, $R(-1,-1)$ และ $S(-8,-1)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม $PQRS$ ซึ่งแสดงได้ดังรูป



จากรูป เส้นทแยงมุม QS และ PR เป็นส่วนของเส้นตรงที่แบ่งสี่เหลี่ยมด้านขนาน $PQRS$ ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน

ให้ m_{QS} แทนความชันของส่วนของเส้นตรง QS

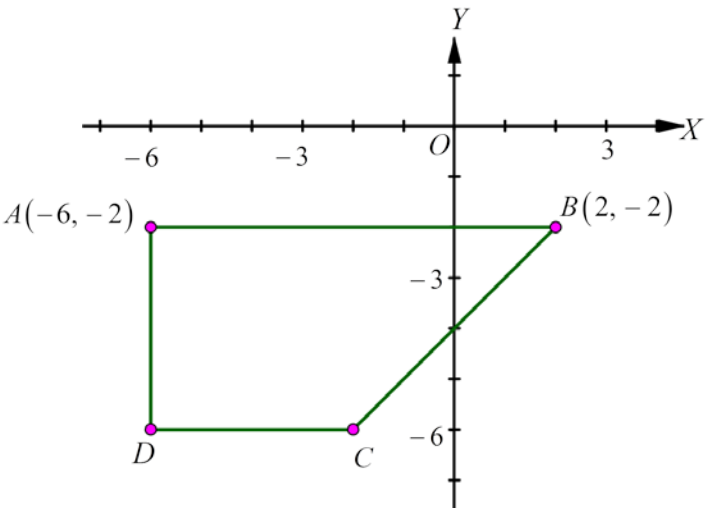
จะได้ $$m_{QS} = \frac{4-(-1)}{1-(-8)} = \frac{5}{9}$$

ให้ m_{PR} แทนความชันของส่วนของเส้นตรง PR

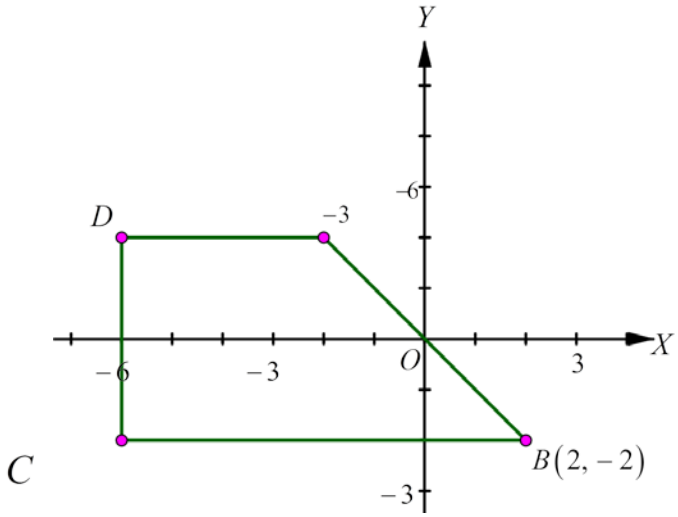
จะได้ $$m_{PR} = \frac{4-(-1)}{(-6)-(-1)} = -1$$

ดังนั้น ความชันของส่วนของเส้นตรงซึ่งแบ่งรูปสี่เหลี่ยม $PQRS$ ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากันคือ $\frac{5}{9}$ และ -1

6. ให้ $A(-6,-2)$, $B(2,-2)$, C และ D เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ ซึ่งแสดงได้ดังรูป



หรือ



จากรูป ด้าน AD เป็นความสูงของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$

จะได้ $AB = \sqrt{(2-(-6))^2+((-2)-(-2))^2} = \sqrt{64+0} = 8$

และ $DC = \frac{1}{2}AB = \frac{8}{2} = 4$

จาก พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2}\times$ ผลบวกของความยาวด้านของคู่ขนาน $\times$ สูง

จะได้
$$24 = \frac{1}{2}\times(AB+DC)\times AD$$
$$= \frac{1}{2}\times(8+4)\times AD$$
$$AD = 4$$

เนื่องจาก AD ขนานกับแกน Y และกำหนดให้ D มีพิกัดเป็น $(-6, y)$

จะได้
$$AD = |-2-y|$$
$$4 = |-2-y|$$
$$(y+2)^2 = 16$$
$$(y+6)(y-2) = 0$$

$y=-6$ หรือ $y=2$

นั่นคือ D มีพิกัดเป็น $(-6,-6)$ หรือ $(-6,2)$

เนื่องจาก CD ยาว 4 หน่วย และ CD ขนานกับแกน X

จะได้ C มีพิกัดเป็น $(-6+4,2)=(-2,2)$ หรือ $(-6+4,-6)=(-2,-6)$

ให้ m_{BC} แทนความชันของส่วนของเส้นตรง BC

จะได้ $m_{BC}=\dfrac{-2-2}{2-(-2)}=-1$ หรือ $m_{BC}=\dfrac{-2-(-6)}{2-(-2)}=1$

ดังนั้น ความชันที่เป็นไปได้ของด้าน BC คือ -1 หรือ 1

แบบฝึกหัด 3.1.4

1. ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,-4)$ และ $(3,3)$ เท่ากับ $\dfrac{-4-3}{-2-3}=\dfrac{7}{5}$

   ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,-2)$ และ $(6,5)$ เท่ากับ $\dfrac{-2-5}{1-6}=\dfrac{7}{5}$

   ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,-4)$ และ $(3, 3)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,-2)$ และ $(6,5)$

2. ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,2)$ และ $(1,-4)$ เท่ากับ $\dfrac{2-(-4)}{3-1}=3$

   ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(k,7)$ และ $(-3,-2)$ เท่ากับ $\dfrac{7-(-2)}{k-(-3)}=\dfrac{9}{k+3}$

   เนื่องจากเส้นตรงทั้งสองเส้นขนานกัน จะได้ว่าเส้นตรงทั้งสองมีความชันเท่ากัน

   นั่นคือ
   $$\begin{aligned}\frac{9}{k+3} &= 3\\ 3k+9 &= 9\\ k &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าของ k คือ 0

3. ให้ A มีพิกัดเป็น $(-2,-1)$

B มีพิกัดเป็น $(1,0)$

C มีพิกัดเป็น $(4,3)$

D มีพิกัดเป็น $(1,2)$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B เท่ากับ $\frac{-1-0}{-2-1}=\frac{1}{3}$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C เท่ากับ $\frac{0-3}{1-4}=1$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D เท่ากับ $\frac{3-2}{4-1}=\frac{1}{3}$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด D และ A เท่ากับ $\frac{2-(-1)}{1-(-2)}=1$

จะได้ว่า ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B เท่ากับ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D และ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C เท่ากับความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด D และ A

นั่นคือ ด้าน AB ขนานกับด้าน CD และด้าน BC ขนานกับด้าน DA

ดังนั้น พิกัดที่กำหนดให้เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

4. ให้ A มีพิกัดเป็น $(1,2)$

B มีพิกัดเป็น $(6,7)$

C มีพิกัดเป็น $(-3,4)$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B เท่ากับ $\frac{2-7}{1-6}=1$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C เท่ากับ $\frac{7-4}{6-(-3)}=\frac{1}{3}$

จะได้ว่า ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B ไม่เท่ากับ ความชันของเส้นตรงที่

ผ่านจุด B และ C

ดังนั้น จุดที่กำหนดให้ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

5. ให้ A มีพิกัดเป็น $(b,6)$

B มีพิกัดเป็น $(-1,4)$

C มีพิกัดเป็น $(-4,2)$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B เท่ากับ $\dfrac{6-4}{b-(-1)}=\dfrac{2}{b+1}$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C เท่ากับ $\dfrac{4-2}{-1-(-4)}=\dfrac{2}{3}$

เนื่องจาก จุดทั้งสามอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

จะได้ว่า ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B เท่ากับ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C

นั่นคือ $\dfrac{2}{b+1}=\dfrac{2}{3}$

$2b+2=6$

$b=2$

ดังนั้น ค่าของ b คือ 2

6. ให้ A มีพิกัดเป็น $(p,q+r)$

B มีพิกัดเป็น $(q,r+p)$

C มีพิกัดเป็น $(r,p+q)$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B เท่ากับ $\dfrac{(q+r)-(r+p)}{p-q}=\dfrac{q-p}{p-q}=-1$

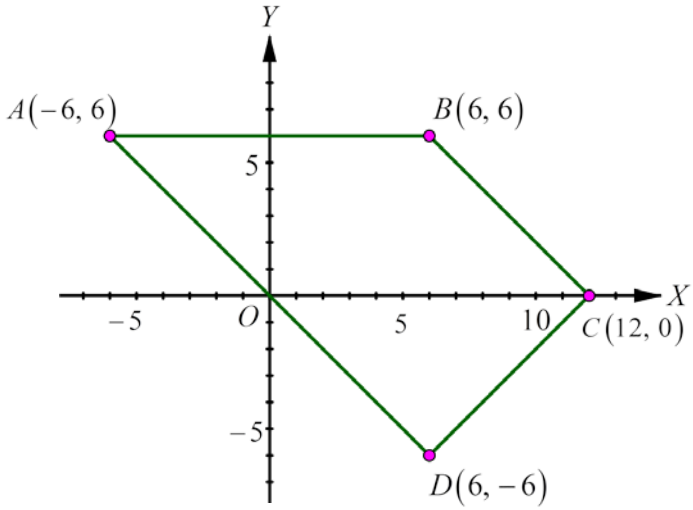
ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด B และ C เท่ากับ $\dfrac{(r+p)-(p+q)}{q-r}=\dfrac{r-q}{q-r}=-1$

จะได้ว่า ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B เท่ากับ ความชันของเส้นตรงที่

ผ่านจุด B และ C

ดังนั้น จุดที่กำหนดให้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

7. ให้ $A(-6,6)$, $B(6,6)$, $C(12,0)$ และ $D(6,-6)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ ซึ่งแสดงได้ดังรูป



ความชันของด้าน AB เท่ากับ $\dfrac{6-6}{-6-6}=0$

ความชันของด้าน BC เท่ากับ $\dfrac{6-0}{6-12}=-1$

ความชันของด้าน CD เท่ากับ $\dfrac{0-(-6)}{12-6}=1$

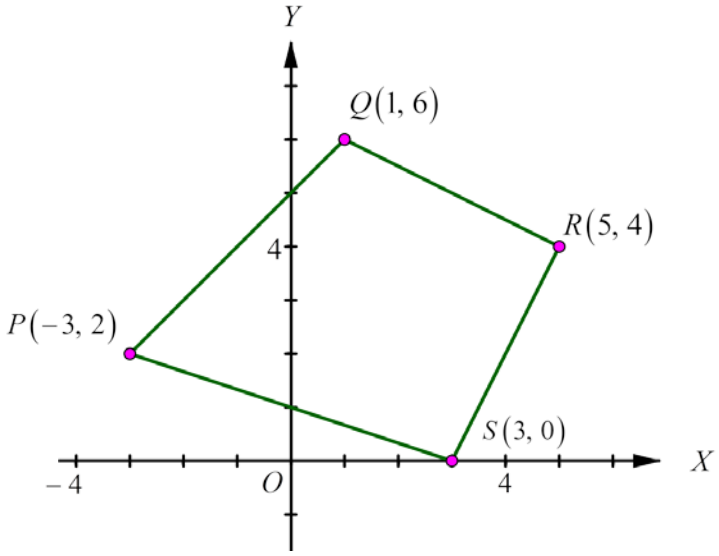
ความชันของด้าน AD เท่ากับ $\dfrac{-6-(-6)}{(-6)-6}=-1$

จะได้ว่า ความชันของด้าน BC เท่ากับความชันของด้าน AD

นั่นคือ ด้าน BC ขนานกับด้าน AD เพียงคู่เดียว

ดังนั้น จุด A, B, C และ D ที่กำหนดเป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

8. ให้ $P(-3,2)$, $Q(1,6)$, $R(5,4)$ และ $S(3,0)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม $PQRS$ ซึ่งแสดงได้ดังรูป



ให้ A เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน PQ และมีพิกัดเป็น $\left(\frac{-3+1}{2},\frac{2+6}{2}\right)=(-1,4)$

B เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน QR และมีพิกัดเป็น $\left(\frac{1+5}{2},\frac{6+4}{2}\right)=(3,5)$

C เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน RS และมีพิกัดเป็น $\left(\frac{5+3}{2},\frac{4+0}{2}\right)=(4,2)$

D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน SP และมีพิกัดเป็น $\left(\frac{3+(-3)}{2},\frac{0+2}{2}\right)=(0,1)$

ความชันของด้าน AB เท่ากับ $\frac{4-5}{-1-3}=\frac{1}{4}$

ความชันของด้าน BC เท่ากับ $\frac{5-2}{3-4}=-3$

ความชันของด้าน CD เท่ากับ $\frac{2-1}{4-0}=\frac{1}{4}$

ความชันของด้าน DA เท่ากับ $\frac{1-4}{0-(-1)}=-3$

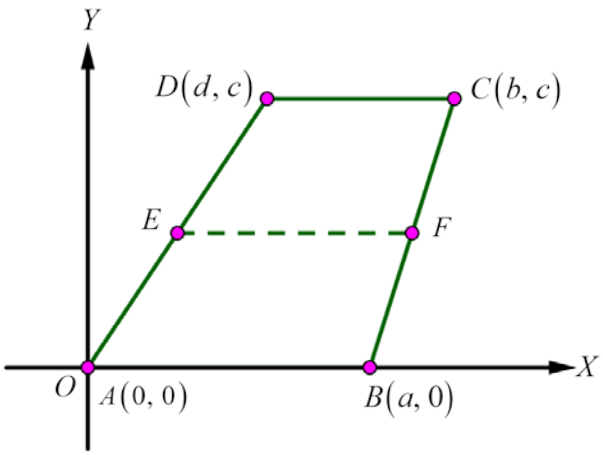
จะได้ว่า ความชันของด้าน AB เท่ากับ ความชันของด้าน CD

และ ความชันของด้าน BC เท่ากับความชันของด้าน DA

นั่นคือ ด้าน AB ขนานกับด้าน CD และด้าน BC ขนานกับด้าน DA

ดังนั้น จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดเป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

9. ให้ $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(b,c)$ และ $D(d,c)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ ซึ่งแสดงได้ดังรูป



เนื่องจาก ด้าน AB ขนานกับ ด้าน CD

ให้ E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD และมีพิกัดเป็น $\left(\frac{0+d}{2},\frac{0+c}{2}\right)=\left(\frac{d}{2},\frac{c}{2}\right)$

F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และมีพิกัดเป็น $\left(\frac{a+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$

ความชันของด้าน AB เท่ากับ $\frac{0-0}{0-a}=0$

ความชันของด้าน EF เท่ากับ $\dfrac{\frac{c}{2}-\frac{c}{2}}{\frac{d}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)}=0$

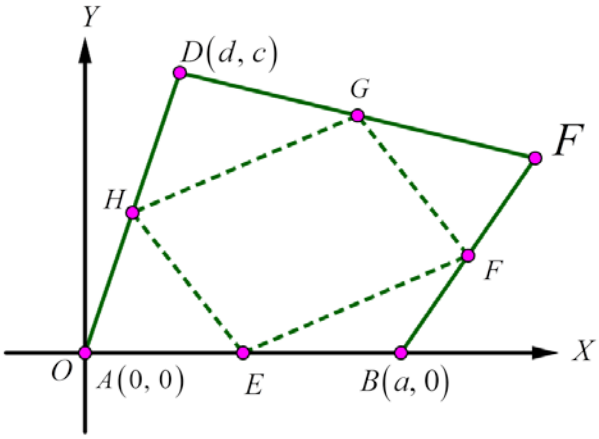
ความชันของด้าน CD เท่ากับ $\frac{c-c}{b-d}=0$

จะได้ว่า ความชันของด้าน AB เท่ากับความชันด้าน EF และเท่ากับความชันของด้าน CD

นั่นคือ ด้าน AB ขนานกับด้าน EF และขนานกับด้าน CD

ดังนั้น ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านที่ไม่ใช่ด้านคู่ขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู จะขนานกับด้านคู่ขนาน

10. ให้ $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(b,c)$ และ $D(d,e)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ซึ่งแสดงได้ดังรูป



ให้ E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และมีพิกัดเป็น $\left(\frac{0+a}{2},\frac{0+0}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},0\right)$

F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และมีพิกัดเป็น $\left(\frac{a+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$

G เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CD และมีพิกัดเป็น $\left(\frac{b+d}{2},\frac{c+e}{2}\right)$

H เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน DA และมีพิกัดเป็น $\left(\frac{d+0}{2},\frac{e+0}{2}\right)=\left(\frac{d}{2},\frac{e}{2}\right)$

ความชันของด้าน EF เท่ากับ $\dfrac{0-\dfrac{c}{2}}{\dfrac{a}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}=\dfrac{c}{b}$

ความชันของด้าน FG เท่ากับ $\dfrac{\dfrac{c}{2}-\left(\dfrac{c+e}{2}\right)}{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-\left(\dfrac{b+d}{2}\right)}=\dfrac{e}{d-a}$

ความชันของด้าน GH เท่ากับ $\dfrac{\left(\dfrac{c+e}{2}\right)-\dfrac{e}{2}}{\left(\dfrac{b+d}{2}\right)-\dfrac{d}{2}}=\dfrac{c}{b}$

ความชันของด้าน HE เท่ากับ $\dfrac{\dfrac{e}{2}-0}{\dfrac{d}{2}-\dfrac{a}{2}}=\dfrac{e}{d-a}$

จะได้ว่า ความชันของด้าน EF เท่ากับความชันของด้าน GH

และความชันของด้าน FG เท่ากับ ความชันของด้าน HE

นั่นคือ ด้าน EF ขนานกับด้าน GH และด้าน FG ขนานกับด้าน HE

ดังนั้น จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

แบบฝึกหัด 3.1.5

1. ให้ ℓ_1 แทนเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ m_1 และตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ

จะได้ $\dfrac{3}{4}m_1 = -1$

นั่นคือ $m_1 = -\dfrac{4}{3}$

ดังนั้น เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ มีความชันเท่ากับ $-\dfrac{4}{3}$

2. ให้ ℓ_1 แทนเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ m_1 และตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ

จะได้ $\frac{k}{m}m_1 = -1$

นั่นคือ $m_1 = -\frac{m}{k}$ เมื่อ $k \neq 0$

ดังนั้น เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ มีความชันเท่ากับ $-\frac{m}{k}$ เมื่อ $k \neq 0$

3. ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,4)$ และ $(-3,-5)$

จะได้ $m_1 = \frac{4-(-5)}{3-(-3)} = \frac{3}{2}$

ดังนั้น เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,4)$ และ $(-3,-5)$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{2}{3}$

4. ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4,3)$ และ $(-3,-5)$

จะได้ $m_1 = \frac{3-(-5)}{4-(-3)} = \frac{8}{7}$

และให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,-3)$ และ $(-8,2)$

จะได้ $m_2 = \frac{-3-2}{-2-(-8)} = -\frac{5}{6}$

เนื่องจาก $m_1m_2 = \frac{8}{7} \times \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{20}{21}$ นั่นคือ $m_1m_2 \neq -1$

ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่านจุด $(4,3)$ และ $(-3,-5)$ ไม่ตั้งฉากกับเส้นตรงผ่านจุด $(-2,-3)$ และ $(-8,2)$

5. ให้ m_1 แทนความชันของส่วนของเส้นตรง OP

จะได้ $m_1 = \frac{0-b}{0-a} = \frac{b}{a}$ เมื่อ $a \neq 0$

และให้ m_2 แทนความชันของส่วนของเส้นตรง OQ

จะได้ $m_2 = \frac{0-a}{0-(-b)} = -\frac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$

เนื่องจาก $m_1m_2 = \frac{b}{a} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

ดังนั้น ส่วนของเส้นตรง OP ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง OQ

6. ให้ A มีพิกัดเป็น $(1,6)$

B มีพิกัดเป็น $(8,8)$

C มีพิกัดเป็น $(-7,2)$

จะได้ ความชันของด้าน AB คือ $\frac{6-8}{1-8} = \frac{2}{7}$

ความชันของด้าน BC คือ $\frac{8-2}{8-(-7)} = \frac{2}{5}$

ความชันของด้าน AC คือ $\frac{6-2}{1-(-7)} = \frac{1}{2}$

จะเห็นว่า ผลคูณของความชันของด้าน AB และด้าน BC เท่ากับ $\frac{4}{35}$

ผลคูณของความชันของด้าน AC และด้าน BC เท่ากับ $\frac{1}{5}$

และ ผลคูณของความชันของด้าน AB และด้าน AC เท่ากับ $\frac{1}{7}$

นั่นคือ ไม่มีด้านใดเลยของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่ตั้งฉากกัน

ดังนั้น จุดทั้งสามจุดไม่ได้เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

7. ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(k,7)$ และ $(-3,-2)$

จะได้ $m_1 = \frac{7-(-2)}{k-(-3)} = \frac{9}{k+3}$

และให้ m_2 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,2)$ และ $(1,-4)$

จะได้ $m_2 = \frac{2-(-4)}{3-1} = 3$

เนื่องจาก $m_1m_2 = -1$

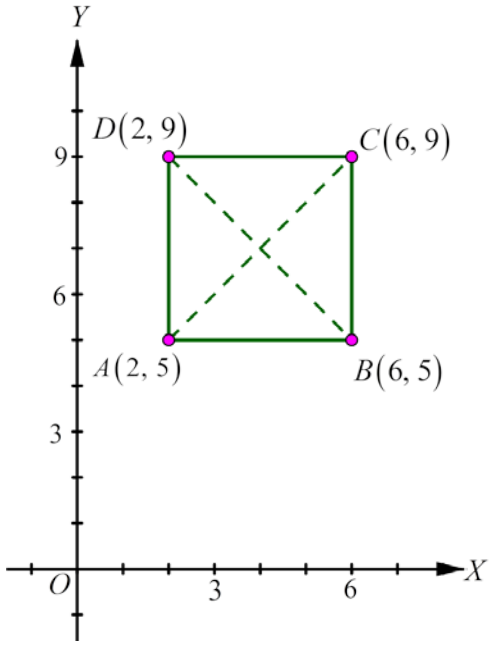
นั่นคือ $\frac{9}{k+3}\times 3 = -1$

$k+3 = -27$

$k = -30$

ดังนั้น ค่าของ k คือ -30

8. ให้ $A(2,5)$, $B(2,9)$, $C(6,9)$ และ $D(6,5)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ โดยมี AC และ BD เป็นเส้นทแยงมุม แสดงได้ดังรูป



จะได้ ความชันของเส้นทแยงมุม AC คือ $\frac{5-9}{2-6}=1$

ความชันของเส้นทแยงมุม BD คือ $\frac{9-5}{2-6}=-1$

จะเห็นว่า ผลคูณของความชันของเส้นทแยงมุม AC และเส้นทแยงมุม BD เท่ากับ -1

ดังนั้น เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมตั้งฉากซึ่งกันและกัน

9. ให้ $A(2,1)$, $B(6,4)$, $C(3,8)$ และ $D(-1,5)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$

จะได้ ความชันของด้าน AB คือ $\frac{1-4}{2-6}=\frac{3}{4}$

ความชันของด้าน BC คือ $\frac{4-8}{6-3}=-\frac{4}{3}$

ความชันของด้าน CD คือ $\frac{8-5}{3-(-1)}=\frac{3}{4}$

ความชันของด้าน DA คือ $\frac{5-1}{-1-2}=-\frac{4}{3}$

จะเห็นว่า ผลคูณของความชันของด้าน AB และด้าน BC เท่ากับ -1

ผลคูณของความชันของด้าน BC และด้าน CD เท่ากับ -1

ผลคูณของความชันของด้าน CD และด้าน DA เท่ากับ -1

ผลคูณของความชันของด้าน DA และด้าน AB เท่ากับ -1

จะได้ว่า ด้าน AB ตั้งฉากกับด้าน BC

ด้าน BC ตั้งฉากกับด้าน CD

ด้าน CD ตั้งฉากกับด้าน DA

และ ด้าน DA ตั้งฉากกับด้าน AB

นั่นคือ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

และ $AB=\sqrt{(2-6)^2+(1-4)^2}=\sqrt{16+9}=5$

$BC=\sqrt{(6-3)^2+(4-8)^2}=\sqrt{9+16}=5$

$CD=\sqrt{(3-(-1))^2+(8-5)^2}=\sqrt{16+9}=5$

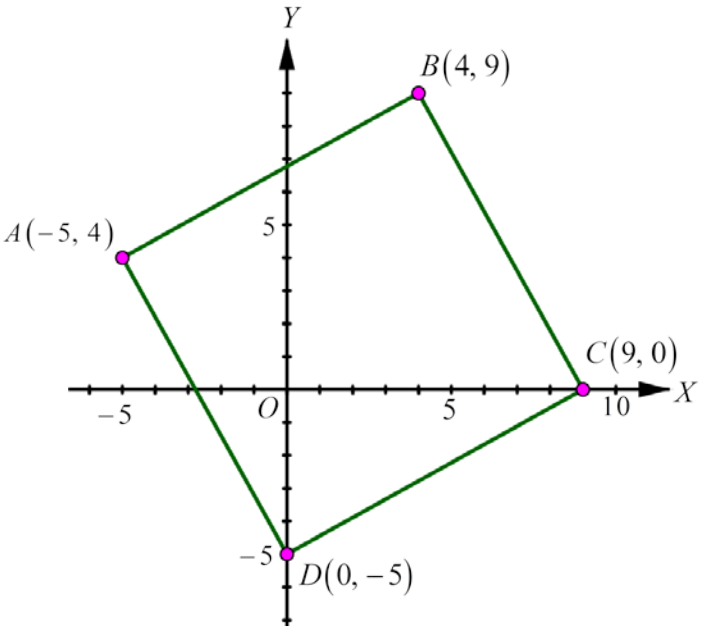
$DA=\sqrt{(-1-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{9+16}=5$

นั่นคือ รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ มีด้านทั้งสี่ด้านยาวเท่ากัน

จะได้ว่า $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ดังนั้น จุดยอดที่กำหนดให้เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีพื้นที่ $5\times5=25$ ตารางหน่วย

10. ให้ $A(-5,4)$, $B(4,9)$, $C(9,0)$ และ $D(0,-5)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ซึ่งแสดงได้ดังรูป



1) $AB=\sqrt{(-5-4)^2+(4-9)^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$

$BC=\sqrt{(4-9)^2+(9-0)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$

$CD=\sqrt{(9-0)^2+(0-(-5))^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$

$DA=\sqrt{(0-(-5))^2+(-5-4)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$

นั่นคือ $AB=BC=CD=DA$

ดังนั้น $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า

2) ความชันของด้าน AB คือ $\frac{4-9}{-5-4}=\frac{5}{9}$

ความชันของด้าน BC คือ $\frac{9-0}{4-9}=-\frac{9}{5}$

ความชันของด้าน CD คือ $\frac{0-(-5)}{9-0}=\frac{5}{9}$

ความชันของด้าน DA คือ $\frac{-5-4}{0-(-5)}=-\frac{9}{5}$

จะเห็นว่า ผลคูณของความชันของด้าน AB และด้าน BC เท่ากับ -1

ผลคูณของความชันของด้าน BC และด้าน CD เท่ากับ -1

ผลคูณของความชันของด้าน CD และด้าน DA เท่ากับ -1

ผลคูณของความชันของด้าน DA และด้าน AB เท่ากับ -1

จะได้ว่า ด้าน AB ตั้งฉากกับด้าน BC

ด้าน BC ตั้งฉากกับด้าน CD

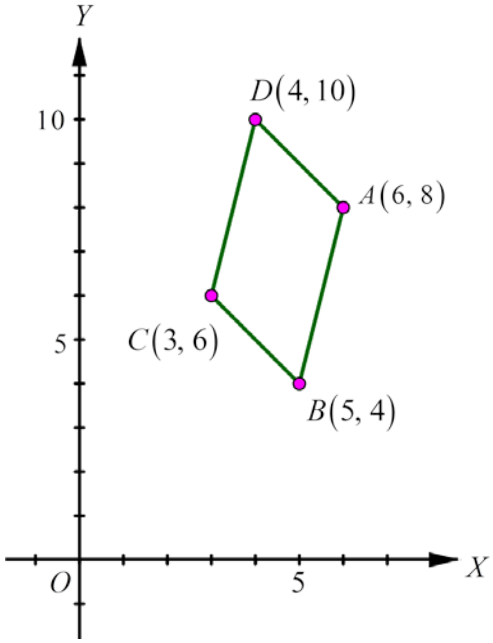
ด้าน CD ตั้งฉากกับด้าน DA

และ ด้าน DA ตั้งฉากกับด้าน AB

นั่นคือ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน

ดังนั้น $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

11. ให้ $A(6,8)$, $B(5,4)$, $C(3,6)$ และ $D(4,10)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ซึ่งแสดงได้ดังรูป



1) ความชันของด้าน AB คือ $\frac{8-4}{6-5}=4$

ความชันของด้าน BC คือ $\frac{4-6}{5-3}=-1$

ความชันของด้าน CD คือ $\frac{6-10}{3-4}=4$

ความชันของด้าน DA คือ $\frac{10-8}{4-6}=-1$

จะได้ว่า ความชันของด้าน AB เท่ากับความชันของด้าน CD

และ ความชันของด้าน BC เท่ากับความชันของด้าน DA

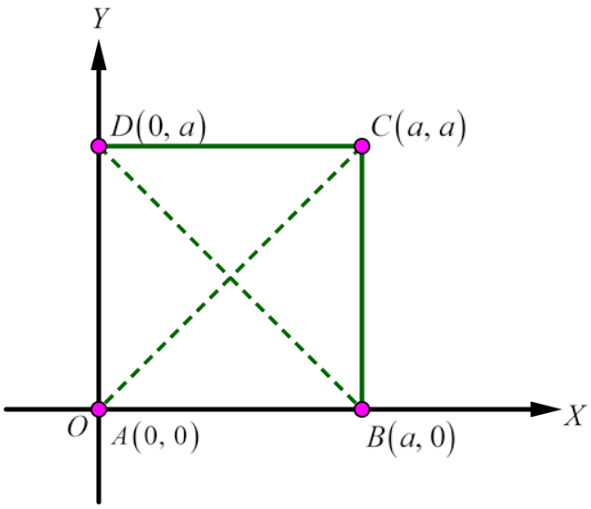
นั่นคือ ด้าน AB ขนานกับด้าน CD และด้าน BC ขนานกับด้าน DA

ดังนั้น $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2) จากข้อ 1) $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และผลคูณของความชันของด้าน AB และด้าน BC ไม่เท่ากับ -1

ดังนั้น $ABCD$ ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

12. ให้ $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$ และ $D(0,a)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ABCD$ ซึ่งแสดงได้ดังรูป



ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นทแยงมุม AC และ BD ตามลำดับ

จะได้ $m_1 = \dfrac{0-a}{0-a} = 1$ และ $m_2 = \dfrac{0-a}{a-0} = -1$

นั่นคือ $m_1 m_2 = -1$

ดังนั้น เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตั้งฉากซึ่งกันและกัน

แบบฝึกหัด 3.1.6

1. 1) $(1,0)$ ไม่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t

เนื่องจาก เมื่อแทน x ด้วย 1 และ y ด้วย 0 ใน $x-2y=4$ แล้วเป็นเท็จ

2) $(-8,6)$ ไม่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t

เนื่องจาก เมื่อแทน x ด้วย -8 และ y ด้วย 6 ใน $x-2y=4$ แล้วเป็นเท็จ

3) $(0,-2)$ เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t

เนื่องจาก เมื่อแทน x ด้วย 0 และ y ด้วย -2 ใน $x-2y=4$ แล้วเป็นจริง

4) $(2,-1)$ เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t

เนื่องจาก เมื่อแทน x ด้วย 2 และ y ด้วย -1 ใน $x-2y=4$ แล้วเป็นจริง

5) $\left(6\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ ไม่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ t

เนื่องจาก เมื่อแทน x ด้วย $6\sqrt{2}$ และ y ด้วย $\sqrt{2}$ ใน $x-2y=4$ แล้วเป็นเท็จ

2. 1) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และอยู่เหนือแกน X เป็นระยะ $\frac{3}{7}$ หน่วย คือ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\middle|\, y=\frac{3}{7}\right\}$

2) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y และอยู่ทางซ้ายแกน Y เป็นระยะ $\frac{2}{3}$ หน่วย คือ $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\middle|\, x=-\frac{2}{3}\right\}$

3) จะมีเส้นตรง ℓ_1 และเส้นตรง ℓ_2 ซึ่งขนานกับแกน X และอยู่ห่างจากจุด $(0,3)$ เป็นระยะ 4 หน่วย

จะได้ว่าเส้นตรง ℓ_1 อยู่เหนือแกน X เป็นระยะ $|3+4|=7$ หน่วย

และเส้นตรง ℓ_2 อยู่ใต้แกน X เป็นระยะ $|3-4|=1$ หน่วย

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และอยู่ห่างจากจุด $(0,3)$ เป็นระยะ 4 หน่วย คือ $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y=7\}$ และ $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid y=-1\}$

4) จะมีเส้นตรง ℓ_1 และเส้นตรง ℓ_2 ซึ่งขนานกับแกน Y และอยู่ห่างจากจุด $(-2,0)$ เป็นระยะ 5 หน่วย

จะได้ว่าเส้นตรง ℓ_1 อยู่ทางขวาแกน Y เป็นระยะ $|-2+5|=3$ หน่วย

และเส้นตรง ℓ_2 อยู่ทางซ้ายแกน Y เป็นระยะ $|-2-5|=7$ หน่วย

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และอยู่ห่างจากจุด $(-2,0)$ เป็นระยะ 5 หน่วย คือ $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x=3\}$ และ $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x=-7\}$

3. ความชัน ระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y ของกราฟของสมการที่กำหนดให้เป็นดังนี้

สมการ	ความชัน	ระยะตัดแกน X	ระยะตัดแกน Y
1) $2x-3y=7$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{3}$
2) $5x+4y-2=0$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$
3) $x-4y+5=0$	$\frac{1}{4}$	-5	$\frac{5}{4}$
4) $3x+2y+7=0$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{7}{2}$
5) $5x-y-11=0$	5	$\frac{11}{5}$	-11
6) $\frac{3}{4}x-\frac{4}{3}y=24$	$\frac{9}{16}$	32	-18
7) $x-y=0$	1	0	0
8) $2y+3=0$	0	ไม่ตัดแกน X	$-\frac{3}{2}$
9) $x=4$	ไม่นิยาม	4	ไม่ตัดแกน Y
10) $3(y-1)=-2(x-2)$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$

4. เขียน $3y = 2x - 6$ ให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ ได้เป็น $y = \frac{2}{3}x - 2$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $\frac{2}{3}$

จะเห็นว่ามีความชันเท่ากับความชันของเส้นตรง $y = \frac{2}{3}x + 1$

ดังนั้น เส้นตรง $3y = 2x - 6$ ขนานกับ เส้นตรง $y = \frac{2}{3}x + 1$

5. เขียน $2x + y = 8$ ให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ ได้เป็น $y = -2x + 8$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงนี้ คือ -2

และเส้นตรง $y = \frac{1}{2}x - 5$ มีความชันเท่ากับ $\frac{1}{2}$

จะเห็นว่าผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1

ดังนั้น เส้นตรง $2x + y = 8$ ตั้งฉากกับ เส้นตรง $y = \frac{1}{2}x - 5$

6. เขียน $x + 2y + 12 = 0$ ให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ ได้เป็น $y = -\frac{1}{2}x - 6$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $-\frac{1}{2}$

จะได้ว่า เส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $x + 2y + 12 = 0$ จะมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{2}$

ให้ $y - y_1 = m(x - x_1)$ เป็นสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(7,5)$ และขนานกับ

เส้นตรง $x + 2y + 12 = 0$

นั่นคือ $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 7)$ ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ได้เป็น $x + 2y - 17 = 0$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(7,5)$ และขนานกับเส้นตรง $x + 2y + 12 = 0$

คือ $x + 2y - 17 = 0$

7. เขียน $3x-2y+12=0$ ให้อยู่ในรูป $y=mx+c$ ได้เป็น $y=\frac{3}{2}x+6$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $\frac{3}{2}$

จะได้ว่า เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $3x-2y+12=0$ จะมีความชันเท่ากับ $-\frac{2}{3}$

ให้ $y-y_1=m(x-x_1)$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,2)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง

$3x-2y+12=0$

นั่นคือ $y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$ ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูป $Ax+By+C=0$ ได้เป็น $2x+3y-12=0$

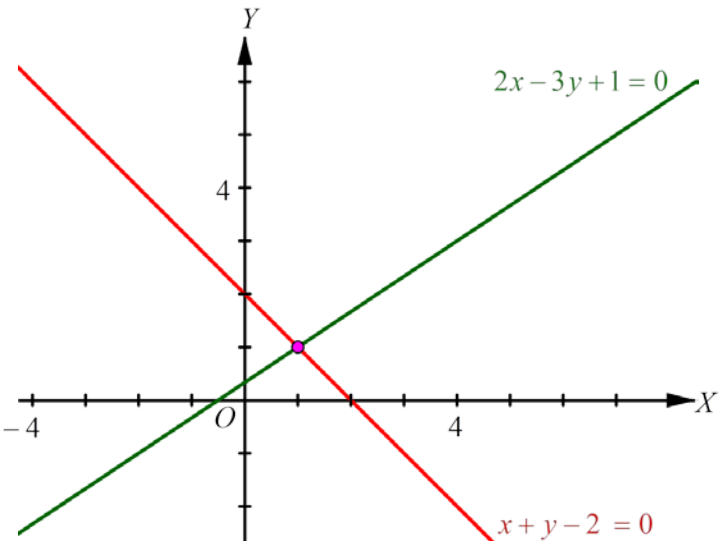
ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,2)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x-2y+12=0$ คือ

$2x+3y-12=0$

8. เส้นตรง $2x-3y+1=0$ ตัดแกน X ที่จุด $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ และตัดแกน Y ที่จุด $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

เส้นตรง $x+y-2=0$ ตัดแกน X ที่จุด $(2,0)$ และตัดแกน Y ที่จุด $(0,2)$

จะได้กราฟของเส้นตรง $2x-3y+1=0$ และ $x+y-2=0$ ดังนี้



หาจุดตัดของกราฟทั้งสอง ดังนี้

จาก $x+y-2=0$ เขียนใหม่ได้เป็น $y=2-x$

แทน y ด้วย $2-x$ ในสมการ $2x-3y+1=0$

นั่นคือ $2x-3(2-x)+1=0$

จะได้ $x=1$

แทน x ด้วย 1 ใน $y=2-x$ จะได้ $y=1$

ดังนั้น จุดตัดของกราฟทั้งสองคือ $(1,1)$

9. 1) เส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2)$ และ $(-3,4)$ มีความชันเท่ากับ $\frac{2-4}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}$

ให้ $y-y_1=m(x-x_1)$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,0)$ และมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{2}$

นั่นคือ $y=-\frac{1}{2}(x+1)$ หรือเขียนให้อยู่ในรูป $Ax+By+C=0$ ได้เป็น $x+2y+1=0$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,0)$ และขนานกับ

เส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2)$ และ $(-3,4)$ คือ $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+2y+1=0\}$

2) เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,3)$ และ $(-2,-2)$ มีความชันเท่ากับ $\frac{3-(-2)}{-1-(-2)}=5$

ให้ $y-y_1=m(x-x_1)$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,-4)$ และมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{5}$

นั่นคือ $y+4=-\frac{1}{5}(x+1)$ หรือเขียนให้อยู่ในรูป $Ax+By+C=0$ ได้เป็น $x+5y+21=0$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,-4)$ และตั้งฉากกับ

เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,3)$ และ $(-2,-2)$ คือ $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+5y+21=0\}$

3) ให้ (x,y) เป็นพิกัดของจุดที่อยู่ห่างจากจุด $(6,0)$ และ $(2,0)$ เป็นระยะที่เท่ากัน

จะได้
$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-6)^2+(y-0)^2} &= \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} \\
(x-6)^2+y^2 &= (x-2)^2+y^2 \\
(x-6)^2-(x-2)^2 &= 0 \\
\left[(x-6)-(x-2)\right]\left[(x-6)+(x-2)\right] &= 0 \\
-8(x-4) &= 0
\end{aligned}$$

นั่นคือ $x = 4$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่จุดทุกจุดบนเส้นตรงอยู่ห่างจากจุด $(6,0)$ และ $(2,0)$ เป็นระยะเท่ากันคือ $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x=4\}$

10. เขียน $x-7y-11=0$ ให้อยู่ในรูป $y=mx+c$ ได้เป็น $y=\frac{1}{7}x-\frac{11}{7}$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $\frac{1}{7}$

จะได้ว่า เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $x-7y-11=0$ จะมีความชันเท่ากับ -7

หาจุดตัดของกราฟเส้นตรง $x-7y-11=0$ และ $3x+5y-7=0$ ดังนี้

จาก $x-7y-11=0$ เขียนใหม่ได้เป็น $x=7y+11$

แทน x ด้วย $7y+11$ ในสมการ $3x+5y-7=0$

นั่นคือ $3(7y+11)+5y-7=0$

จะได้ $y=-1$

แทน y ด้วย -1 ใน $x=7y+11$ จะได้ $x=4$

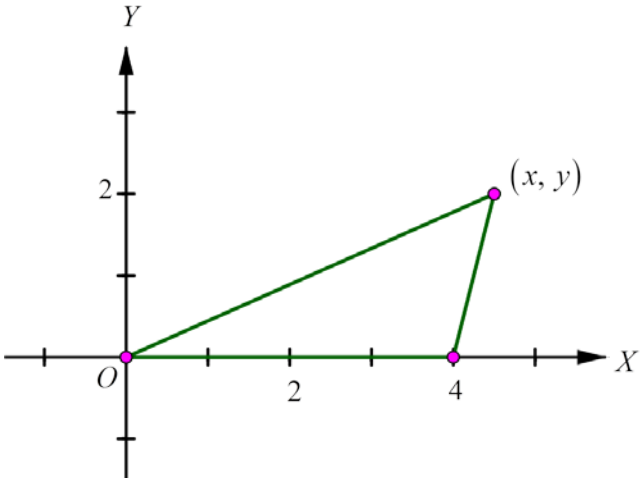
นั่นคือ จุดตัดของกราฟทั้งสองคือ $(4,-1)$

ให้ $y-y_1=m(x-x_1)$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4,-1)$ และมีความชันเป็น -7

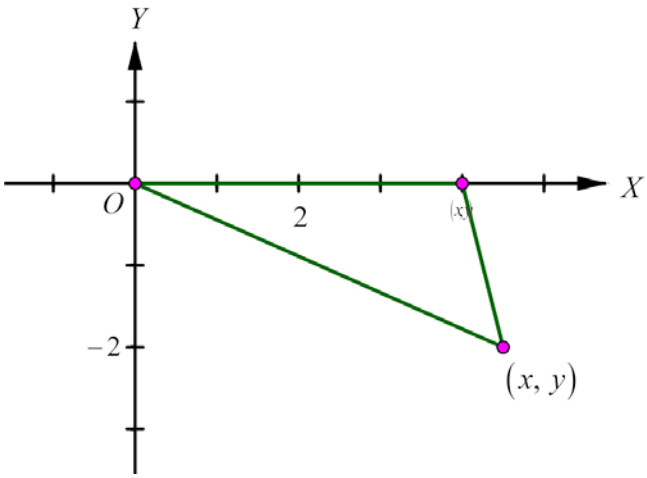
นั่นคือ $y+1=-7(x-4)$ หรือเขียนให้อยู่ในรูป $Ax+By+C=0$ ได้เป็น $7x+y-27=0$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $x-7y-11=0$ และผ่านจุดตัด คือ $7x+y-27=0$

11. ให้ $(0,0)$, $(4,0)$ และ (x,y) เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ 4 ตารางหน่วย ซึ่งแสดงได้ดังรูป



หรือ



เนื่องจาก พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับ $\frac{1}{2}\times$ฐาน$\times$สูง

จะได้ $4 = \frac{1}{2}\times 4\times$สูง

นั่นคือ ความสูงเท่ากับ 2 หน่วย

ดังนั้น คู่อันดับของ (x,y) ที่เป็นได้คือ $(x,2)$ หรือ $(x,-2)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

12. เขียนสมการเส้นตรงที่กำหนดให้ให้อยู่ในรูป $y=mx+c$

จะได้ $5x-3y+17=0$ เป็น $y=\frac{5}{3}x+\frac{17}{3}$ ซึ่งเป็นเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{5}{3}$

$3x+5y-6=0$ เป็น $y=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}$ ซึ่งเป็นเส้นตรงที่มีความชัน $-\frac{3}{5}$

$5x-3y-8=0$ เป็น $y=\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}$ ซึ่งเป็นเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{5}{3}$

และ $3x+5y+4=0$ เป็น $y=-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}$ ซึ่งเป็นเส้นตรงที่มีความชัน $-\frac{3}{5}$

จะเห็นว่า เส้นตรง $5x-3y+17=0$ ขนานกับเส้นตรง $5x-3y-8=0$

เส้นตรง $3x+5y-6=0$ ขนานกับเส้นตรง $3x+5y+4=0$

เส้นตรง $5x-3y+17=0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $3x+5y-6=0$

และ เส้นตรง $5x-3y-8=0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $3x+5y+4=0$

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของกราฟดังกล่าวเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

13. เขียน $ax+by=d_1$ ให้อยู่ในรูป $y=mx+c$ ได้เป็น $y=-\frac{a}{b}x+\frac{d_1}{b}$ เมื่อ $b\neq 0$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $-\frac{a}{b}$ เมื่อ $b\neq 0$

และเขียน $ax+by=d_2$ ให้อยู่ในรูป $y=mx+c$ ได้เป็น $y=-\frac{a}{b}x+\frac{d_2}{b}$ เมื่อ $b\neq 0$

ดังนั้น ความชันของเส้นตรงนี้ คือ $-\frac{a}{b}$ เมื่อ $b\neq 0$

เนื่องจากความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน

ดังนั้น เส้นตรงทั้งสองขนานกัน

แบบฝึกหัด 3.1.7

1. 1) จาก $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ในที่นี้ $A = 6,\ B = -8,\ C = 4,\ x_1 = 2$ และ $y_1 = -3$

โดยการแทนค่า จะได้ $d = \dfrac{|(6)(2)+(-8)(-3)+4|}{\sqrt{(6)^2+(-8)^2}} = \dfrac{|12+24+4|}{\sqrt{36+64}} = 4$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $6x-8y+4=0$ กับจุด $(2,-3)$ เป็น 4 หน่วย

2) จาก $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ในที่นี้ $A = 4,\ B = 3,\ C = -8,\ x_1 = 0$ และ $y_1 = 6$

โดยการแทนค่า จะได้ $d = \dfrac{|(4)(0)+(3)(6)+(-8)|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \dfrac{|0+18-8|}{\sqrt{16+9}} = 2$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $4x+3y-8=0$ กับจุด $(0,6)$ เป็น 2 หน่วย

3) จาก $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ในที่นี้ $A = 2,\ B = 3,\ C = -13,\ x_1 = 0$ และ $y_1 = 0$

โดยการแทนค่า จะได้ $d = \dfrac{|(2)(0)+(3)(0)+(-13)|}{\sqrt{(2)^2+(3)^2}} = \dfrac{|-13|}{\sqrt{4+9}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $2x+3y=13$ กับจุด $(0,0)$ เป็น $\sqrt{13}$ หน่วย

4) เขียน $y-4=\dfrac{7}{5}(x-3)$ ให้อยู่ในรูป $Ax+By+C=0$ ได้เป็น $7x-5y-1=0$

จาก $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ในที่นี้ $A = 7,\ B = -5,\ C = -1,\ x_1 = 8$ และ $y_1 = 11$

โดยการแทนค่า จะได้ $d = \dfrac{|(7)(8)+(-5)(11)+(-1)|}{\sqrt{(7)^2+(-5)^2}} = \dfrac{|56-55-1|}{\sqrt{49+25}} = 0$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $y-4=\frac{7}{5}(x-3)$ กับจุด $(8,11)$ เป็น 0 หน่วย

5) เขียน $y=1$ ให้อยู่ในรูป $Ax+By+C=0$ ได้เป็น $y-1=0$

จาก $d = \dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ในที่นี้ $A=0,\ B=1,\ C=-1,\ x_1=-1$ และ $y_1=1$

โดยการแทนค่า จะได้ $d = \dfrac{|(0)(-1)+(1)(1)+(-1)|}{\sqrt{(0)^2+(1)^2}} = \dfrac{|0+1-1|}{\sqrt{0+1}} = 0$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $y=1$ กับจุด $(-1,1)$ เป็น 0 หน่วย

2. 1) เส้นตรง $3x+4y-7=0$ มีความชันเท่ากับเส้นตรง $3x+4y+3=0$

นั่นคือ เส้นตรงทั้งสองขนานกัน

จาก $d = \dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

จะได้ $d = \dfrac{|(-7)-3|}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x+4y-7=0$ และเส้นตรง $3x+4y+3=0$

เท่ากับ 2 หน่วย

2) เนื่องจากเส้นตรง $3x-4y-7=0$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $6x-8y-14=0$

และมีความชันเท่ากับเส้นตรง $6x-8y+16=0$

นั่นคือ เส้นตรงทั้งสองขนานกัน

จาก $d = \dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

จะได้ $d = \dfrac{|(-14)-16|}{\sqrt{(6)^2+(8)^2}} = \dfrac{30}{10} = 3$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x-4y-7=0$ และเส้นตรง $6x-8y+16=0$

เท่ากับ 3 หน่วย

3) เนื่องจาก เส้นตรง $5x+12y-15=0$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $10x+24y-30=0$

และมีความชันเท่ากับเส้นตรง $10x+24y+9=0$

นั่นคือ เส้นตรงทั้งสองขนานกัน

จาก $d = \dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

จะได้ $d = \dfrac{|(-30)-9|}{\sqrt{(10)^2+(24)^2}} = \dfrac{39}{\sqrt{676}} = \dfrac{3}{2}$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $5x+12y-15=0$ และเส้นตรง $10x+24y+9=0$

เท่ากับ $\dfrac{3}{2}$ หน่วย

4) เนื่องจาก เส้นตรง $x-y-3=0$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $3x-3y-9=0$

และมีความชันเท่ากับเส้นตรง $3x-3y+7=0$

นั่นคือ เส้นตรงทั้งสองขนานกัน

จาก $d = \dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

จะได้ $d = \dfrac{|(-9)-7|}{\sqrt{(3)^2+(-3)^2}} = \dfrac{16}{\sqrt{18}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $x-y-3=0$ และเส้นตรง $3x-3y+7=0$

เท่ากับ $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ หน่วย

5) เนื่องจากเส้นตรง $7-3x-y=0$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $3x+y-7=0$

และมีความชันเท่ากับเส้นตรง $3x+y+5=0$

นั่นคือ เส้นตรงทั้งสองขนานกัน

จาก $d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

จะได้ $d = \dfrac{|(-7)-5|}{\sqrt{(3)^2+(1)^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{10}} = \dfrac{6\sqrt{10}}{5}$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x+y+5=0$ และเส้นตรง $7-3x-y=0$

เท่ากับ $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$ หน่วย

3. เส้นตรง $3x-4y-5=0$ มีความชันเท่ากับ $\dfrac{3}{4}$

จะได้ว่า เส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $3x-4y-5=0$ จะมีความชันเท่ากับ $\dfrac{3}{4}$

ให้เส้นตรงดังกล่าวมีสมการอยู่ในรูป $3x-4y+C_2=0$ เมื่อ C_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จาก $d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ในที่นี้ $A=3,\ B=-4,\ C_1=-5$ และ $d=1$

โดยการแทนค่า จะได้ $1 = \dfrac{|(-5)-C_2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$1 = \dfrac{|(-5)-C_2|}{5}$

$|(-5)-C_2| = 5$

นั่นคือ $-5-C_2 = 5$ หรือ $5+C_2 = 5$

จะได้ $C_2 = -10$ หรือ $C_2 = 0$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $3x-4y-5=0$ และอยู่ห่างจากเส้นตรงนี้ 1 หน่วย

คือ $3x-4y-10=0$ และ $3x-4y=0$

4. เส้นตรง $4x-3y+26=0$ มีความชันเท่ากับ $\frac{4}{3}$

จะได้ว่า เส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $4x-3y+26=0$ จะมีความชันเท่ากับ $\frac{4}{3}$

ให้เส้นตรงดังกล่าวมีสมการอยู่ในรูป $4x-3y+C_2=0$ เมื่อ C_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จาก $d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ในที่นี้ $A=4,\ B=-3,\ C=C_2,\ x_1=8,\ y_1=8$ และ $d=2$

โดยการแทนค่า จะได้

$$2 = \frac{|(4)(8)+(-3)(8)+C_2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$$2 = \frac{|32-24+C_2|}{5}$$

$$|8+C_2| = 10$$

นั่นคือ $8+C_2 = 10$ หรือ $-(8+C_2) = 10$

จะได้ $C_2 = 2$ หรือ $C_2 = -18$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $4x-3y+26=0$ และอยู่ห่างจากจุด $(8,8)$

เป็นระยะ 2 หน่วย คือ $4x-3y+2=0$ และ $4x-3y-18=0$

5. เส้นตรง $12y=5x-7$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $-5x+12y+7=0$ มีความชันเท่ากับ $\frac{5}{12}$

จะได้ว่า เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $-5x+12y+7=0$ จะมีความชันเท่ากับ $-\frac{12}{5}$

ให้เส้นตรงดังกล่าวมีสมการอยู่ในรูป $12x+5y+C_2=0$ เมื่อ C_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จาก $d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ในที่นี้ $A=12,\ B=5,\ C=C_2,\ x_1=-1,\ y_1=2$ และ $d=3$

โดยการแทนค่า จะได้ $3 = \dfrac{\left|(12)(-1)+(5)(2)+C_2\right|}{\sqrt{(12)^2+(-5)^2}}$

$$3 = \frac{\left|-2+C_2\right|}{13}$$

$$\left|C_2-2\right| = 39$$

นั่นคือ $C_2-2 = 39$ หรือ $-(C_2-2) = 39$

จะได้ $C_2 = 41$ หรือ $C_2 = -37$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $12y=5x-7$ และอยู่ห่างจากจุด $(-1,2)$ เป็นระยะ 3 หน่วย คือ $12x+5y+41=0$ และ $12x+5y-37=0$

6. เส้นตรง $12x-5y-10=0$ มีความชันเท่ากับ $\dfrac{12}{5}$

จะได้ว่า เส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $12x-5y-10=0$ จะมีความชันเท่ากับ $\dfrac{12}{5}$

เนื่องจากเส้นตรง $12x-5y-10=0$ อยู่กึ่งกลางระหว่างเส้นขนานคู่หนึ่ง

ให้สมการ $12x-5y+C_2=0$ เมื่อ C_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ เป็นเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงที่โจทย์กำหนด และอยู่ห่างจากเส้นตรงนี้เป็นระยะ 4 หน่วย

จาก $d = \dfrac{\left|C_1-C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ในที่นี้ $A=12,\ B=-5,\ C_1=-10$ และ $d=4$

โดยการแทนค่า จะได้ $4 = \dfrac{\left|(-10)-C_2\right|}{\sqrt{(12)^2+(-5)^2}}$

$$4 = \frac{\left|-10-C_2\right|}{13}$$

$$\left|-10-C_2\right| = 52$$

นั่นคือ $-10-C_2 = 52$ หรือ $10+C_2 = 52$

จะได้ $C_2 = -62$ หรือ $C_2 = 42$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ขนานกันและมีเส้นตรง $12x-5y-10=0$ อยู่กึ่งกลางและมีระยะห่าง 8 หน่วย คือ $12x-5y-62=0$ และ $12x-5y+42=0$

แบบฝึกหัด 3.2.1

1. **วิธีที่ 1** จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

เนื่องจาก จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด $(-3, 2)$

นั่นคือ แทน h และ k ด้วย -3 และ 2 ตามลำดับ

จะได้ $$(x-(-3))^2+(y-2)^2 = r^2$$

$$(x+3)^2+(y-2)^2 = r^2$$

เนื่องจากวงกลมผ่านจุด $(7, 4)$

นั่นคือแทน x และ y ด้วย 7 และ 4 ตามลำดับ

จะได้ $$(7+3)^2+(4-2)^2 = r^2$$

$$10^2+2^2 = r^2$$

$$r^2 = 100+4$$

$$r^2 = 104$$

$$r = 2\sqrt{26}$$

ดังนั้น วงกลมนี้มีรัศมียาว $2\sqrt{26}$ หน่วย

วิธีที่ 2 เนื่องจาก วงกลมวงนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-3,2)$ และผ่านจุด $(7,4)$ จะได้ว่า ความยาวของรัศมีของวงกลมนี้หาได้จาก

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-3-7)^2+(2-4)^2} \\ &= \sqrt{104} \\ &= 2\sqrt{26} \end{aligned}$$

ดังนั้น วงกลมนี้มีรัศมียาว $2\sqrt{26}$ หน่วย

2. **วิธีที่ 1** เนื่องจากวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4,-3)$ และมีแกน X เป็นเส้นสัมผัส (นั่นคือ สมการเส้นสัมผัสคือ $y=0$) จะได้ว่า รัศมีของวงกลมนี้ คือระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลาง $(4,-3)$ กับเส้นตรง $y=0$

นั่นคือ
$$r = \frac{|0(4)+1(-3)+0|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

$$r = 3$$

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

แทน h, k และ r ด้วย $4, -3$ และ 3 ตามลำดับ

จะได้
$$(x-4)^2+(y-(-3))^2 = 3^2$$

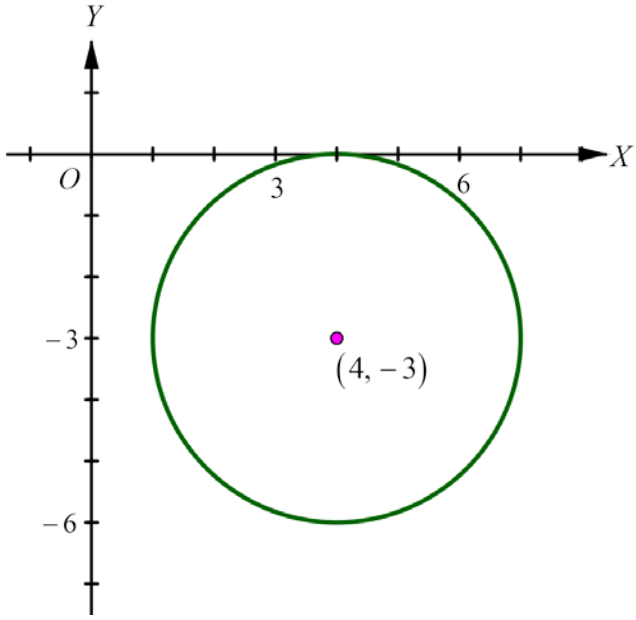
$$(x-4)^2+(y+3)^2 = 9$$

จุดสัมผัสของวงกลมกับเส้นตรง $y=0$ หาได้โดยแทน y ด้วย 0 ใน $(x-4)^2+(y+3)^2=9$

จะได้
$$\begin{aligned} (x-4)^2+(0+3)^2 &= 9 \\ (x-4)^2+9 &= 9 \\ (x-4)^2 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดสัมผัสของวงกลมนี้อยู่ที่ $(4, 0)$

วิธีที่ 2 วาดรูปแสดงวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4,-3)$ และมีแกน X เป็นเส้นสัมผัสได้ดังนี้



จากรูป จะได้ว่าจุดสัมผัสของวงกลมนี้อยู่ที่ $(4, 0)$

3. เนื่องจาก วงกลมวงนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(3,4)$ และผ่านจุด $(6,8)$

จะได้ว่า ความยาวของรัศมีของวงกลมนี้หาได้จาก

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(6-3)^2+(8-4)^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น วงกลมนี้มีรัศมียาว 5 หน่วย

จะได้ สมการของวงกลมนี้ คือ $(x-3)^2+(y-4)^2 = 25$

เมื่อแทน x และ y ด้วย 0 และ 0 ตามลำดับ

จะได้ $$(0-3)^2+(0-4)^2 = 25$$

$$(-3)^2+(-4)^2 = 25$$

$$9+16 = 25$$

$$25 = 25 \quad \text{ซึ่งเป็นจริง}$$

ดังนั้น จุด $(0, 0)$ อยู่บนวงกลมนี้

4. ให้ (h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้

เนื่องจากจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมเป็น $(1, 3)$ และ $(7, 11)$

จะได้ (h, k) เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง $(1, 3)$ และ $(7, 11)$

นั่นคือ $h = \frac{1+7}{2} = 4$

และ $k = \frac{3+11}{2} = 7$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมนี้คือ $(4, 7)$

การหาความยาวรัศมีของวงกลมนี้ สามารถทำได้หลายวิธี เช่น

วิธีที่ 1 หาระยะห่างระหว่างจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมนี้

เนื่องจากจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางคือ $(1, 3)$ และ $(7, 11)$

จะได้ เส้นผ่านศูนย์กลางยาว

$$\sqrt{(1-7)^2+(3-11)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \text{ หน่วย}$$

ดังนั้น วงกลมนี้มีรัศมียาว 5 หน่วย

วิธีที่ 2 แทนพิกัดของจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางจุดใดจุดหนึ่งลงใน

$$(x-4)^2+(y-7)^2 = r^2$$

ในที่นี้แทน x และ y ด้วย 1 และ 3 ตามลำดับ

จะได้ $$(1-4)^2+(3-7)^2 = r^2$$

$$(-3)^2+(-4)^2 = r^2$$

$$r^2 = 9+16$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5$$

ดังนั้น วงกลมนี้มีรัศมียาว 5 หน่วย

จะได้ว่า สมการวงกลมนี้ คือ $(x-4)^2+(y-7)^2 = 25$

5. จาก $x^2+y^2+2x-6y-54 = 0$

จะได้ $x^2+y^2+2x-6y = 54$

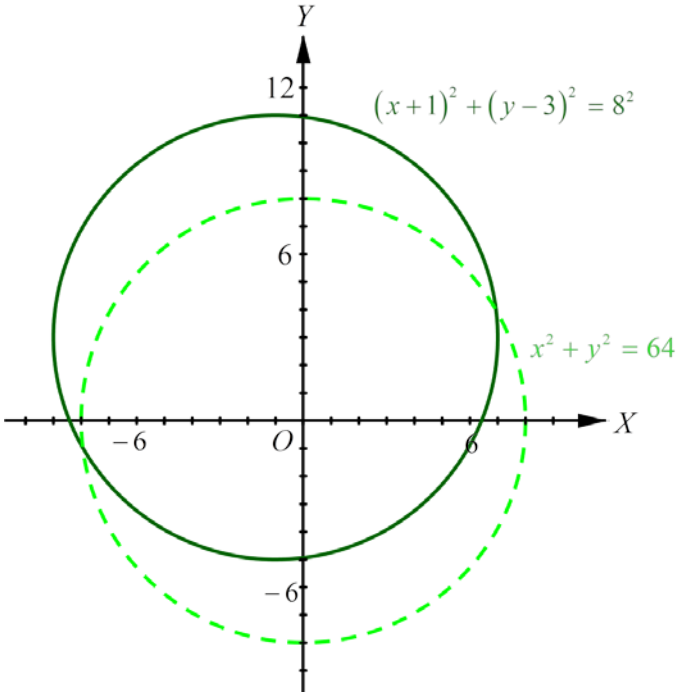
$$\left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2-6y+9\right) = 64$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2 = 8^2$$

นั่นคือ สมการ $x^2+y^2+2x-6y-54=0$ เขียนให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ได้เป็น $(x+1)^2+(y-3)^2 = 8^2$ ซึ่งเป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1, 3)$ และมีรัศมียาว 8 หน่วย

จะได้ว่า วงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากับวงกลมนี้ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีสมการเป็น $x^2+y^2 = 64$

ดังนั้น ต้องเลื่อนขนานกราฟของ $x^2+y^2 = 64$ ไปทางซ้าย 1 หน่วย และเลื่อนขึ้นบน 3 หน่วย จึงจะได้กราฟของ $(x+1)^2+(y-3)^2 = 8^2$



6. จาก $x^2+(y-5)^2 = 10$

จะได้ $(x-0)^2+(y-5)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จะได้ $h=0, k=5$ และ $r=\sqrt{10}$

นั่นคือ วงกลมนี้มีรัศมียาว $\sqrt{10}$ หน่วย

ดังนั้น จากที่ต้นข้าวกล่าวว่า วงกลมซึ่งมีสมการ $x^2+(y-5)^2=10$ มีรัศมียาว 10 หน่วย นั้น ต้นข้าวเข้าใจผิด เพราะจริง ๆ แล้ววงกลมนี้มีรัศมียาว $\sqrt{10}$ หน่วย

7. 1) จากกราฟ จะได้ว่าวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมียาว 3 หน่วย

ดังนั้น สมการในรูปแบบมาตรฐานของกราฟนี้ คือ $x^2+y^2=9$

2) จากกราฟ จะได้ว่าวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-4,-3)$ และมีรัศมียาว 3 หน่วย

ดังนั้น สมการในรูปแบบมาตรฐานของกราฟนี้ คือ $(x+4)^2+(y+3)^2=9$

8. 1) จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

แทน h, k และ r ด้วย $2, -1$ และ 3 ตามลำดับ

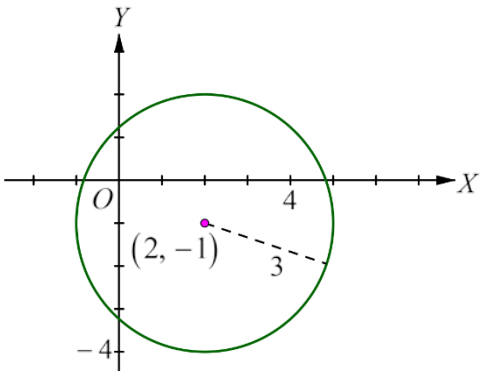
จะได้ $$(x-2)^2+(y-(-1))^2 = 3^2$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2 = 9$$

ดังนั้น สมการวงกลมนี้ คือ $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ หรือ $x^2+y^2-4x+2y-4=0$

และเขียนวงกลมได้ดังนี้

2) จากกราฟ จะได้ว่าวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-4,-3)$ และมีรัศมียาว 3 หน่วย



2) จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

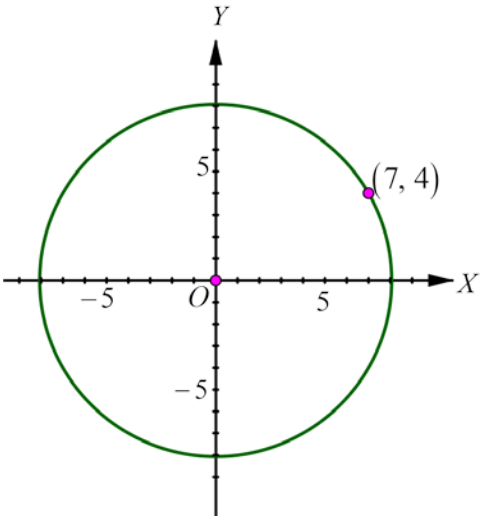
เนื่องจากจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด นั่นคือแทน h และ k ด้วย 0 และ 0 ตามลำดับ

จะได้ $$(x-0)^2+(y-0)^2 = r^2$$

เนื่องจากวงกลมผ่านจุด $(7, 4)$ นั่นคือแทน x และ y ด้วย 7 และ 4 ตามลำดับ

จะได้
$$(7-0)^2+(4-0)^2 = r^2$$
$$7^2+4^2 = r^2$$
$$r^2 = 49+16$$
$$r^2 = 65$$

ดังนั้น สมการวงกลมนี้ คือ $x^2+y^2=65$ และเขียนวงกลมได้ดังนี้



3) จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม
$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

เนื่องจากจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1,5)$ นั่นคือแทน h และ k ด้วย -1 และ 5 ตามลำดับ

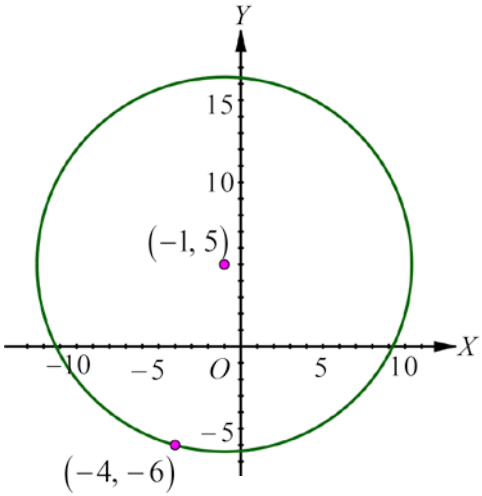
จะได้
$$(x-(-1))^2+(y-5)^2 = 5$$
$$(x+1)^2+(y-5)^2 = 5$$

เนื่องจากวงกลมผ่านจุด $(-4,-6)$ นั่นคือแทน x และ y ด้วย -4 และ -6 ตามลำดับ

จะได้ $$\begin{aligned}((-4)+1)^2+((-6)-5)^2 &= -5\\ (-3)^2+(-11)^2 &= -5\\ -5 &= 9+121\\ -5 &= 130\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการวงกลมนี้ คือ $(x+1)^2+(y-5)^2=130$ หรือ $x^2+y^2+2x-10y-104=0$

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



4) ให้ (h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้

เนื่องจากจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมเป็น $(-1, 3)$ และ $(7, -5)$

จะได้ (h, k) เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง $(-1, 3)$ และ $(7, -5)$

นั่นคือ $$h=\frac{(-1)+7}{2}=3$$

$$k=\frac{3+(-5)}{2}=-1$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมนี้คือ $(3, -1)$

แทนพิกัดของจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางจุดใดจุดหนึ่งใน

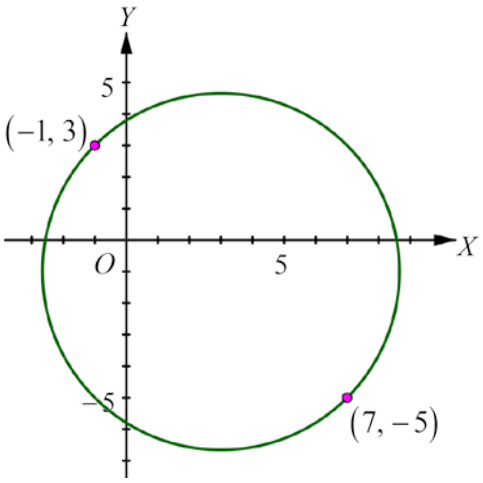
$$(x-3)^2+(y+1)^2 = r^2$$

ในที่นี้ แทน x และ y ด้วย -1 และ 3 ตามลำดับ

จะได้
$$((-1)-3)^2+(3+1)^2 = r^2$$
$$(-4)^2+4^2 = r^2$$
$$r^2 = 16+16$$
$$r^2 = 32$$

ดังนั้น สมการวงกลมนี้ คือ $(x-3)^2+(y+1)^2=32$ หรือ $x^2+y^2-6x+2y-22=0$

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



5) เนื่องจากวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(7,-3)$ และมีแกน X เป็นเส้นสัมผัส

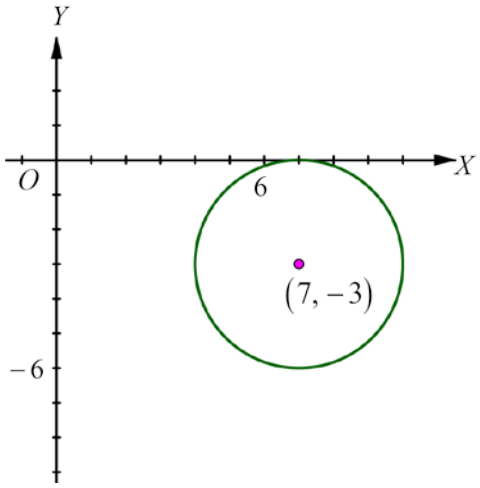
(นั่นคือ สมการเส้นสัมผัสคือ $y=0$)

จะได้รัศมีของวงกลมนี้ คือระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลาง $(7,-3)$ กับเส้นตรง $y=0$

นั่นคือ
$$r = \frac{|0(7)+1(-3)+0|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$
$$r = 3$$

ดังนั้น สมการวงกลมนี้ คือ $(x-7)^2+(y+3)^2=9$ หรือ $x^2+y^2-14x+6y+49=0$

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



6) ให้ (h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้

เนื่องจากวงกลมนี้สัมผัสแกน X และแกน Y และมีรัศมียาว 5 หน่วย

จะได้ว่า ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับแกน X และระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับแกน Y เท่ากับ 5 หน่วย

พิจารณาระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับแกน X (เส้นตรง $y=0$)

จะได้ $$\frac{|0(h)+1(k)+0|}{\sqrt{0^2+1^2}} = 5$$

$$|k| = 5$$

เนื่องจากวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 1

จะได้ $$k = 5$$

พิจารณาระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางกับแกน Y (เส้นตรง $x=0$)

จะได้ $$\frac{|1(h)+0(k)+0|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 5$$

$$|h| = 5$$

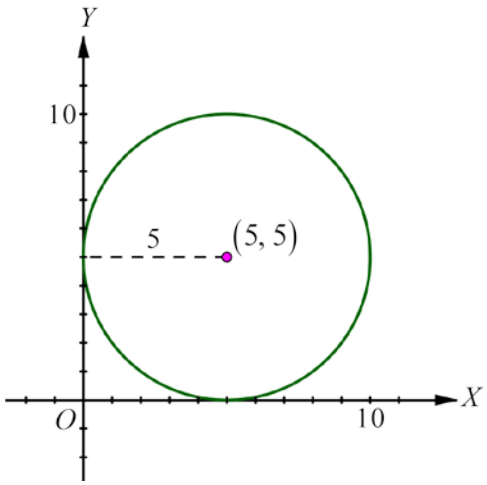
เนื่องจากวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 1

จะได้ $$h = 5$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางของวงกลมนี้อยู่ที่จุด $(5, 5)$

ดังนั้น สมการวงกลมนี้ คือ $(x-5)^2+(y-5)^2 = 25$ หรือ $x^2+y^2-10x-10y+25=0$

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



9. 1) จาก $$(x-2)^2+(y-4)^2 = 9$$

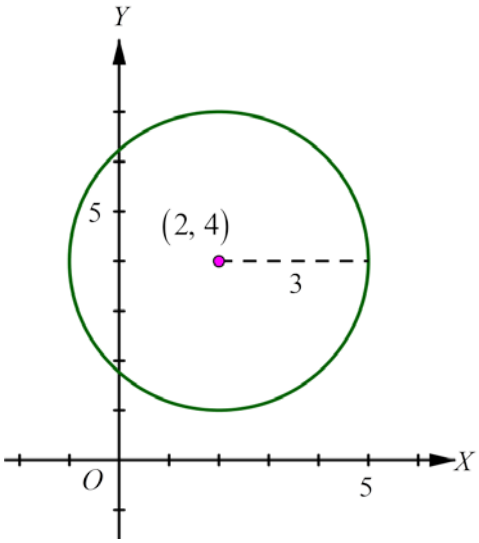
จะได้ $$(x-2)^2+(y-4)^2 = 3^2$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จะได้ $h = 2, k = 4$ และ $r = 3$

ดังนั้น วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(2,4)$ และมีรัศมียาว 3 หน่วย

เขียนวงกลมได้ดังนี้



2) จาก $(x-2)^2+y^2 = 49$

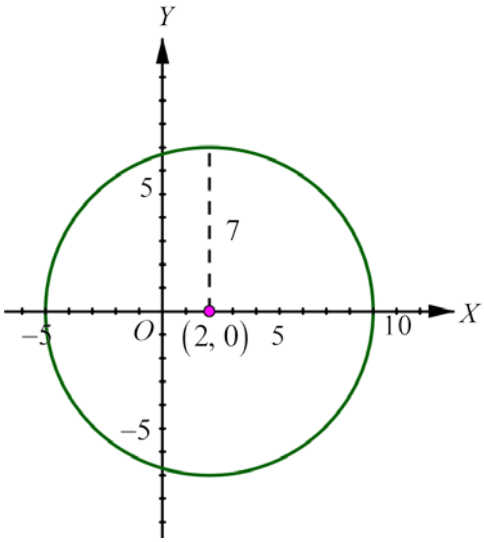
จะได้ $(x-2)^2+y^2 = 7^2$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จะได้ $h = 2, k = 0$ และ $r = 7$

ดังนั้น วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(2, 0)$ และมีรัศมียาว 7 หน่วย

เขียนวงกลมได้ดังนี้



3) จาก $x^2+(y-4)^2 = \frac{16}{25}$

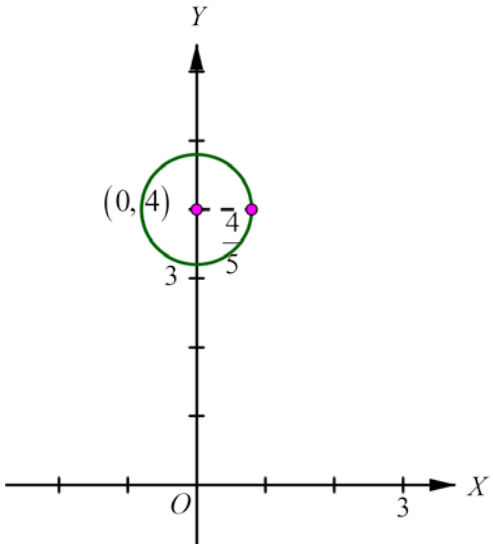
จะได้ $(x-0)^2+(y-4)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จะได้ $h=0, k=4$ และ $r=\frac{4}{5}$

ดังนั้น วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,4)$ และมีรัศมียาว $\frac{4}{5}$ หน่วย

เขียนวงกลมได้ดังนี้



4) จาก $(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2 = 10$

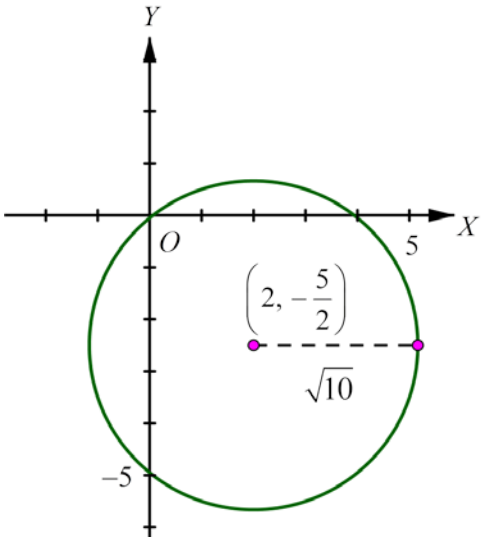
จะได้ $(x-2)^2+\left(y-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จะได้ $h = 2,\ k = -\frac{5}{2}$ และ $r = \sqrt{10}$

ดังนั้น วงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$ และมีรัศมียาว $\sqrt{10}$ หน่วย

เขียนวงกลมได้ดังนี้



10. 1) จาก $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

จะได้ $x^2 + 4x + y^2 - 2y = -1$

$$\left(x^2 + 4x + 2^2\right) + \left(y^2 - 2y + 1^2\right) = -1 + 2^2 + 1^2$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้ $h = -2, k = 1$ และ $r = 2$

ดังนั้น $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ เป็นสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-2, 1)$ และมีรัศมียาว 2 หน่วย

2) จาก $x^2 + y^2 + y = 0$

จะได้ $x^2 + \left(y^2 + y + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$(x-0)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้ $h = 0,\ k = -\frac{1}{2}$ และ $r = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $x^2 + y^2 + y = 0$ เป็นสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

และมีรัศมียาว $\frac{1}{2}$ หน่วย

3) จาก $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$

จะได้ $x^2 + 10x + y^2 - 4y = -13$

$\left(x^2 + 10x + 5^2\right) + \left(y^2 - 4y + 2^2\right) = -13 + 5^2 + 2^2$

$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 16$

$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 4^2$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้ $h = -5,\ k = 2$ และ $r = 4$

ดังนั้น $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$ เป็นสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-5, 2)$

และมีรัศมียาว 4 หน่วย

4) จาก $x^2+y^2+x+2y+1 = 0$

จะได้ $x^2+x+y^2+2y = -1$

$$\left(x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+\left(y^2+2y+1^2\right) = -1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จะได้ $h=-\frac{1}{2}, k=-1$ และ $r=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $x^2+y^2+x+2y+1=0$ เป็นสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

และมีรัศมียาว $\frac{1}{2}$ หน่วย

5) จาก $x^2+y^2+6x+2 = 0$

จะได้ $x^2+6x+y^2 = -2$

$$\left(x^2+6x+3^2\right)+y^2 = -2+3^2$$

$$(x+3)^2+(y-0)^2 = 7$$

$$(x+3)^2+(y-0)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จะได้ $h=-3, k=0$ และ $r=\sqrt{7}$

ดังนั้น $x^2+y^2+6x+2=0$ เป็นสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-3, 0)$

และมีรัศมียาว $\sqrt{7}$ หน่วย

6) จาก $x^2+y^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8} = 0$

จะได้ $x^2-\frac{1}{2}x+y^2+\frac{1}{2}y = \frac{1}{8}$

$$\left(x^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)+\left(y^2+\frac{1}{2}y+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{1}{8}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$$

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จะได้ $h=\frac{1}{4}, k=-\frac{1}{4}$ และ $r=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $x^2+y^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}=0$ เป็นสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$ และมีรัศมียาว $\frac{1}{2}$ หน่วย

11. เนื่องจากวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1,1)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $3x-2y+18=0$ จะได้ รัศมีของวงกลมนี้ คือระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลาง $(-1,1)$ กับเส้นตรง

$3x-2y+18=0$

นั่นคือ $$r = \frac{|(3)(-1)+(-2)(1)+18|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$

$$r = \sqrt{13}$$

ดังนั้น สมการวงกลมนี้ คือ $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

12. จาก $x^2+y^2 = 4$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จะได้ $h=0, k=0$ และ $r=2$

นั่นคือ $x^2 + y^2 = 4$ เป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมียาว 2 หน่วย

จาก $$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$$

จะได้ $$x^2 + \left(y^2 - 4y + 2^2\right) = 12 + 2^2$$

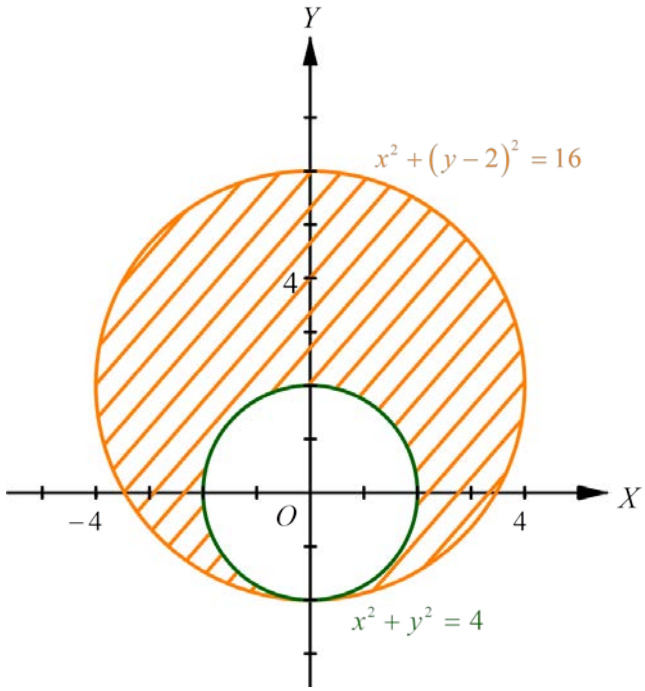
$$x^2 + (y-2)^2 = 16$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้ $h = 0, k = 2$ และ $r = 4$

นั่นคือ $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$ เป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 2)$ และมีรัศมียาว 4 หน่วย

เขียนวงกลมทั้งสองได้ดังนี้



จากรูป จะได้พื้นที่ที่ต้องการ คือ $\pi\left(4^2\right) - \pi\left(2^2\right) = 12\pi$ ตารางหน่วย

13. จาก $x^2 + y^2 - 10x = 0$

จะได้ $\left(x^2 - 10x\right) + y^2 = 0$

$\left(x^2 - 10x + 25\right) + y^2 = 25$

$(x-5)^2 + y^2 = 5^2$

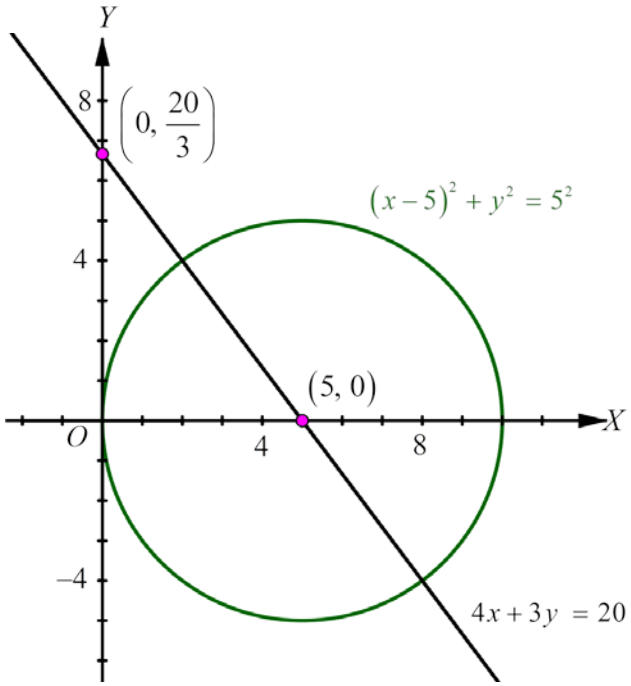
นั่นคือ $x^2 + y^2 - 10x = 0$ เป็นสมการวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(5, 0)$ และมีรัศมียาว 5 หน่วย

พิจารณาเส้นตรง $4x + 3y = 20$

หาจุดตัดแกน X โดยแทน y ด้วย 0 ใน $4x + 3y = 20$ จะได้ $x = 5$

หาจุดตัดแกน Y โดยแทน x ด้วย 0 ใน $4x + 3y = 20$ จะได้ $y = \frac{20}{3}$

เขียนกราฟได้ดังนี้



จะเห็นว่า เส้นตรง $4x+3y=20$ ผ่านจุด $(5,0)$ ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ดังนั้น เส้นสัมผัสทั้งสองของวงกลมนี้ ณ จุดที่วงกลมตัดเส้นตรง $4x+3y=20$

จะตั้งฉากกับเส้นตรงนี้

จาก $$4x+3y = 20$$

จะได้ $$y = -\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$$

นั่นคือ ความชันของเส้นตรง $4x+3y=20$ คือ $-\frac{4}{3}$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสของวงกลม คือ $\frac{3}{4}$

จะได้ สมการของเส้นสัมผัสของวงกลม จะอยู่ในรูป $y=\frac{3}{4}x+c$ หรือ $3x-4y+4c=0$

เนื่องจากเส้นสัมผัสจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากับความยาวของรัศมีของวงกลม

จะได้ $$\frac{|3(5)+(-4)(0)+4c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 5$$

$$\frac{|15+4c|}{5} = 5$$

$$|15+4c| = 25$$

$$|15+4c| = 25$$

นั่นคือ $15+4c = 25$ หรือ $15+4c = -25$

จะได้ $c = \frac{5}{2}$ หรือ $c = -10$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2+y^2-10x=0$ ณ จุดที่วงกลมตัดเส้นตรง $4x+3y=20$

คือ $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$ และ $y=\frac{3}{4}x-10$

14. 1) กำหนดให้ จุดศูนย์กลางของโลกเป็นจุดศูนย์กลางของวงโคจร

โดยที่ จุดศูนย์กลางของโลกและจุดศูนย์กลางของวงโคจรอยู่ที่จุด $(0, 0)$

เนื่องจากโลกมีลักษณะเป็นทรงกลมที่มีรัศมียาวประมาณ $6,400$ กิโลเมตร และ

ดาวเทียมไทยคมมีความสูงจากพื้นโลกประมาณ $35,800$ กิโลเมตร

นั่นคือ ดาวเทียมไทยคมอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของโลก $35,800+6,400=42,200$ กิโลเมตร

แทน h, k และ r ด้วย $0, 0$ และ $42,200$ ตามลำดับ ใน $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

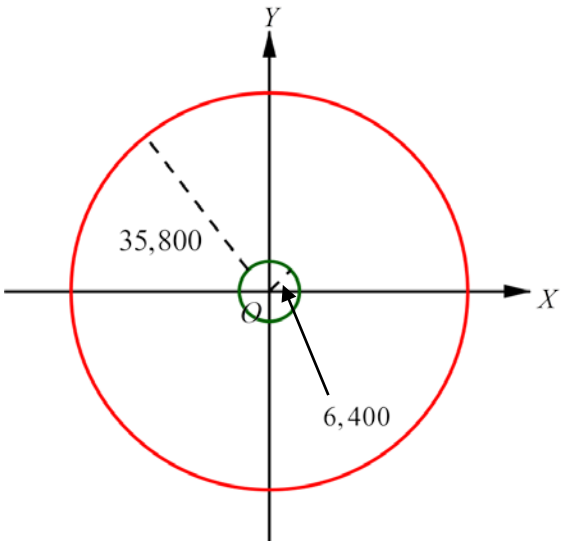
จะได้

$$(x-0)^2+(y-0)^2 = 42,200^2$$

$$x^2+y^2 = 42,200^2$$

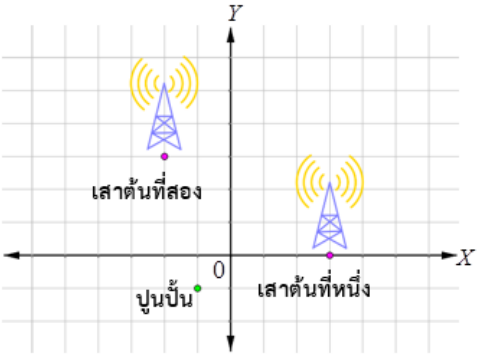
ดังนั้น สมการของวงโคจรของดาวเทียมไทยคม คือ $x^2+y^2=42,200^2$

2) เขียนกราฟได้ดังนี้



หมายเหตุ เส้นสีน้ำเงินแทนโลก และเส้นสีฟ้าแทนวงโคจรของดาวเทียมไทยคม

15. จากรูป



และเนื่องจาก 1 หน่วย ในรูปแทนระยะทาง 2 กิโลเมตร

จะได้ เสาสัญญาณโทรศัพท์ต้นที่หนึ่งและสองอยู่ที่จุด $(6, 0)$ และ $(-4, 6)$ ตามลำดับ

ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของการปล่อยสัญญาณ และปูนปั้นอยู่ที่จุด $(-2, -2)$

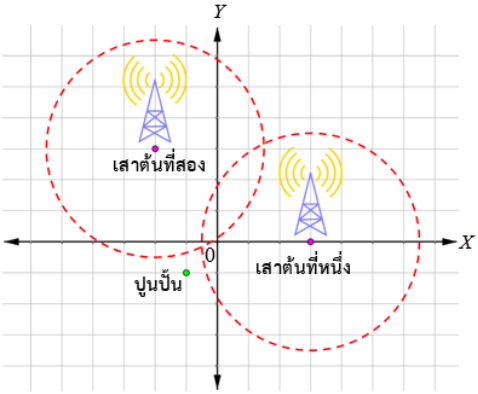
เนื่องจาก เสาสัญญาณโทรศัพท์แต่ละต้นปล่อยสัญญาณออกจากจุดศูนย์กลางได้

ไกลที่สุด 7 กิโลเมตร

ดังนั้น สมการวงกลมที่แทนขอบเขตการปล่อยสัญญาณโทรศัพท์ของเสาต้นที่หนึ่งและเสา

ต้นที่สอง คือ $(x+4)^2+(y-6)^2=49$ และ $(x-6)^2+y^2=49$

ตามลำดับ ดังรูป



1) เนื่องจากปูนปั้นจะต้องเดินไปทางทิศตะวันออก แสดงว่า ปูนปั้นต้องเดินในแนวเส้นตรง $y=-2$ ไปทางขวา นั่นคือต้องการหาจุดตัดระหว่างเส้นตรง $y=-2$ และวงกลม $(x-6)^2+y^2=49$

แทน y ด้วย -2 ใน $(x-6)^2+y^2=49$

จะได้

$$\begin{aligned}(x-6)^2+(-2)^2 &= 49\\ x^2-12x+36+4 &= 49\\ x^2-12x-9 &= 0\\ x &= \frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(1)(-9)}}{2(1)}\\ x &= \frac{12\pm\sqrt{180}}{2}\\ x &= 6\pm3\sqrt{5}\end{aligned}$$

นั่นคือ จุดตัดระหว่างเส้นตรง $y=-2$ และวงกลม $(x-6)^2+y^2=49$ คือ $(6\pm3\sqrt{5},-2)$

เนื่องจาก ปูนปั้นอยู่ใกล้จุด $(6-3\sqrt{5},-2)$ มากกว่าจุด $(6+3\sqrt{5},-2)$

ดังนั้น ปูนปั้นจะต้องเดินไปทางทิศตะวันออกเป็นระยะทางอย่างน้อย $6-3\sqrt{5}-(-2)=8-3\sqrt{5}$ กิโลเมตร หรือประมาณ 1.29 กิโลเมตร จึงจะมีสัญญาณโทรศัพท์

2) พิจารณาเสาสัญญาณโทรศัพท์ต้นที่หนึ่ง

จะได้ระยะทางระหว่างจุด $(-4,6)$ และ $(-2,-2)$ คือ $\sqrt{(-4+2)^2+(6+2)^2}=\sqrt{68}$

นั่นคือ ระยะทางที่สั้นที่สุดที่ปูนปั้นจะเดินไปยังตำแหน่งที่มีสัญญาณโทรศัพท์จากเสาต้นที่หนึ่ง คือ $\sqrt{68}-7$ กิโลเมตร

พิจารณาเสาสัญญาณโทรศัพท์ต้นที่สอง

จะได้ระยะทางระหว่างจุด $(6, 0)$ และ $(-2, -2)$ คือ $\sqrt{(6+2)^2+(0+2)^2} = \sqrt{68}$

นั่นคือ ระยะทางที่สั้นที่สุดที่ปูนปั้นจะเดินไปยังตำแหน่งที่มีสัญญาณโทรศัพท์จากเสาต้นที่สอง คือ $\sqrt{68}-7$ กิโลเมตร

จะเห็นว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดที่ปูนปั้นจะเดินไปยังตำแหน่งที่มีสัญญาณโทรศัพท์จากเสาต้นที่หนึ่งและเสาต้นที่สองเท่ากัน

ดังนั้น ระยะทางที่สั้นที่สุดที่ปูนปั้นจะเดินไปยังตำแหน่งที่มีสัญญาณโทรศัพท์ คือ $\sqrt{68}-7$ กิโลเมตร หรือประมาณ 1.25 กิโลเมตร

แบบฝึกหัด 3.2.2

1. 1) จาก $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

จะได้ว่า $a^2 = 25, b^2 = 9$ นั่นคือ $a = 5, b = 3$

เนื่องจากพจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ y^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

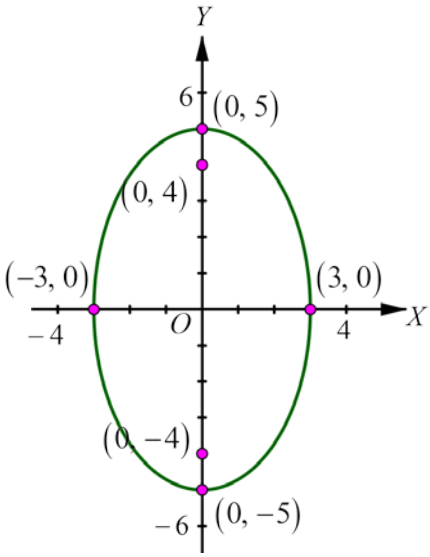
ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(0, -c)$ และ $(0, c)$ เมื่อ $c > 0$

จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$ นั่นคือ $c = 4$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(0, -5)$ และ $(0, 5)$ โฟกัสของวงรีคือ $(0, -4)$ และ $(0, 4)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{4}{5}$ แกนเอกมีความยาว 10 หน่วย

แกนโทมีความยาว 6 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



2) จาก $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $a^2=25, b^2=9$ นั่นคือ $a=5, b=3$

เนื่องจากพจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ x^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

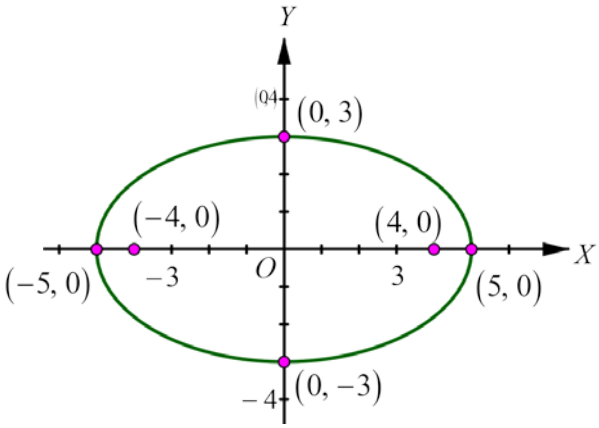
ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(-c, 0)$ และ $(c, 0)$ เมื่อ $c>0$

จะได้ว่า $c^2=a^2-b^2=25-9=16$ นั่นคือ $-c=4$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ โฟกัสของวงรีคือ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{4}{5}$ แกนเอกมีความยาว 10 หน่วย

แกนโทมีความยาว 6 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



3) ระยะทางระหว่างจุด $(2,5)$ และ $(9,5)$ คือ $|2-9| = 7$ หน่วย

จาก $$9x^2+4y^2 = 36$$

จะได้ $$\frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

จะได้ว่า $a^2=9, b^2=4$ นั่นคือ $a=3, b=2$

เนื่องจากพจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ y^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

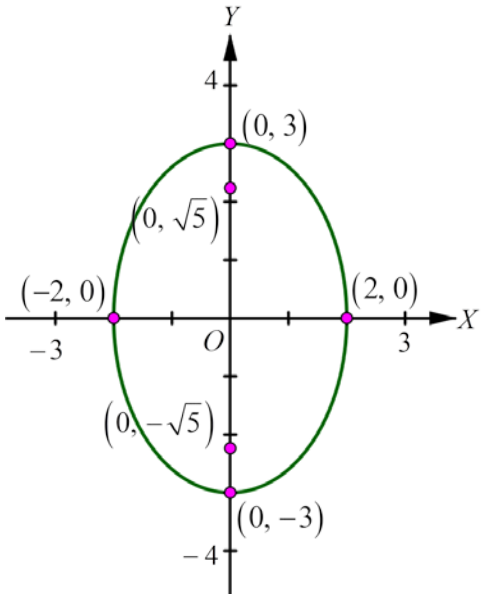
ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(0,-c)$ และ $(0,c)$ เมื่อ $c>0$

จะได้ว่า $c^2=a^2-b^2=9-4=5$ นั่นคือ $c=\sqrt{5}$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(0,-3)$ และ $(0,3)$ โฟกัสของวงรีคือ $(0,-\sqrt{5})$ และ $(0,\sqrt{5})$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ แกนเอกมีความยาว 6 หน่วย

แกนโทมีความยาว 4 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



4) จาก $4x^2 + 25y^2 = 100$

จะได้ $\frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = \frac{100}{100}$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 25, b^2 = 4$ นั่นคือ $a = 5, b = 2$

เนื่องจากพจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ -4

จะได้ว่าแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

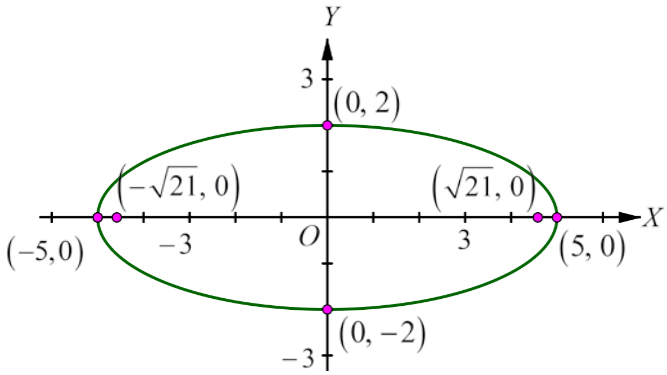
ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(0, -c)$ และ $(0, \sqrt{5})$ เมื่อ $c > 0$

จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21$ นั่นคือ $c = \sqrt{21}$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ โฟกัสของวงรีคือ $(-\sqrt{21}, 0)$ และ $(\sqrt{21}, 0)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{21}}{5}$ แกนเอกมีความยาว 10 หน่วย

แกนโทมีความยาว 4 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



5) จาก $x^2 + 4y^2 = 16$

จะได้ $\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16}$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 16, b^2 = 4$ นั่นคือ $a = 4, b = 2$

เนื่องจากพจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ -3

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

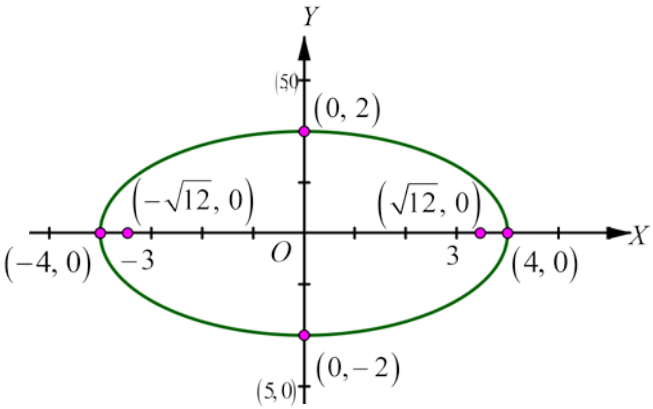
ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(-c, 0)$ และ $(c, 0)$ เมื่อ $c > 0$

จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$ นั่นคือ $c = \sqrt{12}$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$ โฟกัสของวงรีคือ $(-\sqrt{12}, 0)$ และ

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ แกนเอกมีความยาว 8 หน่วย

แกนโทมีความยาว 4 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



6) จาก $4x^2 + y^2 = 16$

จะได้ $\frac{4x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = \frac{16}{16}$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 16, b^2 = 4$ นั่นคือ $a = 4, b = 2$

เนื่องจากพจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ y^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

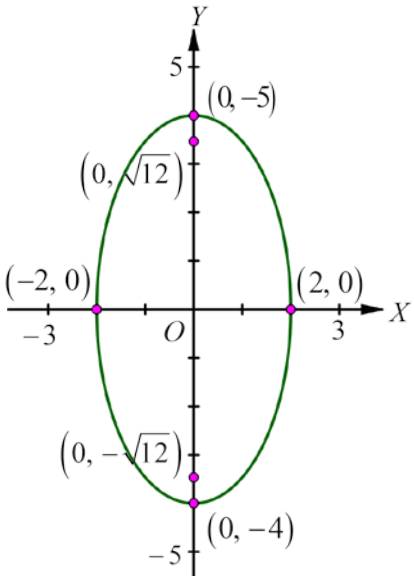
ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(0, -c)$ และ $(0, c)$ เมื่อ $c > 0$

จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$ นั่นคือ $c = \sqrt{12}$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(0, -4)$ และ $(0, 4)$ โฟกัสของวงรีคือ $(0, -\sqrt{12})$ และ $(0, \sqrt{12})$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ แกนเอกมีความยาว 8 หน่วย

แกนโทมีความยาว 4 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



7) จาก $2x^2 + y^2 = 3$

จะได้ $\frac{2x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = \frac{3}{3}$

$$\frac{x^2}{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{3} = 1$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 3, b^2 = \frac{3}{2}$ นั่นคือ $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

เนื่องจาก พจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ y^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(0, -c)$ และ $(0, c)$ เมื่อ $c > 0$

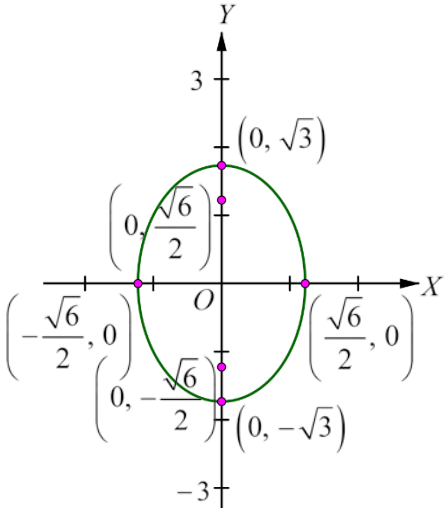
จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ นั่นคือ $c = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(0, -\sqrt{3})$ และ $(0, \sqrt{3})$

โฟกัสของวงรีคือ $\left(0, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ แกนเอกมีความยาว $2\sqrt{3}$ หน่วย

แกนโทมีความยาว $\sqrt{6}$ หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



8) จาก $5x^2 + 6y^2 = 30$

จะได้ $\frac{5x^2}{30} + \frac{6y^2}{30} = \frac{30}{30}$

$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 6, b^2 = 5$ นั่นคือ $a = \sqrt{6}, b = \sqrt{5}$

เนื่องจาก พจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ x^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(-c, 0)$ และ $(c, 0)$ เมื่อ $c > 0$

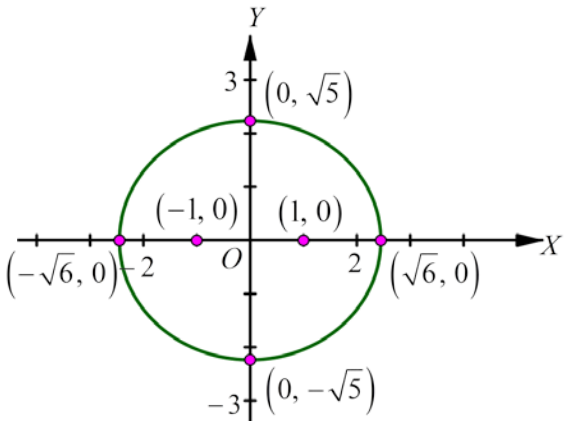
จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = 6 - 5 = 1$ นั่นคือ $c = 1$

ดังนั้น จุดยอดคือ $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$ และ $\left(\sqrt{6}, 0\right)$

โฟกัสของวงรีคือ $(-1, 0)$ และ $(1, 0)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ แกนเอกมีความยาว $2\sqrt{6}$ หน่วย

แกนโทมีความยาว $2\sqrt{5}$ หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



9) จาก $x^2 + 4y^2 = 1$

จะได้ $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 1, b^2 = \frac{1}{4}$ นั่นคือ $a = 1, b = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก พจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ x^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(-c, 0)$ และ $(c, 0)$ เมื่อ $c > 0$

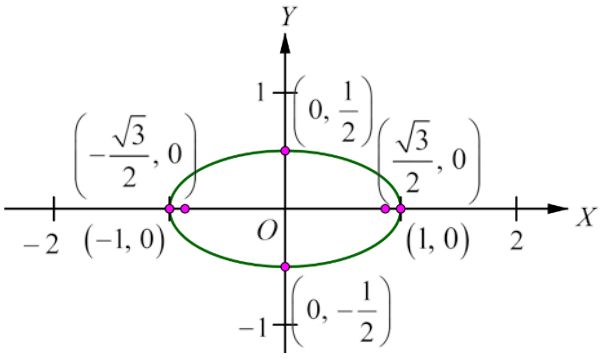
จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ นั่นคือ $c = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(-1, 0)$ และ $(1, 0)$

โฟกัสของวงรีคือ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ แกนเอกมีความยาว 2 หน่วย

แกนโทมีความยาว 1 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



10) จาก $9x^2 + 4y^2 = 1$

จะได้ $\frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = \frac{1}{4}, b^2 = \frac{1}{9}$ นั่นคือ $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$

เนื่องจาก พจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ y^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(0, -c)$ และ $(0, c)$ เมื่อ $c > 0$

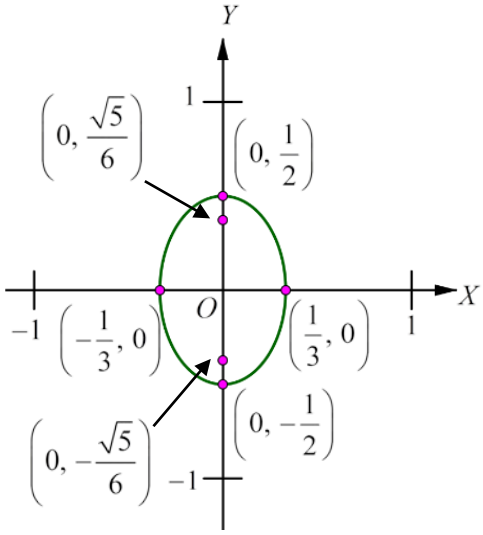
จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36}$ นั่นคือ $c = \frac{\sqrt{5}}{6}$

ดังนั้น จุดยอดคือ $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

โฟกัสของวงรีคือ $\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$ และ $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ แกนเอกมีความยาว 1 หน่วย

แกนโทมีความยาว $\frac{2}{3}$ หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



11) จาก
$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = \frac{1}{4}$$

จะได้
$$4\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 4\left(\frac{1}{8}y^2\right) = 4\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$2x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{2} = 1$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 2, b^2 = \frac{1}{2}$ นั่นคือ $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

เนื่องจาก พจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ y^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(0, -c)$ และ $(0, c)$ เมื่อ $c > 0$

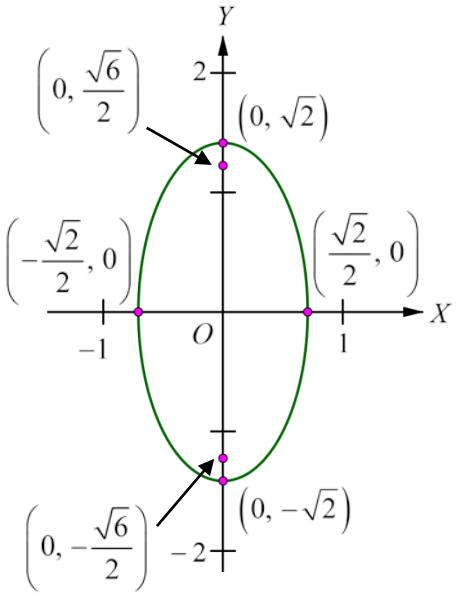
จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ นั่นคือ $c = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(0, -\sqrt{2})$ และ $(0, \sqrt{2})$

โฟกัสของวงรีคือ $\left(0, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ แกนเอกมีความยาว $2\sqrt{2}$ หน่วย

แกนโทมีความยาว $\sqrt{2}$ หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



12) จาก $x^2 = 4-2y^2$

จะได้ $x^2+2y^2 = 4$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{2y^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2} = 1$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $a^2 = 4, b^2 = 2$ นั่นคือ $a = 2, b = \sqrt{2}$

เนื่องจาก พจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ x^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

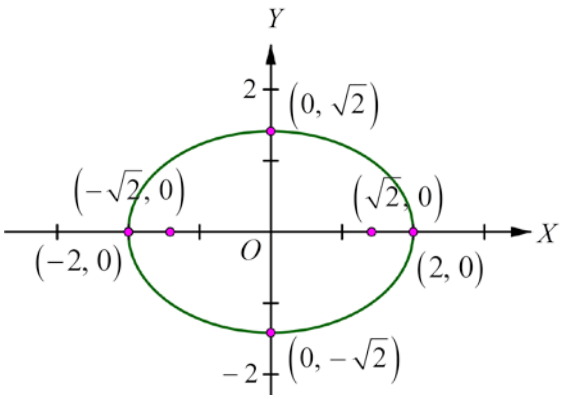
ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(-c, 0)$ และ $(c, 0)$ เมื่อ $c > 0$

จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = 4-2 = 2$ นั่นคือ $c = \sqrt{2}$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(-2, 0)$ และ $(2, 0)$ โฟกัสของวงรีคือ $(-\sqrt{2}, 0)$ และ $(\sqrt{2}, 0)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ แกนเอกมีความยาว 4 หน่วย

แกนโทมีความยาว $2\sqrt{2}$ หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



13) จาก $y^2 = 1-2x^2$

จะได้ $2x^2+y^2 = 1$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{1} = 1$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

จะได้ว่า $a^2=1, b^2=\frac{1}{2}$ นั่นคือ $a=1, b=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

เนื่องจาก พจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ y^2

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(0,-c)$ และ $(0,c)$ เมื่อ $c>0$

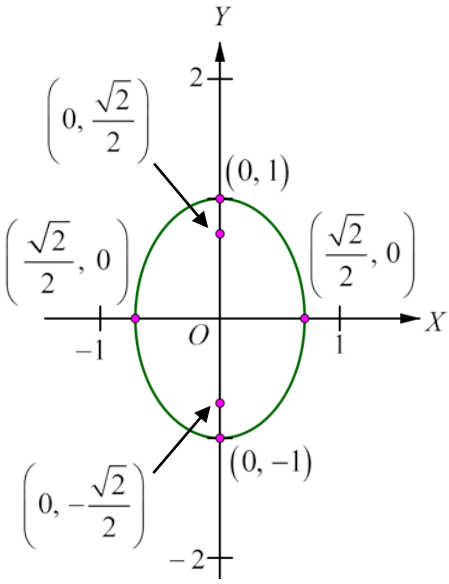
จะได้ว่า $c^2=a^2-b^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ นั่นคือ $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น จุดยอดคือ $(0,-1)$ และ $(0,1)$

โฟกัสของวงรีคือ $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ และ $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ แกนเอกมีความยาว 2 หน่วย

แกนโทมีความยาว $\sqrt{2}$ หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



14) จาก $20x^2 + 4y^2 = 5$

จะได้ $\frac{20x^2}{5} + \frac{4y^2}{5} = \frac{5}{5}$

$$4x^2 + \frac{4y^2}{5} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = \frac{5}{4}, b^2 = \frac{1}{4}$ นั่นคือ $a = \frac{\sqrt{5}}{2}, b = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก พจน์ a^2 เป็นตัวส่วนของพจน์ y^2

จะได้ว่า แกนเอกจึงอยู่บนแกน Y

ถ้าให้โฟกัสของวงรี คือ $(0, -c)$ และ $(0, c)$ เมื่อ $c > 0$

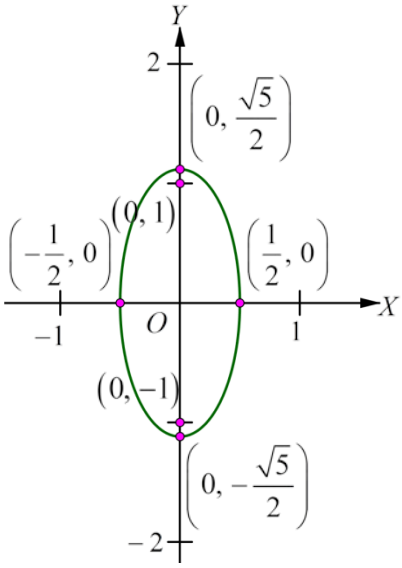
จะได้ว่า $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$ นั่นคือ $c = 1$

ดังนั้น จุดยอดคือ $\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

โฟกัสของวงรีคือ $(0, -1)$ และ $(0, 1)$

ความเยื้องศูนย์กลางคือ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ แกนเอกมีความยาว $\sqrt{5}$ หน่วย

แกนโทมีความยาว 1 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



2. 1) จากกราฟที่กำหนดให้ จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

นั่นคือ วงรีนี้มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

โดยที่ $a = 5$ และ $b = 4$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

2) จากกราฟที่กำหนดให้ จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

นั่นคือ วงรีนี้มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

โดยที่ $a=4$ และ $c=3$

เนื่องจาก $c^2=a^2-b^2$

จะได้ $b^2=a^2-c^2=4^2-3^2=16-9=7$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$

3) จากกราฟที่กำหนดให้ จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

นั่นคือ วงรีนี้มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

โดยที่ $b=2$ และ $c=2$

เนื่องจาก $c^2=a^2-b^2$

จะได้ $a^2=c^2+b^2=2^2+2^2=4+4=8$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$

4) จากกราฟที่กำหนดให้ จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

นั่นคือ วงรีนี้มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

โดยที่ $a=16$ และมีจุด $(8,6)$ อยู่บนกราฟ

แทน x และ y ด้วย 8 และ 6 ตามลำดับ

จะได้

$$\frac{8^2}{16^2}+\frac{6^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{64}{256}+\frac{36}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{36}{b^2} = 1$$

$$\frac{36}{b^2} = 1-\frac{1}{4}$$

$$\frac{36}{b^2} = \frac{3}{4}$$

$$b^2 = \frac{36\times 4}{3}$$

$$b^2 = 48$$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{48}=1$

3. 1) จากโฟกัส $(-4, 0), (4, 0)$ และจุดยอด $(-5, 0), (5, 0)$

จะได้ $a = 5, c = 4$ และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 25-16 = 9$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

2) จากโฟกัส $(0, -3), (0, 3)$ และจุดยอด $(0, -5), (0, 5)$

จะได้ $a = 5, c = 3$ และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 3^2 = 25-9 = 16$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

3) จากแกนเอกยาว 4 หน่วย แกนโทยาว 2 หน่วย และโฟกัสอยู่บนแกน Y

จะได้ $2a = 4, 2b = 2$ และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

นั่นคือ $a = 2$ และ $b = 1$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

4) จากแกนเอกยาว 6 หน่วย แกนโทยาว 4 หน่วย และโฟกัสอยู่บนแกน X

จะได้ $2a = 6, 2b = 4$ และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

นั่นคือ $a = 3$ และ $b = 2$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

5) จากโฟกัส คือ $(0, -2), (0, 2)$ และแกนโทยาว 6 หน่วย

จะได้ $c = 2, 2b = 6$ และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

นั่นคือ $b = 3$ และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $a^2 = c^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1$

6) จากโฟกัส คือ $(-5, 0), (5, 0)$ และแกนเอกยาว 12 หน่วย

จะได้ $c = 5, 2a = 12$ และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

นั่นคือ $a = 6$ และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$

7) จากจุดปลายแกนเอก $(-10, 0), (10, 0)$

และระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 6 หน่วย

จะได้ $a = 10, 2c = 6$ และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

นั่นคือ $c = 3$ และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $b^2 = a^2 - c^2 = 10^2 - 3^2 = 100 - 9 = 91$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{91} = 1$

8) จากจุดปลายแกนโท $(0, -3), (0, 3)$

และระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 8 หน่วย

จะได้ $b = 3, 2c = 8$ และแกนโทของวงรีอยู่บนแกน Y

นั่นคือ $c = 4$ และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $a^2 = c^2 + b^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

9) จากแกนเอกยาว 10 หน่วย โฟกัสอยู่บนแกน X และวงรีผ่านจุด $(\sqrt{5}, 2)$

จะได้ $2a = 10$ และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

แทน a, x และ y ด้วย $5, \sqrt{5}$ และ 2 ตามลำดับ ใน $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้

$$\frac{(\sqrt{5})^2}{5^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{5}{25} + \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\frac{4}{b^2} = 1-\frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{b^2} = \frac{4}{5}$$

$$b^2 = \frac{4\times 5}{4}$$

$$b^2 = 5$$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{5}=1$

10) จากความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{1}{9}$ และโฟกัส คือ $(0,-2),(0,2)$

จะได้ $c=2$ และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

ให้ $e=\frac{1}{9}$ และจาก $c=2$

จะได้ $\frac{1}{9} = \frac{2}{a}$ (ความเยื้องศูนย์กลาง $e=\frac{c}{a}$)

$$a = 18$$

เนื่องจาก $c^2=a^2-b^2$

จะได้ $b^2=a^2-c^2=18^2-2^2=324-4=320$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{320}+\frac{y^2}{324}=1$

11) จากความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ 0.8 และโฟกัส คือ $(-1.5,0),(1.5,0)$

จะได้ $c=1.5$ และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ให้ $e=0.8=\frac{8}{10}$ และจาก $c=1.5=\frac{15}{10}$

จะได้ $\frac{8}{10} = \frac{\frac{15}{10}}{a}$ (ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \frac{c}{a}$)

$a = \frac{15}{10} \times \frac{10}{8}$

$a = \frac{15}{8}$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $b^2 = a^2 - c^2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{225}{64} - \frac{9}{4} = \frac{81}{64}$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{64x^2}{225} + \frac{64y^2}{81} = 1$

12) จากความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ โฟกัสอยู่บนแกน Y และแกนเอกยาว 4 หน่วย

จะได้ $2a = 4, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ นั่นคือ $a = 2, c = \sqrt{3}$ และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

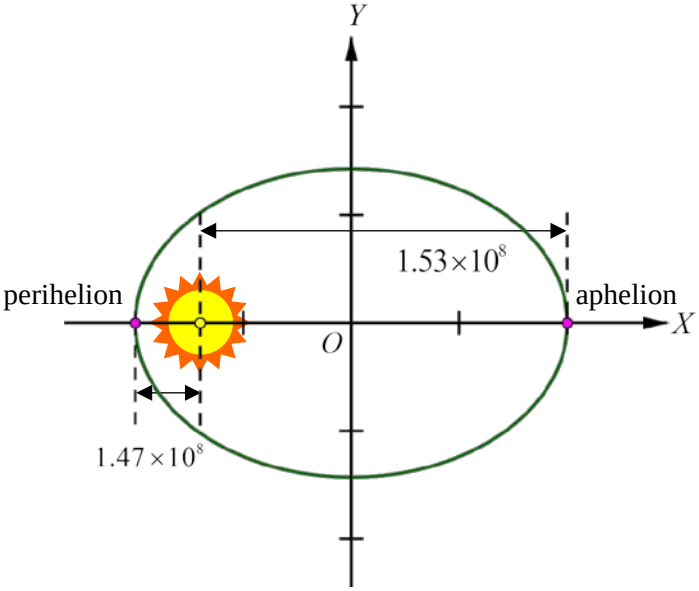
นั่นคือ มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $b^2 = a^2 - c^2 = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

4. จากโจทย์ จะได้ว่า



เนื่องจากผลรวมของระยะทางจากจุดที่อยู่ใกล้โฟกัสจุดหนึ่งมากที่สุด (perihelion) และจุดที่อยู่ไกลโฟกัสจุดนั้นมากที่สุด (aphelion) คือ ความยาวแกนเอกของวงรี $(2a)$

จะได้ $$2a = (1.47+1.53)\times10^8$$

$$a = 1.5\times10^8$$

เนื่องจาก จุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงโคจร

จะได้ $$c = (1.5-1.47)\times10^8$$

$$c = 0.03\times10^8$$

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $$b^2 = a^2 - c^2$$

$$= \left(1.5\times10^8\right)^2 - \left(0.03\times10^8\right)^2$$

$$= \left(1.5^2 - 0.03^2\right)\times\left(10^8\right)^2$$

$$= (2.25 - 0.0009)\times10^{16}$$

$$= 2.2491\times10^{16}$$

ดังนั้น สมการของวงโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ คือ $\dfrac{x^2}{2.25\times10^{16}}+\dfrac{y^2}{2.2491\times10^{16}}=1$

5. เนื่องจาก ดาวพลูโตโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรีที่มีความเยื้องศูนย์กลางมากที่สุดประมาณ 0.25

จะได้ว่า $\dfrac{c}{a}=0.25$ นั่นคือ $c=0.25a$

เนื่องจากแกนโทของวงโคจรยาวประมาณ 1×10^{10} กิโลเมตร

จะได้ว่า $2b=1\times10^{10}$ นั่นคือ $b=5\times10^{9}$

เนื่องจาก $c^2=a^2-b^2$

จะได้

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2+c^2\\
a^2 &= \left(5\times10^9\right)^2+\left(0.25a\right)^2\\
a^2 &= 25\times10^{18}+0.0625a^2\\
0.9375a^2 &= 25\times10^{18}\\
a^2 &= \frac{25\times10^{18}}{0.9375}\\
a^2 &\approx 26.67\times10^{18}\\
a &\approx 5.16\times10^{9}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $c\approx0.25\left(5.16\times10^9\right)=1.29\times10^9$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างดาวพลูโตกับดวงอาทิตย์ที่ perihelion คือ

$\left(5.16-1.29\right)\times10^9=3.87\times10^9$ กิโลเมตร

และระยะทางระหว่างดาวพลูโตกับดวงอาทิตย์ที่ aphelion คือ

$\left(5.16+1.29\right)\times10^9=6.45\times10^9$ กิโลเมตร

แบบฝึกหัด 3.2.3

1. 1) จาก $y = 4x^2$

จะได้ $x^2 = \frac{1}{4}y$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $x^2 = 4py$

จะได้ว่า $4p = \frac{1}{4}$ หรือ $p = \frac{1}{16}$

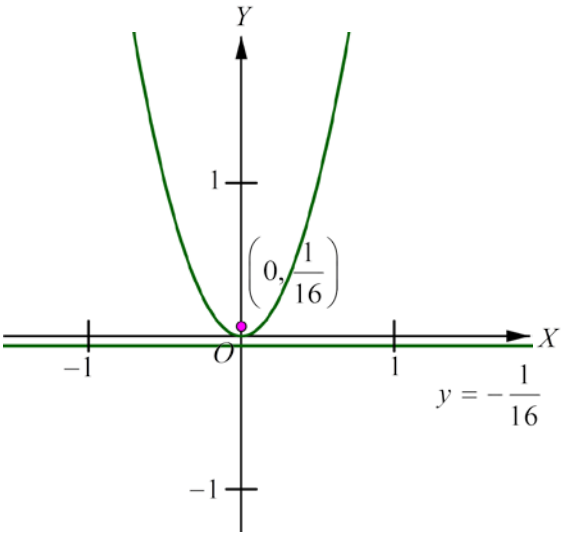
ดังนั้น โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(0, \frac{1}{16}\right)$

ไดเรกตริกซ์คือ $y = -\frac{1}{16}$

เลตัสเรกตัมยาว $\frac{1}{4}$ หน่วย

เนื่องจาก $p > 0$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



2) จาก $x = y^2$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $y^2 = 4px$

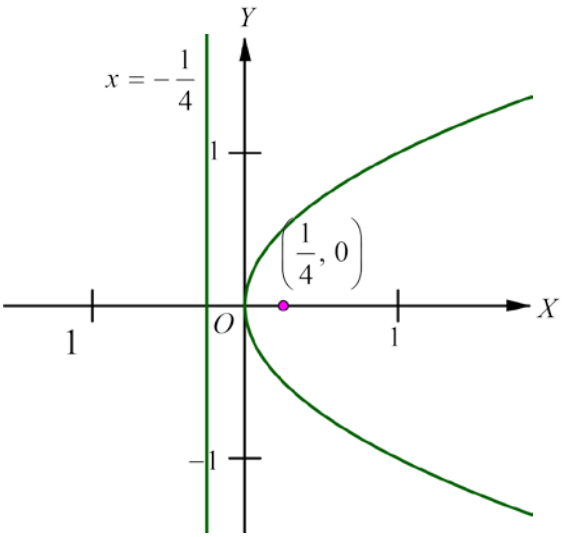
จะได้ว่า $4p = 1$ หรือ $p = \frac{1}{4}$

ดังนั้น โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

ไดเรกตริกซ์คือ $x = -\frac{1}{4}$

เลตัสเรกตัมยาว 1 หน่วย

เนื่องจาก $p > 0$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



3) จาก $x^2 = 9y$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $x^2 = 4py$

จะได้ว่า $4p = 9$ หรือ $p = \frac{9}{4}$

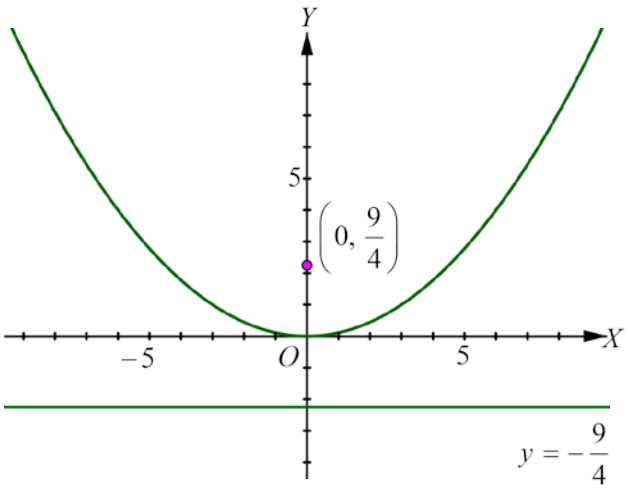
ดังนั้น โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(0, \frac{9}{4}\right)$

ไดเรกตริกซ์คือ $y = -\frac{9}{4}$

เลตัสเรกตัมยาว 9 หน่วย

เนื่องจาก $p > 0$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



4) จาก $y^2 = -2x$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $y^2 = 4px$

จะได้ว่า $4p = -2$ หรือ $p = -\frac{1}{2}$

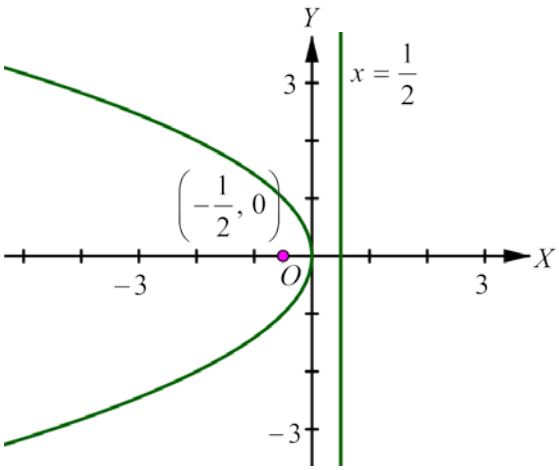
ดังนั้น โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

ไดเรกตริกซ์คือ $x = \frac{1}{2}$

เลตัสเรกตัมยาว 2 หน่วย

เนื่องจาก $p < 0$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านซ้าย

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



5) จาก $x^2 = -8y$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $x^2 = 4py$

จะได้ว่า $4p = -8$ หรือ $p = -2$

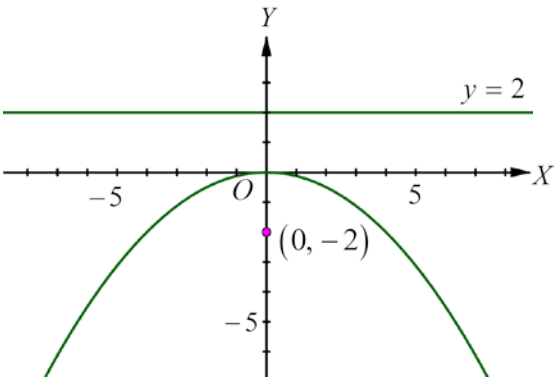
ดังนั้น โฟกัสของพาราโบลาคือ $(0, -2)$

ไดเรกตริกซ์คือ $y = 2$

เลตัสเรกตัมยาว 8 หน่วย

เนื่องจาก $p < 0$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



6) จาก $x = \frac{1}{2}y^2$

จะได้ $y^2 = 2x$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $y^2 = 4px$

จะได้ว่า $4p = 2$ หรือ $p = \frac{1}{2}$

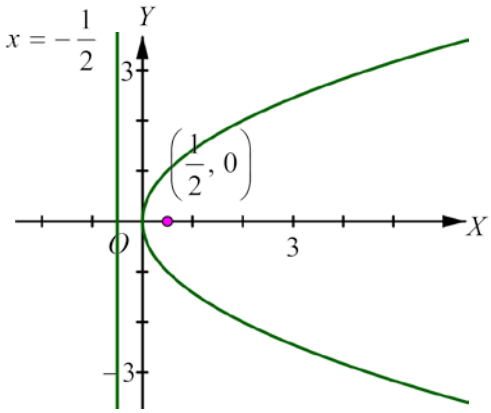
ดังนั้น โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

ไดเรกตริกซ์คือ $x = -\frac{1}{2}$

เลตัสเรกตัมยาว 2 หน่วย

เนื่องจาก $p > 0$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



7) จาก $x + 6y^2 = 0$

จะได้ $6y^2 = -x$

$y^2 = -\frac{1}{6}x$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $y^2 = 4px$

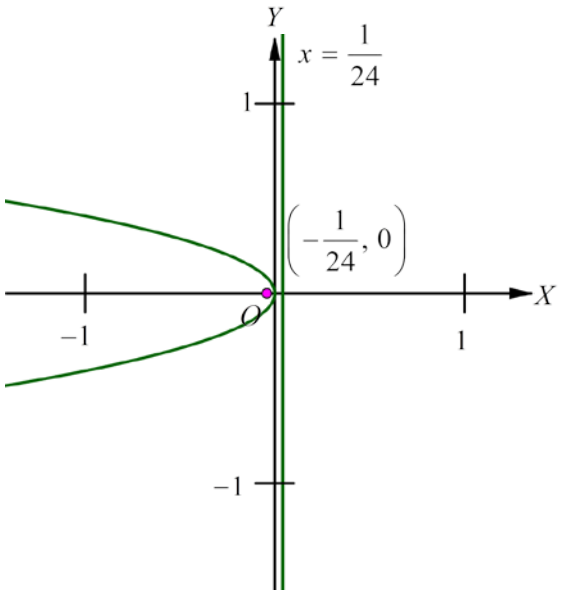
จะได้ว่า $4p = -\frac{1}{6}$ หรือ $p = -\frac{1}{24}$

ดังนั้น โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(-\frac{1}{24}, 0\right)$

ไดเรกตริกซ์คือ $x = \frac{1}{24}$

เลตัสเรกตัมยาว $\frac{1}{6}$ หน่วย

เนื่องจาก $p < 0$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านซ้าย และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



8) จาก $x^2 - 7y = 0$

จะได้ $x^2 = 7y$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $x^2 = 4py$

จะได้ว่า $4p = 7$ หรือ $p = \frac{7}{4}$

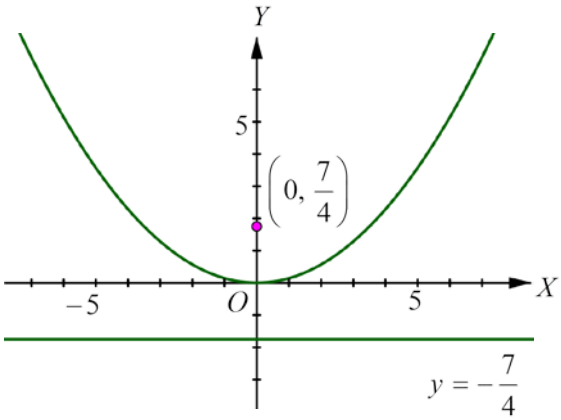
ดังนั้น โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(0, \frac{7}{4}\right)$

ไดเรกตริกซ์คือ $y = -\frac{7}{4}$

เลตัสเรกตัมยาว 7 หน่วย

เนื่องจาก $p > 0$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้ $n \in \mathbb{N}\}$



9) จาก $5x^2 + 3y = 0$

จะได้ $5x^2 = -3y$

$x^2 = -\frac{3}{5}y$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $x^2 = 4py$

จะได้ว่า $4p = -\frac{3}{5}$ หรือ $p = -\frac{3}{20}$

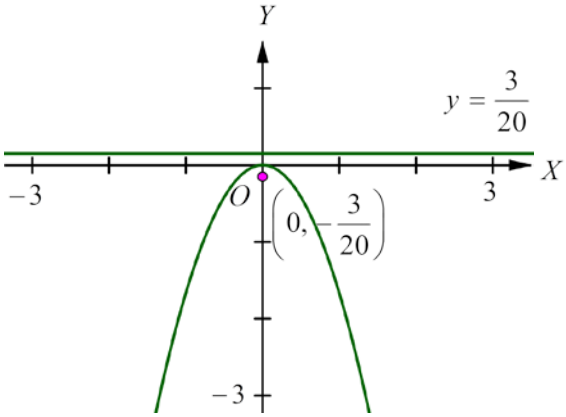
ดังนั้น โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(0, -\frac{3}{20}\right)$

ไดเรกตริกซ์คือ $y = \frac{3}{20}$

เลตัสเรกตัมยาว $\frac{3}{5}$ หน่วย

เนื่องจาก $p < 0$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



10) จาก $8x + 12y^2 = 0$

จะได้ $12y^2 = -8x$

$y^2 = -\frac{2}{3}x$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $y^2 = 4px$

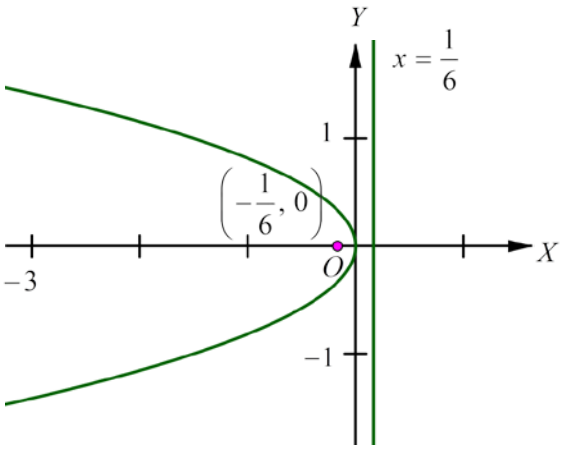
จะได้ว่า $4p = -\frac{2}{3}$ หรือ $p = -\frac{1}{6}$

ดังนั้น โฟกัสของพาราโบลาคือ $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$

ไดเรกตริกซ์คือ $x = \frac{1}{6}$

เลตัสเรกตัมยาว $\frac{2}{3}$ หน่วย

เนื่องจาก $p < 0$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านซ้าย และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



2. 1) จากโฟกัส คือ $F(2, 0)$ จะได้ว่า โฟกัสอยู่บนแกน X และจากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $y^2 = 4px$ และ $p = 2$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 8x$

2) จากโฟกัส คือ $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ จะได้ว่า โฟกัสอยู่บนแกน X และจากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $y^2 = 4px$ และ $p = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = -2x$

3) จากโฟกัส คือ $F(0,-8)$ จะได้ว่า โฟกัสอยู่บนแกน Y

และจากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2 = 4py$ และ $p = -8$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $x^2 = -32y$

4) จากโฟกัส คือ $F(0,5)$ จะได้ว่า โฟกัสอยู่บนแกน Y

และจากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2 = 4py$ และ $p = 5$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $x^2 = 20y$

5) จากไดเรกตริกซ์ คือ $y = 2$ จะได้ว่า ไดเรกตริกซ์ขนานแกน X

และจากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2 = 4py$ และ $p = -2$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $x^2 = -8y$

6) จากไดเรกตริกซ์ คือ $x = 6$ จะได้ว่า ไดเรกตริกซ์ขนานแกน Y

และจากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $y^2 = 4px$ และ $p = -6$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $y^2 = -24x$

7) จากไดเรกตริกซ์ คือ $x = -10$ จะได้ว่า ไดเรกตริกซ์ขนานแกน Y

และจากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $y^2 = 4px$ และ $p = 10$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $y^2 = 40x$

8) จากไดเรกตริกซ์ คือ $y=-\frac{1}{2}$ จะได้ว่า ไดเรกตริกซ์ขนานแกน X

และจากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2=4py$ และ $p=\frac{1}{2}$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $x^2=2y$

9) จากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

และจากโฟกัสอยู่บนแกน X ด้านบวก ห่างจากไดเรกตริกซ์ 2 หน่วย

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $y^2=4px$

และมีระยะห่างระหว่างจุดยอดและโฟกัสเท่ากับ $\frac{2}{2}=1$ หน่วย นั่นคือ $p=1$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $y^2=4x$

10) จากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

และไดเรกตริกซ์มีระยะตัดแกน Y (y-intercept) เป็น 6

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2=4py$ และ $p=-6$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $x^2=-24y$

11) จากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

และพาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น มีโฟกัสห่างจากจุดยอด 8 หน่วย

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2=4py$ และ $p=8$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $x^2=32y$

12) จากความยาวของเลตัสเรกตัมเท่ากับ 8 หน่วย

จะได้

$$|4p| = 8$$

$$|p| = 2$$

$$p = \pm 2$$

จากจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสอยู่บนแกน Y ด้านลบ

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2 = 4py$ และ $p = -2$

ดังนั้น สมการของพาราโบลา คือ $x^2 = -8y$

3. 1) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นพาราโบลาที่เส้นโค้งคว่ำลง

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2 = 4py$

โดยที่ โฟกัส คือ $F(0, -3)$ นั่นคือ $p = -3$

ดังนั้น สมการของพาราโบลานี้ คือ $x^2 = -12y$

2) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นพาราโบลาที่เส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $y^2 = 4px$

โดยที่ ไดเรกตริกซ์คือ $x = -2$ นั่นคือ $p = 2$

ดังนั้น สมการของพาราโบลานี้ คือ $y^2 = 8x$

3) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นพาราโบลาที่เส้นโค้งเปิดไปทางด้านซ้าย

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $y^2 = 4px$

โดยที่ โฟกัสคือ $F(-2, 0)$ นั่นคือ $p = -2$

ดังนั้น สมการของพาราโบลานี้ คือ $y^2 = -8x$

4) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นพาราโบลาที่เส้นโค้งหงายขึ้น

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2 = 4py$

โดยที่ โฟกัสคือ $F(0, 1)$ นั่นคือ $p = 1$

ดังนั้น สมการของพาราโบลานี้ คือ $x^2 = 4y$

5) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นพาราโบลาที่เส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $y^2 = 4px$

โดยที่ โฟกัสคือ $F(2, 0)$ นั่นคือ $p = 2$

ดังนั้น สมการของพาราโบลานี้ คือ $y^2 = 8x$

6) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นพาราโบลาที่เส้นโค้งคว่ำลง

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2 = 4py$

จากรูป ไดเรกตริกซ์คือ $y = 4$ นั่นคือ $p = -4$

ดังนั้น สมการของพาราโบลานี้ คือ $x^2 = -16y$

4. 1) พิจารณาภาคตัดขวางที่ผ่านแกนสมมาตรของจานรับสัญญาณดาวเทียมที่เป็นพาราโบลา

จากโจทย์กำหนดให้ จุดกำเนิดอยู่ที่จุดยอด และแกน Y ซ้อนกับแกนของพาราโบลา

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2 = 4py$

และจากจานรับสัญญาณดาวเทียมกว้าง 10 ฟุต และลึก $\frac{5}{3}$ ฟุต

จะได้ว่า พาราโบลาผ่านจุด $\left(5, \frac{5}{3}\right)$

แทน x และ y ด้วย 5 และ $\frac{5}{3}$ ตามลำดับ ใน $x^2 = 4py$

จะได้ $$5^2 = 4p\left(\frac{5}{3}\right)$$

นั่นคือ $$p = \frac{15}{4}$$

ดังนั้น สมการของพาราโบลานี้ คือ $x^2 = 15y$

2) ควรติดตั้งอุปกรณ์รวมสัญญาณไว้ที่โฟกัส คือ $\left(0, \frac{15}{4}\right)$ ซึ่งห่างจากจุดยอด

ไปทางด้านบน $\frac{15}{4}$ หน่วย

แบบฝึกหัด 3.2.4

1. 1) จาก $y^2 - x^2 = 1$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 1$ และ $b^2 = 1$ นั่นคือ $a = 1, b = 1$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

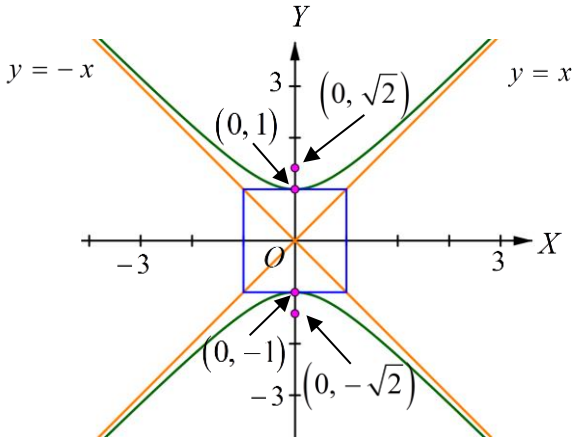
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 1 + 1 = 2$ นั่นคือ $c = \sqrt{2}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -1)$ และ $(0, 1)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, -\sqrt{2})$ และ $(0, \sqrt{2})$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



2) จาก $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 1$ และ $b^2 = 9$ นั่นคือ $a = 1, b = 3$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X

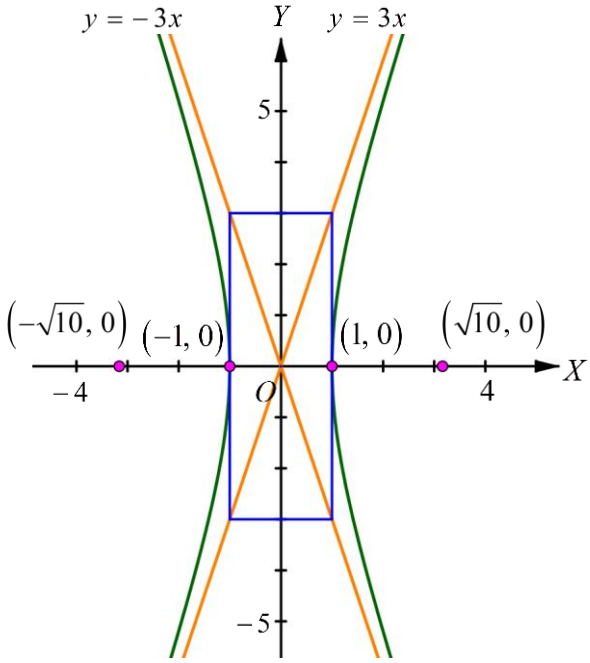
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 1 + 9 = 10$ นั่นคือ $c = \sqrt{10}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(-1, 0)$ และ $(1, 0)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(-\sqrt{10}, 0\right)$ และ $\left(\sqrt{10}, 0\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm 3x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



3) จาก $$x^2 - \frac{y^2}{25} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 1$ และ $b^2 = 25$ นั่นคือ $a = 1, b = 5$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X

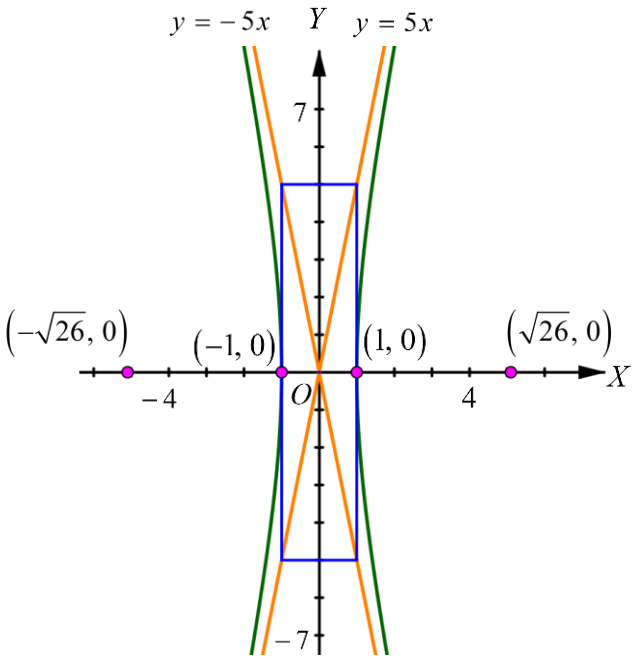
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 1 + 25 = 26$ นั่นคือ $c = \sqrt{26}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(-1, 0)$ และ $(1, 0)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $(-\sqrt{26}, 0)$ และ $(\sqrt{26}, 0)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm 5x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



4) จาก $$\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 2$ และ $b^2 = 1$ นั่นคือ $a = \sqrt{2}, b = 1$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

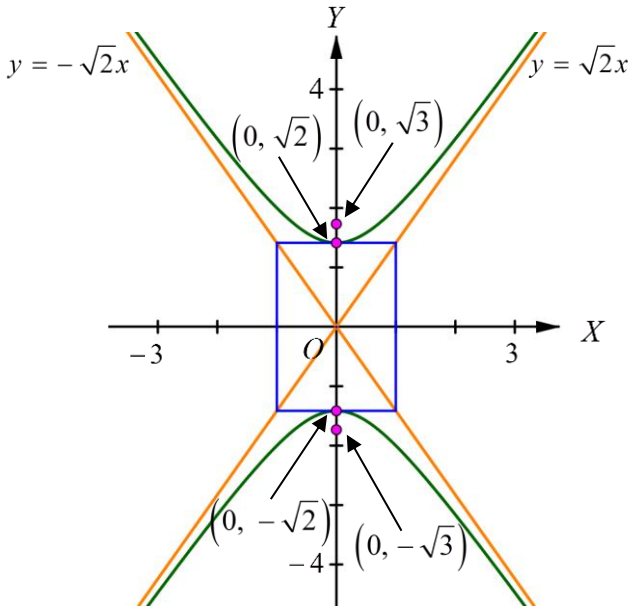
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 2+1 = 3$ นั่นคือ $c = \sqrt{3}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{2}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{2}\right)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{3}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{3}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\sqrt{2}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



5) จาก $$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 4$ และ $b^2 = 1$ นั่นคือ $a = 2, b = 1$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

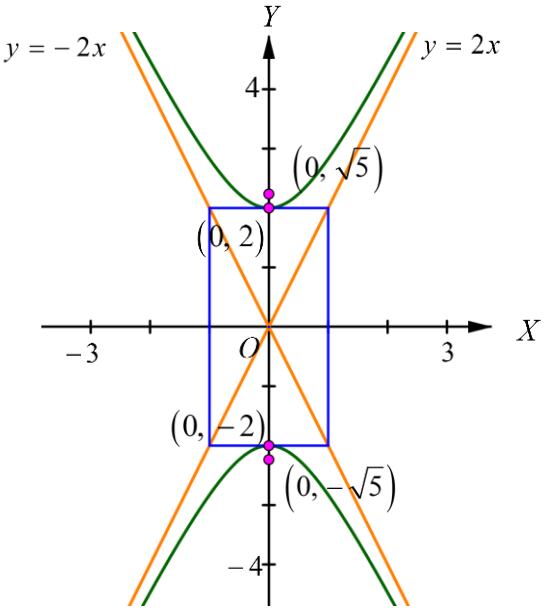
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 4+1 = 5$ นั่นคือ $c = \sqrt{5}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -2)$ และ $(0, 2)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{5}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{5}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm 2x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



6) จาก $$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 9$ และ $b^2 = 16$ นั่นคือ $a = 3, b = 4$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X

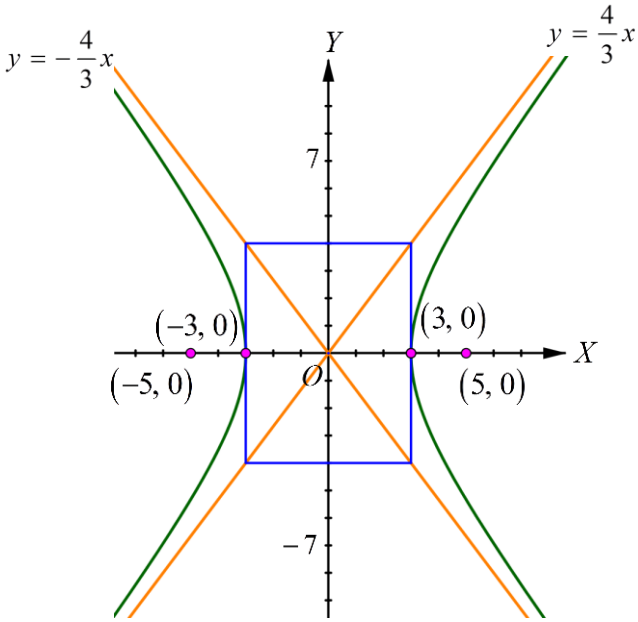
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 9 + 16 = 25$ นั่นคือ $c = 5$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{4}{3}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



7) จาก $$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 4$ และ $b^2 = 16$ นั่นคือ $a = 2, b = 4$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

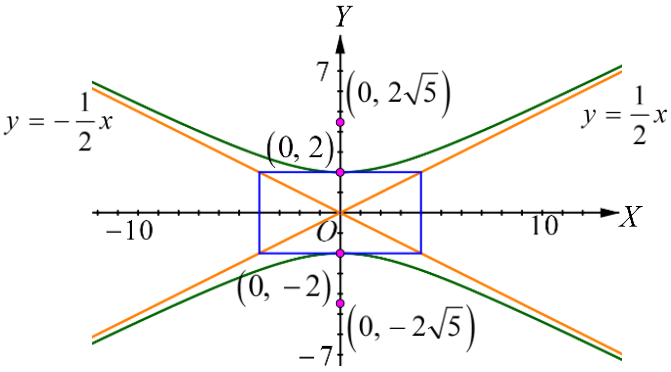
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 4 + 16 = 20$ นั่นคือ $c = 2\sqrt{5}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -2)$ และ $(0, 2)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -2\sqrt{5}\right)$ และ $\left(0, 2\sqrt{5}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{1}{2}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



8) จาก $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลาในรูปมาตรฐานดังนี้

$$x^2 - 4y^2 = 8$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{4}{8}y^2 = \frac{8}{8}$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 8$ และ $b^2 = 2$ นั่นคือ $a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X

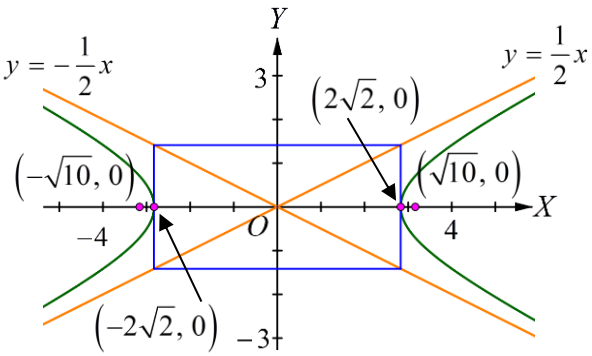
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 8 + 2 = 10$ นั่นคือ $c = \sqrt{10}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$ และ $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(-\sqrt{10}, 0\right)$ และ $\left(\sqrt{10}, 0\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{1}{2}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



9) จาก $y^2 - 2x^2 = 3$

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลาในรูปมาตรฐานดังนี้

$$\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3}x^2 = \frac{3}{3}$$

$$\frac{y^2}{3} - \frac{2x^2}{3} = 1$$

$$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 3$ และ $b^2 = \frac{3}{2}$ นั่นคือ $a = \sqrt{3},\ b = \sqrt{\frac{3}{2}}$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

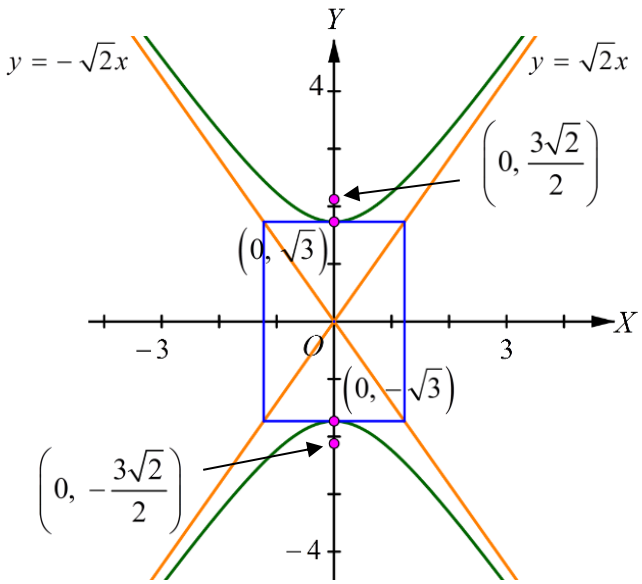
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ นั่นคือ $c = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{3}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{3}\right)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\sqrt{2}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



10) จาก $16x^2 - y^2 = 144$

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลาในรูปมาตรฐานดังนี้

$$\frac{16}{144}x^2 - \frac{1}{144}y^2 = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{144} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 9$ และ $b^2 = 144$ นั่นคือ $a = 3, b = 12$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X

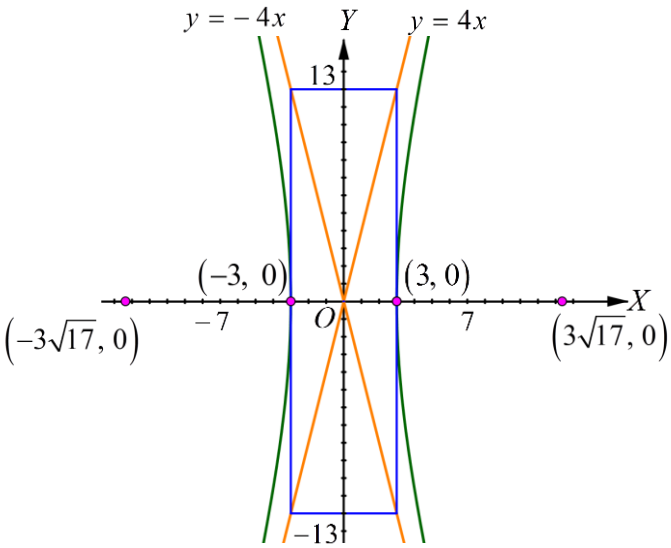
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 9 + 144 = 153$ นั่นคือ $c = 3\sqrt{17}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(-3\sqrt{17}, 0\right)$ และ $\left(3\sqrt{17}, 0\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm 4x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



11) จาก $$y^2 - x^2 - 4 = 0$$

เขียนสมการไฮเพอร์โบลาในรูปมาตรฐานได้ดังนี้

$$y^2 - x^2 = 4$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $a^2=4$ และ $b^2=4$ นั่นคือ $a=2, b=2$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

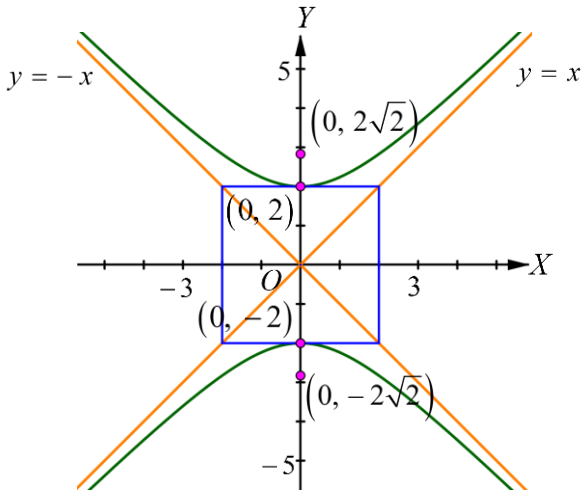
จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=4+4=8$ นั่นคือ $c=2\sqrt{2}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(0,-2)$ และ $(0,2)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0,-2\sqrt{2}\right)$ และ $\left(0,2\sqrt{2}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



12) จาก $9y^2-4x^2 = 36$

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลาในรูปมาตรฐานดังนี้

$$\frac{9}{36}y^2-\frac{4}{36}x^2 = \frac{36}{36}$$

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $a^2=4$ และ $b^2=9$ นั่นคือ $a=2, b=3$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

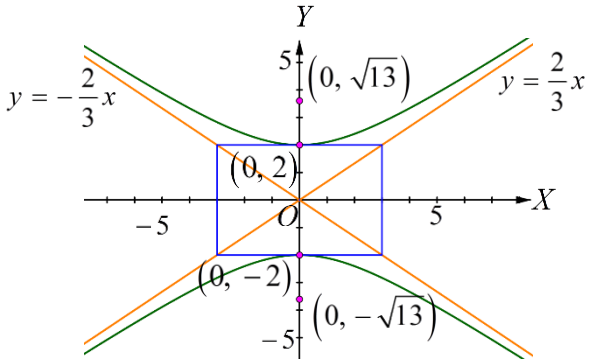
จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=4+9=13$ นั่นคือ $c=\sqrt{13}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(0,-2)$ และ $(0,2)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0,-\sqrt{13}\right)$ และ $\left(0,\sqrt{13}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm\frac{2}{3}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



13) จาก $25y^2-9x^2 = 225$

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลาในรูปมาตรฐานดังนี้

$$\frac{25}{225}y^2-\frac{9}{225}x^2 = \frac{225}{225}$$

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $a^2=9$ และ $b^2=25$ นั่นคือ $a=3, b=5$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

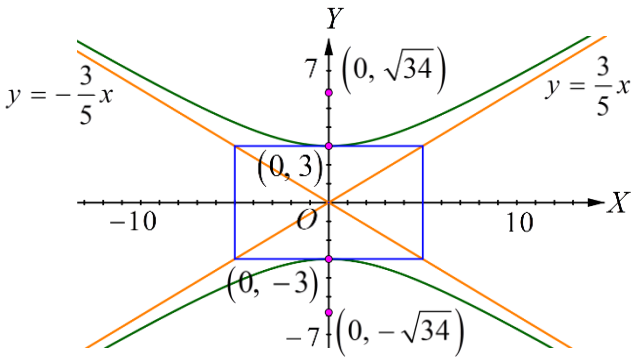
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 9 + 25 = 34$ นั่นคือ $c = \sqrt{34}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -3)$ และ $(0, 3)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{34}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{34}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{3}{5}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



14) จาก $$9y^2 - 25x^2 = 225$$

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลาในรูปมาตรฐานดังนี้

$$\frac{9}{225}y^2 - \frac{25}{225}x^2 = \frac{225}{225}$$

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 25$ และ $b^2 = 9$ นั่นคือ $a = 5, b = 3$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

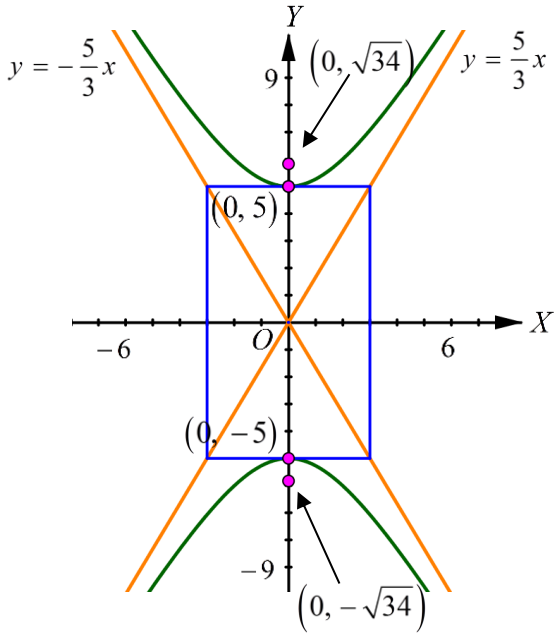
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 25 + 9 = 34$ นั่นคือ $c = \sqrt{34}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -5)$ และ $(0, 5)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\sqrt{34}\right)$ และ $\left(0, \sqrt{34}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{5}{3}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



15) จาก $$9y^2 - 16x^2 = 1$$

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลาในรูปมาตรฐานดังนี้

$$\frac{y^2}{\frac{1}{9}} - \frac{x^2}{\frac{1}{16}} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = \frac{1}{9}$ และ $b^2 = \frac{1}{16}$ นั่นคือ $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{4}$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

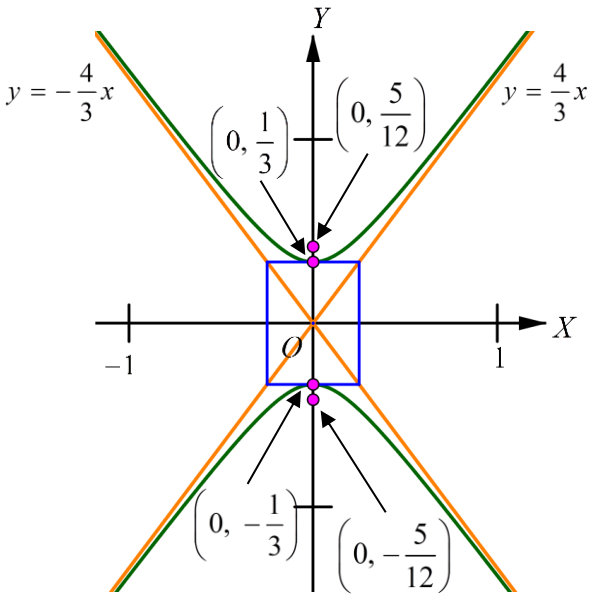
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144}$ นั่นคือ $c = \frac{5}{12}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ และ $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0, -\frac{5}{12}\right)$ และ $\left(0, \frac{5}{12}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{4}{3}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



16) จาก $y^2 - 4x^2 + 1 = 0$

จะได้ สมการไฮเพอร์โบลาในรูปมาตรฐานได้ดังนี้

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{1} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $a^2=\frac{1}{4}$ และ $b^2=1$ นั่นคือ $a=\frac{1}{2}, b=1$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X

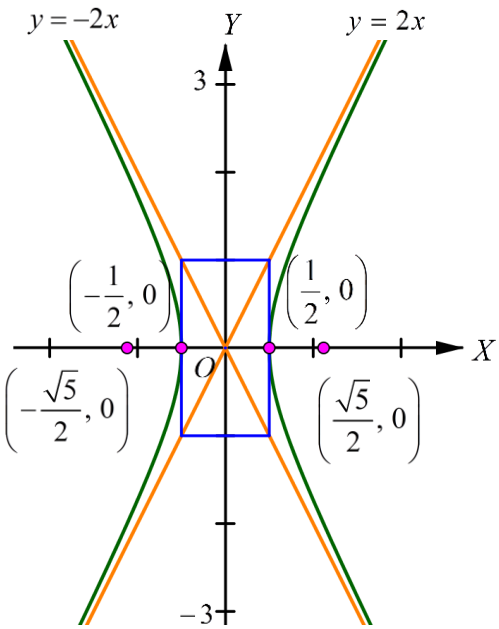
จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$ นั่นคือ $c=\frac{\sqrt{5}}{2}$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่จุด $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

โฟกัสอยู่ที่จุด $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm 2x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



2. 1) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางในแนวนอน

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

โดยที่ จุดยอดอยู่ที่จุด $(-2, 0), (2, 0)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(-4, 0), (4, 0)$

นั่นคือ $a=2$ และ $c=4$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $b^2=c^2-a^2=4^2-2^2=16-4=12$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

2) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางในแนวตั้ง

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

โดยที่ จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -12), (0, 12)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, -13), (0, 13)$

นั่นคือ $a=12$ และ $c=13$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $b^2=c^2-a^2=13^2-12^2=169-144=25$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$

3) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางในแนวตั้ง

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

โดยที่ จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -4), (0, 4)$ นั่นคือ $a=4$

และกราฟผ่านจุด $(3, -5)$

แทน a, x และ y ด้วย $4, 3$ และ -5 ตามลำดับ ใน $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

จะได้

$$\frac{(-5)^2}{4^2}-\frac{3^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{25}{16}-\frac{9}{b^2} = 1$$

$$\frac{9}{b^2} = \frac{9}{16}$$

$$b^2 = \frac{9\times16}{9}$$

$$b^2 = 16$$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{16}=1$

4) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางในแนวนอน

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

โดยที่ จุดยอดอยู่ที่จุด $\left(-2\sqrt{3}, 0\right), \left(2\sqrt{3}, 0\right)$ นั่นคือ $a = 2\sqrt{3}$

และกราฟผ่านจุด $(4, 4)$

แทน a, x และ y ด้วย $2\sqrt{3}, 4$ และ 4 ตามลำดับ ใน $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

จะได้

$$\frac{4^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}-\frac{4^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{16}{12}-\frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{16}{b^2} = \frac{4}{12}$$

$$b^2 = \frac{16\times12}{4}$$

$$b^2 = 48$$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{48}=1$

5) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางในแนวนอน

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

โดยที่ จุดยอดอยู่ที่จุด $(-3, 0), (3, 0)$ นั่นคือ $a=3$

และเส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm\frac{1}{2}x$ เมื่อเทียบกับ $y=\pm\frac{b}{a}x$

จะได้ $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $a=3$

นั่นคือ $\frac{b}{3} = \frac{1}{2}$

$b = \frac{3}{2}$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{x^2}{9}-\frac{4y^2}{9}=1$

6) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางในแนวตั้ง

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

โดยที่ จุดยอดอยู่ที่จุด $(0, -3), (0, 3)$ นั่นคือ $a=3$

และเส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm 3x$ เมื่อเทียบกับ $y=\pm\frac{a}{b}x$

จะได้ $\frac{a}{b} = 3$

เนื่องจาก $a=3$

นั่นคือ $\frac{3}{b} = 3$

$b = 1$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{y^2}{9}-x^2=1$

3. 1) จากโฟกัส คือ จุด $(0,-5),(0,5)$ และจุด $(0,-3),(0,3)$ เป็นจุดยอด

จะได้ $a=3, c=5$ และจุดยอดอยู่บนแกน Y

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $b^2=c^2-a^2=5^2-3^2=25-9=16$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$

2) จากโฟกัส คือ จุด $(-10,0),(10,0)$ และจุด $(-8,0),(8,0)$ เป็นจุดยอด

จะได้ $a=8, c=10$ และจุดยอดอยู่บนแกน X

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $b^2=c^2-a^2=10^2-8^2=100-64=36$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

3) จากโฟกัส คือ จุด $(-2,0),(2,0)$ และจุด $(-1,0),(1,0)$ เป็นจุดยอด

จะได้ $a=1, c=2$ และจุดยอดอยู่บนแกน X

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $b^2=c^2-a^2=2^2-1^2=4-1=3$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

4) จากโฟกัส คือ จุด $(0,-6),(0,6)$ และจุด $(0,-2),(0,2)$ เป็นจุดยอด

จะได้ $a=2, c=6$ และจุดยอดอยู่บนแกน Y

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $b^2=c^2-a^2=6^2-2^2=36-4=32$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{32}=1$

5) จากจุดยอด คือ จุด $(-1,0),(1,0)$ จะได้ $a=1$ และจุดยอดอยู่บนแกน X

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

และจากเส้นกำกับ คือ $y=\pm 5x$ เมื่อเทียบกับ $y=\pm\frac{b}{a}x$

จะได้ $\frac{b}{a} = 5$

เนื่องจาก $a=1$

นั่นคือ $\frac{b}{1} = 5$

$b = 5$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $x^2-\frac{y^2}{25}=1$

6) จากจุดยอด คือ จุด $(0,-6),(0,6)$ จะได้ $a=6$ และจุดยอดอยู่บนแกน Y

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

และจากเส้นกำกับ คือ $y=\pm\frac{1}{3}x$ เมื่อเทียบกับ $y=\pm\frac{a}{b}x$

จะได้ $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$

เนื่องจาก $a = 6$

นั่นคือ $\frac{6}{b} = \frac{1}{3}$

$b = 18$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{324} = 1$

7) จากโฟกัส คือ จุด $(0, -8), (0, 8)$ จะได้ $c = 8$ และจุดยอดอยู่บนแกน Y

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

และจากเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{1}{2}x$ เมื่อเทียบกับ $y = \pm\frac{a}{b}x$

นั่นคือ $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

$a = \frac{b}{2}$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$

จะได้ $8^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2$

$64 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2$

$64 = \frac{b^2}{4} + b^2$

$64 = \frac{5}{4}b^2$

$b^2 = \frac{64 \times 4}{5}$

$$b^2 = \frac{256}{5}$$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $a^2 = c^2 - b^2 = 8^2 - \frac{256}{5} = 64 - \frac{256}{5} = \frac{64}{5}$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{5y^2}{64} - \frac{5x^2}{256} = 1$

8) จากจุดยอด คือ จุด $(0, -6), (0, 6)$ และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(-5, 9)$

จะได้จุดยอดอยู่บนแกน Y

และแทน a, x และ y ด้วย $6, -5$ และ 9 ตามลำดับ ใน $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้

$$\frac{9^2}{6^2} - \frac{(-5)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{81}{36} - \frac{25}{b^2} = 1$$

$$\frac{25}{b^2} = \frac{45}{36}$$

$$b^2 = \frac{25 \times 36}{45}$$

$$b^2 = 20$$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{20} = 1$

9) จากเส้นกำกับ คือ $y = \pm x$ และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(5, 3)$

กรณีที่ 1 ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

และจากเส้นกำกับ คือ $y = \pm x$ เมื่อเทียบกับ $y = \pm \frac{a}{b} x$

จะได้ $\frac{a}{b} = 1$

นั่นคือ $a = b$

เนื่องจากไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(5, 3)$ จะได้ $x = 5, y = 3$

แทน a, x และ y ด้วย $b, 5$ และ 3 ตามลำดับ ใน $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้
$$\frac{3^2}{b^2} - \frac{5^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{9}{b^2} - \frac{25}{b^2} = 1$$
$$b^2 = 9 - 25$$
$$b^2 = -16$$
ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2 ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

และจากเส้นกำกับ คือ $y = \pm x$ เมื่อเทียบกับ $y = \pm \frac{b}{a} x$

จะได้
$$\frac{b}{a} = 1$$
นั่นคือ
$$b = a$$

เนื่องจากไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(5, 3)$ จะได้ $x = 5, y = 3$

แทน b, x และ y ด้วย $a, 5$ และ 3 ตามลำดับ ใน $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้
$$\frac{5^2}{a^2} - \frac{3^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{25}{a^2} - \frac{9}{a^2} = 1$$
$$a^2 = 25 - 9$$
$$a^2 = 16$$

นั่นคือ $a^2 = b^2 = 16$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$

10) จากโฟกัส คือ จุด $(-3, 0), (3, 0)$ และไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(4, 1)$

จะได้ $c = 3,\ x = 4,\ y = 1$ และแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลานี้มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

แทน x และ y ด้วย 4 และ 1 ตามลำดับ ใน $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้
$$\frac{4^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{16}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$
$$16b^2 - a^2 = a^2b^2 \qquad ---(1)$$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$

จะได้
$$a^2 + b^2 = 3^2$$
$$a^2 = 9 - b^2$$

แทน a^2 ด้วย $9 - b^2$ ใน (1)

จะได้
$$16b^2 - (9 - b^2) = (9 - b^2)b^2$$
$$16b^2 - 9 + b^2 = 9b^2 - b^4$$
$$b^4 + 8b^2 - 9 = 0$$
$$(b^2 + 9)(b^2 - 1) = 0$$

นั่นคือ
$$b^2 = 1$$

จะได้
$$a^2 = 9 - 1$$
$$a^2 = 8$$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$

11) จากโฟกัส คือ จุด $(-5, 0), (5, 0)$ และแกนตามขวางยาว 6 หน่วย

จะได้ $a = 3, c = 5$ และแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลานี้มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

12) จากโฟกัส คือ จุด $(0, -1), (0, 1)$ และแกนตามขวางยาว 1 หน่วย

จะได้ $a = \frac{1}{2}, c = 1$ และแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลานี้มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $b^2 = c^2 - a^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $4y^2 - \frac{4x^2}{3} = 1$

4. จาก $x^2 - y^2 = 4$ จะได้ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

จะเห็นว่า สัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นจำนวนบวก

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลานี้มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

นั่นคือ ไฮเพอร์โบลานี้มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a^2 = b^2 = 4$ นั่นคือ $a = b = 2$

ดังนั้น เส้นกำกับคือเส้นตรง $y_1 = x$ และ $y_2 = -x$

ให้ m_1 และ m_2 แทนความชันของเส้นตรง $y_1 = x$ และ $y_2 = -x$ ตามลำดับ

จะได้ $m_1 = 1$ และ $m_2 = -1$

นั่นคือ $m_1 m_2 = 1(-1) = -1$

ดังนั้น เส้นตรง $y_1 = x$ และ $y_2 = -x$ ตั้งฉากกัน

นั่นคือ เส้นกำกับของ $x^2 - y^2 = 4$ ทั้งสองเส้นนี้ตั้งฉากกัน

5. จากไฮเพอร์โบลานี้มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ และเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{b}{a}x$

เนื่องจากเส้นกำกับตั้งฉากกัน ดังนั้น $\left(\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) = -1$

จะได้ $-\frac{b^2}{a^2} = -1$ ดังนั้น $b^2 = a^2$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ นั่นคือ $a^2 = \frac{c^2}{2}$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{2x^2}{c^2} - \frac{2y^2}{c^2} = 1$

6. จากข้อความ ถ้า $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ เป็นสมการไฮเพอร์โบลา แล้ว $a > b$

ยกตัวอย่างค้านได้ดังนี้

$x^2 - \frac{y^2}{25} = 1$ เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ซึ่ง $a = 1$ และ $b = 5$ นั่นคือ $a < b$

7. จากกราฟ $x^2 - \frac{y^2}{k^2} = 1$

จะเห็นว่า สัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นจำนวนบวก

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลานี้มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

นั่นคือมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a^2 = 1$ และ $b^2 = k^2$ นั่นคือ $a = 1$ และ $b = k$

นั่นคือ ความยาวของแกนสังยุคเป็น $2k$ หน่วย และมีสมการของเส้นกำกับเป็น $y = \pm kx$

ดังนั้น เมื่อ k เพิ่มขึ้นในช่วง $(0, \infty)$ กิ่งของไฮเพอร์โบลาจะขยับเข้าหาแกน Y

นั่นคือ ไฮเพอร์โบลาจะยิ่งกางมากขึ้นเรื่อย ๆ ตามค่า k ที่เพิ่มขึ้น

8. เนื่องจากเส้นกำกับตั้งฉากกัน จะได้ $\left(\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$ นั่นคือ $-\frac{b^2}{a^2}=-1$

จะได้ $b^2=a^2$ ดังนั้น $b=a$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=a^2+a^2=2a^2$ นั่นคือ $c=a\sqrt{2}$

เนื่องจากดวงอาทิตย์อยู่ที่โฟกัสจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลา ขณะที่ดาวหางโคจรใกล้ดวงอาทิตย์มากสุด นั่นคือ ดาวหางต้องอยู่ที่จุดยอดของไฮเพอร์โบลา

เนื่องจากดาวหางอยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ 2×10^9 ไมล์

จะได้

$$\begin{aligned} c-a &= 2\times10^9 \\ a\sqrt{2}-a &= 2\times10^9 \\ a\left(\sqrt{2}-1\right) &= 2\times10^9 \\ a &\approx 4.83\times10^9 \end{aligned}$$

นั่นคือ $b \approx 4.83\times10^9$

ดังนั้น สมการของเส้นทางโคจร คือ $\frac{x^2}{\left(4.83\times10^9\right)^2}-\frac{y^2}{\left(4.83\times10^9\right)^2}=1$

หรือ $\frac{x^2}{23.33\times10^{18}}-\frac{y^2}{23.33\times10^{18}}=1$

9. จาก $$\frac{x^2}{(1/2)^2}-\frac{y^2}{3^2} = 1$$

เทียบกับสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ จะได้ว่า $a=\frac{1}{2}$ และ $b=3$

เนื่องจากความกว้าง ณ ส่วนที่แคบที่สุดของเสา คือความยาวของแกนตามขวางซึ่งเท่ากับ $2a$

ดังนั้น ณ ส่วนที่แคบที่สุดของเสามีความกว้างเป็น $2\left(\frac{1}{2}\right)=1$ เมตร

เนื่องจากส่วนบนของเสาตัดแกน Y ที่จุด $(0, 2)$

แทน y ด้วย 2 ใน $\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{2^2}{3^2} &= 1 \\
4x^2 - \frac{4}{9} &= 1 \\
4x^2 &= \frac{13}{9} \\
x^2 &= \frac{13}{36} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{13}{36}} \\
x &= \pm\frac{\sqrt{13}}{6}
\end{aligned}$$

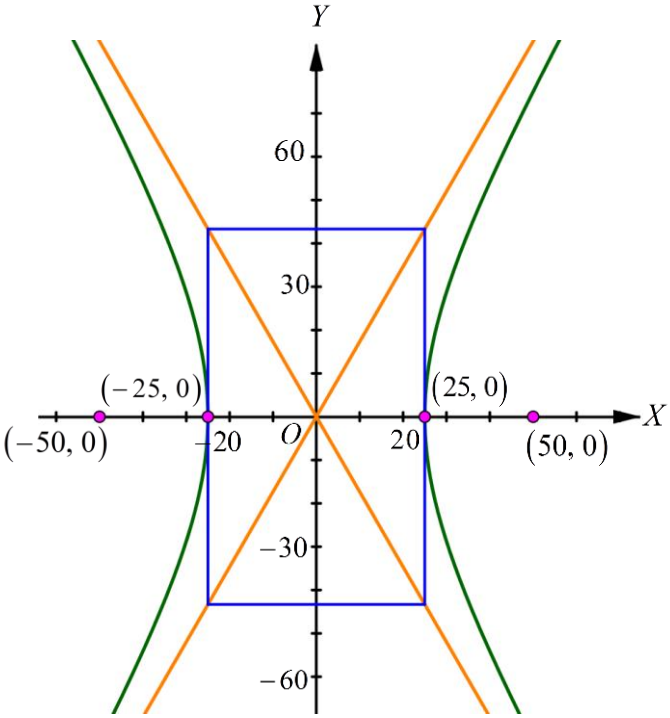
ดังนั้น ส่วนบนของเสามีความกว้างเป็น $2 \times \dfrac{\sqrt{13}}{6} = \dfrac{\sqrt{13}}{3} \approx 1.2$ เมตร

10. จากบทนิยามของไฮเพอร์โบลา จะได้ว่า $2a = 50$

เนื่องจาก $2a = 50$ และ $2c = 100$ นั้นคือ $a = 25$ และ $c = 50$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $b^2 = c^2 - a^2 = 50^2 - 25^2 = 2500 - 625 = 1875$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งแสดงตำแหน่งทั้งหมดของเรือที่เป็นไปได้ คือ $\dfrac{x^2}{625} - \dfrac{y^2}{1875} = 1$



11. 1) จากโจทย์ สามารถอธิบายตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกลุ่มลักลอบล่าสัตว์ด้วยสมการไฮเพอร์โบลาซึ่งหน่วยย่อยทั้งสองของเจ้าหน้าที่ป่าไม้คือโฟกัสของไฮเพอร์โบลา

เนื่องจาก หน่วยย่อยทั้งสองหน่วยอยู่ห่างกัน 6 กิโลเมตร

และตำแหน่งของหน่วยย่อยทั้งสองอยู่บนแกน X

นั่นคือ หน่วยย่อยทั้งสองอยู่ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$ จะได้ $c = 3$

เนื่องจาก หน่วยย่อยหน่วยหนึ่งได้ยินเสียงปืนของกลุ่มลักลอบล่าสัตว์ ก่อนอีกหน่วยย่อยเป็นระยะเวลา 4 วินาที และเสียงมีความเร็วประมาณ 0.35 กิโลเมตรต่อวินาที

และจาก $v = \frac{s}{t}$

จะได้ $0.35 = \frac{s}{4}$

$s = 1.4$

แสดงว่าผลต่างของระยะทางจากกลุ่มลักลอบล่าสัตว์ไปยังหน่วยย่อยทั้งสองหน่วย เป็น 1.4 กิโลเมตร

นั่นคือ $2a = 1.4$

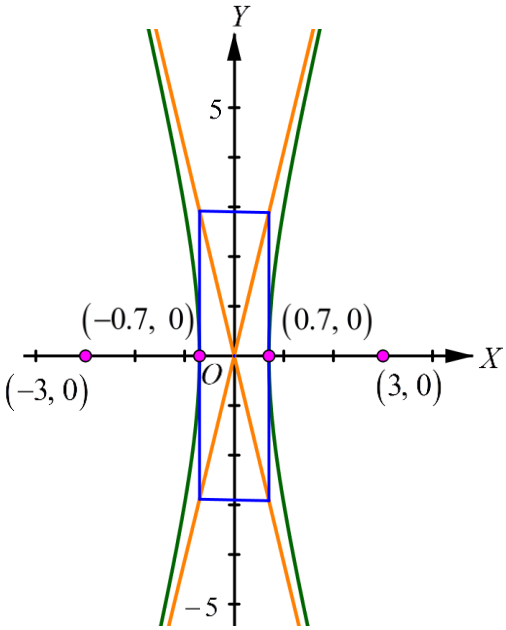
$a = 0.7$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $b^2 = c^2 - a^2 = 3^2 - 0.7^2 = 9 - 0.49 = 8.51$

ดังนั้น สมการอธิบายตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกลุ่มลักลอบล่าสัตว์ คือ

$$\frac{x^2}{0.49} - \frac{y^2}{8.51} = 1$$

2) เขียนกราฟของตำแหน่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกลุ่มลักลอบล่าสัตว์ได้ดังนี้



และหน่วยย่อยของเจ้าหน้าที่ป่าไม้ทั้งสองอยู่ที่จุด $(-3, 0)$ และ $(3, 0)$

แบบฝึกหัด 3.2.5

1. 1) จาก $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

จะเห็นว่าตัวหารของ $(y-2)^2$ มากกว่าตัวหารของ $(x-1)^2$

ดังนั้น แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

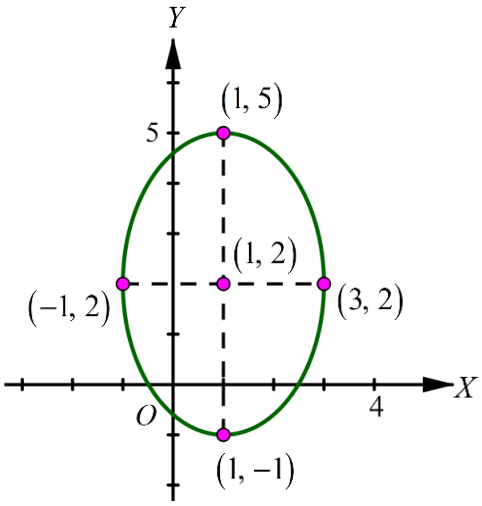
จะได้ว่า $h=1, k=2, a^2=9$ และ $b^2=4$ นั่นคือ $a=3$ และ $b=2$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=9-4=5$ นั่นคือ $c=\sqrt{5}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 2)$ โฟกัส คือ $(1, 2\pm\sqrt{5})$

จุดยอด คือ $(1, -1)$ และ $(1, 5)$ แกนเอกยาว 6 หน่วย

แกนโทยาว 4 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



2) จาก $$(y+3)^2+\frac{(x-3)^2}{16} = 1$$

จะเห็นว่าตัวหารของ $(x-3)^2$ มากกว่าตัวหารของ $(y+3)^2$

ดังนั้น แกนเอกอยู่ในแนวนอน

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

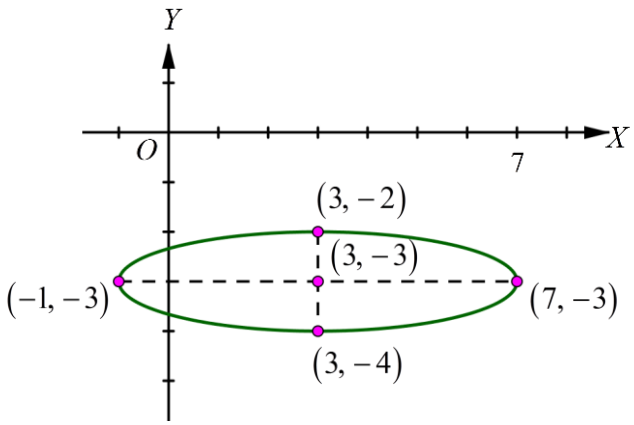
จะได้ว่า $h=3, k=-3, a^2=16$ และ $b^2=1$ นั่นคือ $a=4$ และ $b=1$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=16-1=15$ นั่นคือ $c=\sqrt{15}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(3,-3)$ โฟกัส คือ $(3\pm\sqrt{15},\ -3)$

จุดยอด คือ $(-1,-3)$ และ $(7,-3)$ แกนเอกยาว 8 หน่วย

แกนโทยาว 2 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



3) จาก $$\frac{y^2}{9}+\frac{(x+5)^2}{25} = 1$$

จะเห็นว่าตัวหารของ $(x+5)^2$ มากกว่าตัวหารของ y^2

ดังนั้น แกนเอกอยู่ในแนวนอน

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

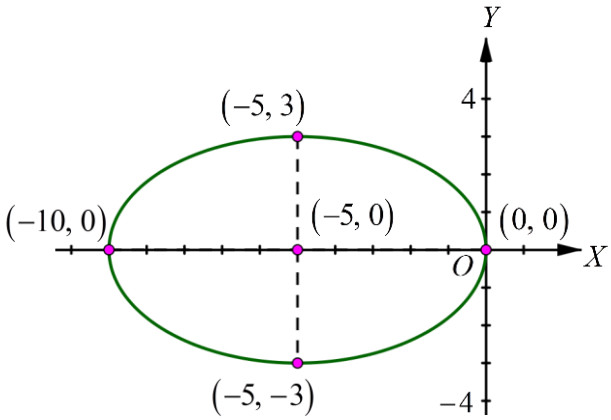
จะได้ว่า $h=-5, k=0, a^2=25$ และ $b^2=9$ นั่นคือ $a=5$ และ $b=3$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=25-9=16$ นั่นคือ $c=4$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(-5, 0)$ โฟกัส คือ $(-9, 0)$ และ $(-1, 0)$

จุดยอด คือ $(-10, 0)$ และ $(0, 0)$ แกนเอกยาว 10 หน่วย

แกนโทยาว 6 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



4) จาก $$x^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

จะเห็นว่าตัวหารของ $(y+2)^2$ มากกว่าตัวหารของ x^2

ดังนั้น แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

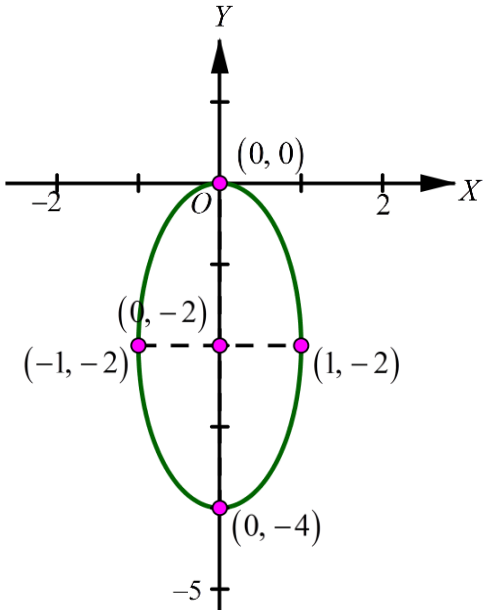
จะได้ว่า $h=0, k=-2, a^2=4$ และ $b^2=1$ นั่นคือ $a=2$ และ $b=1$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=4-1=3$ นั่นคือ $c=\sqrt{3}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(0, -2)$ โฟกัส คือ $(0, -2\pm\sqrt{3})$

จุดยอด คือ $(0, -4)$ และ $(0, 0)$ แกนเอกยาว 4 หน่วย

แกนโทยาว 2 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



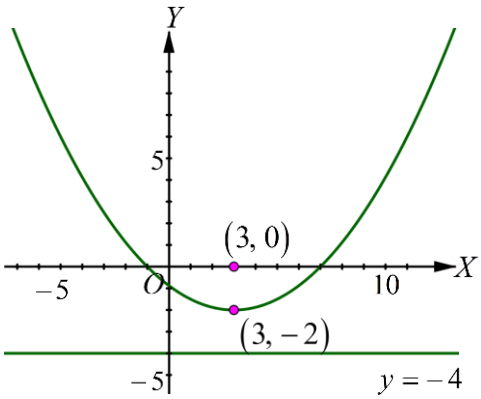
2. 1) จาก $(x-3)^2 = 8(y+2)$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

จะได้ว่า $h = 3, k = -2, 4p = 8$ นั่นคือ $p = 2$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(3, -2)$ โฟกัส คือ $(3, 0)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y = -4$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



2) จาก $(y-5)^2 = -6x+12$

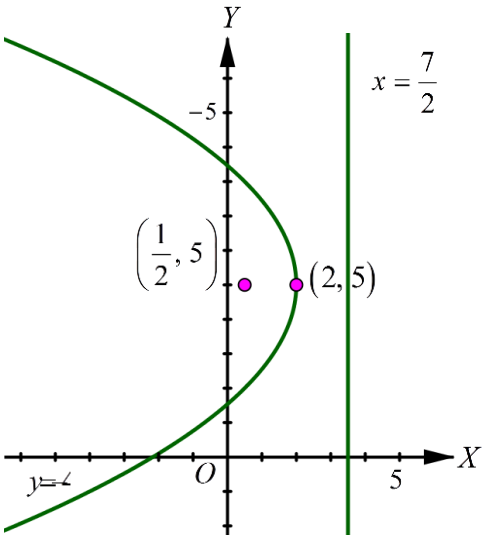
จะได้ $(y-5)^2 = -6(x-2)$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

จะได้ว่า $h=2, k=5, 4p=-6$ นั่นคือ $p=-\frac{3}{2}$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(2, 5)$ โฟกัส คือ $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x=\frac{7}{2}$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



3) จาก $-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = y$

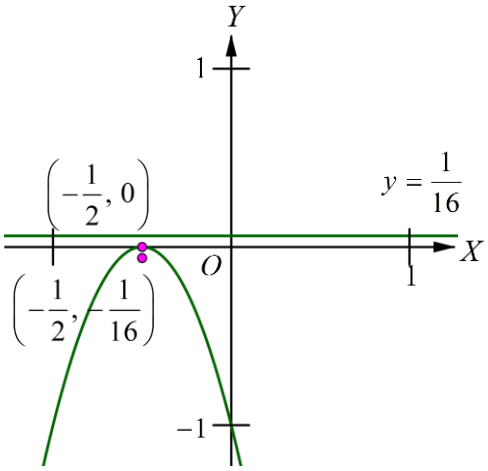
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}y$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

จะได้ว่า $h=-\frac{1}{2}, k=0, 4p=-\frac{1}{4}$ นั่นคือ $p=-\frac{1}{16}$

ดังนั้น จุดยอด คือ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ โฟกัส คือ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y = \frac{1}{16}$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



4) จาก $y^2 = 16x + 8$

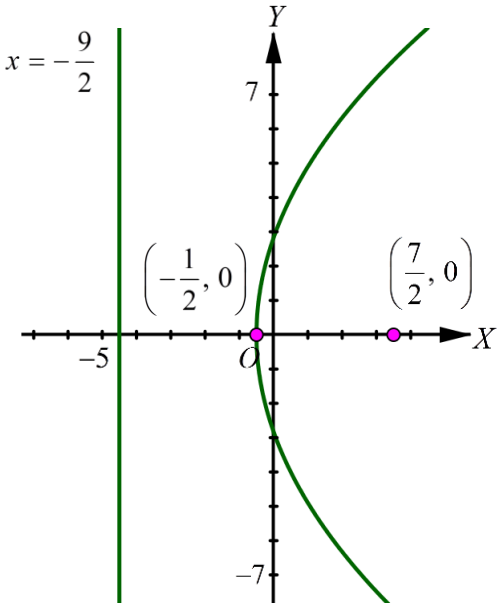
จะได้ $y^2 = 16\left(x + \frac{1}{2}\right)$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

จะได้ว่า $h = -\frac{1}{2}, k = 0, 4p = 16$ นั่นคือ $p = 4$

ดังนั้น จุดยอด คือ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ โฟกัส คือ $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x = -\frac{9}{2}$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



3. 1) จาก $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{16} = 1$

เทียบรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=1, k=-3, a^2=9, b^2=16$ นั่นคือ $a=3$ และ $b=4$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน

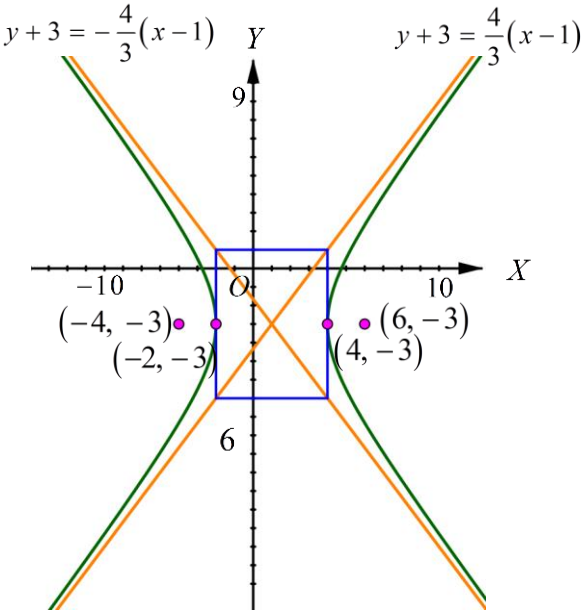
จุดยอดและโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $y=-3$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=9+16=25$ นั่นคือ $c=5$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(1,-3)$ โฟกัส คือ $(-4,-3)$ และ $(6,-3)$

จุดยอด คือ $(-2,-3)$ และ $(4,-3)$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y+3=\pm\frac{4}{3}(x-1)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



2) จาก $(x+8)^2-(y-6)^2 = 1$

เทียบรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=-8, k=6, a^2=1, b^2=1$ นั่นคือ $a=1$ และ $b=1$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน

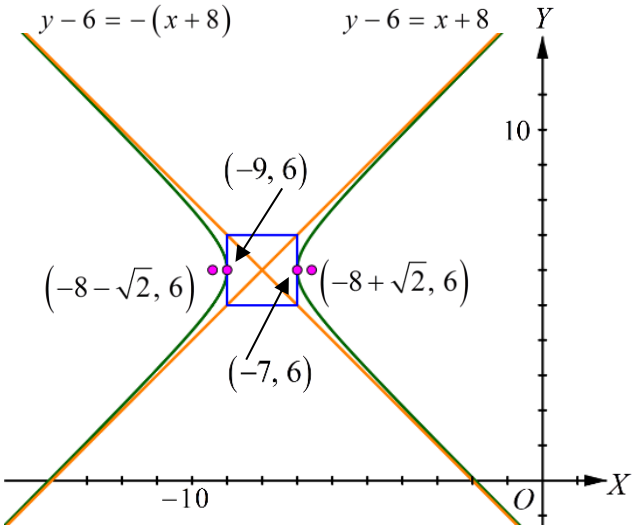
จุดยอดและโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $y=6$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=1+1=2$ นั่นคือ $c=\sqrt{2}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(-8, 6)$ โฟกัส คือ $(-8-\sqrt{2}, 6)$ และ $(-8+\sqrt{2}, 6)$

จุดยอด คือ $(-9, 6)$ และ $(-7, 6)$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y-6=\pm(x+8)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



3) จาก $$y^2-\frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

เทียบรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=1, k=0, a^2=1, b^2=4$ นั่นคือ $a=1$ และ $b=2$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง

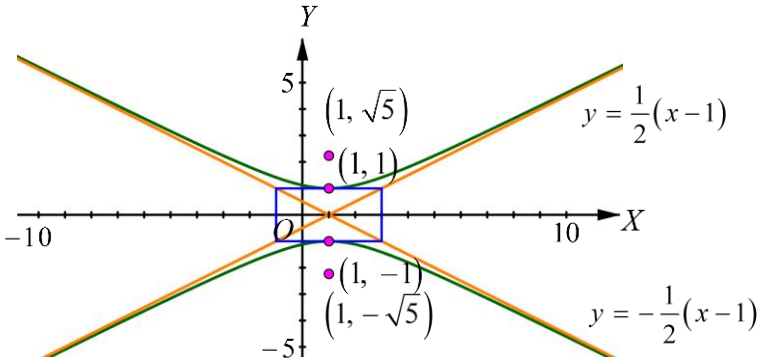
จุดยอดและโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $x=1$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=1+4=5$ นั่นคือ $c=\sqrt{5}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 0)$ โฟกัส คือ $(1, -\sqrt{5})$ และ $(1, \sqrt{5})$

จุดยอด คือ $(1, -1)$ และ $(1, 1)$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y=\pm\frac{1}{2}(x-1)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



4) จาก $$\frac{(y-1)^2}{25} - (x-3)^2 = 1$$

เทียบรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $h = 3, k = 1, a^2 = 25, b^2 = 1$ นั่นคือ $a = 5$ และ $b = 1$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง

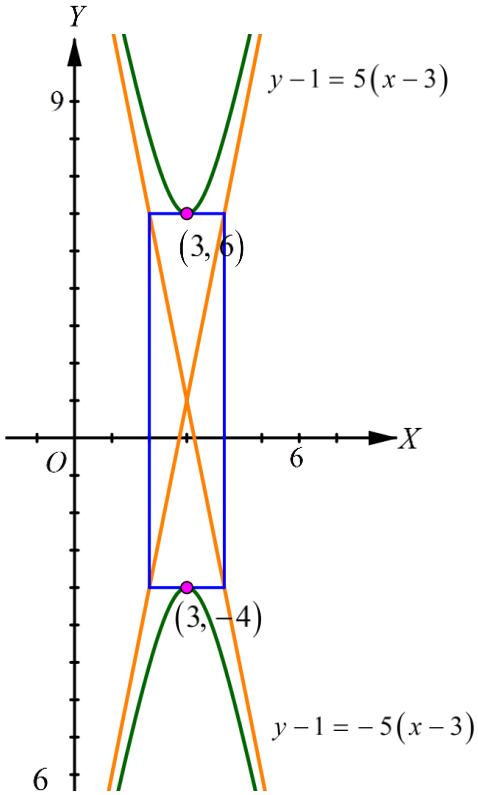
จุดยอดและโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $x = 3$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 25 + 1 = 26$ นั่นคือ $c = \sqrt{26}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(3, 1)$ โฟกัส คือ $(3, 1-\sqrt{26})$ และ $(3, 1+\sqrt{26})$

จุดยอด คือ $(3, -4)$ และ $(3, 6)$ เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y - 1 = \pm 5(x-3)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



4. 1) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นพาราโบลาที่เส้นโค้งคว่ำลง

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(x-h)^2=4p(y-k)$

โดยที่ จุดยอดคือ $(0,4)$ และกราฟผ่านจุด $(1,0)$

แทน h, k, x และ y ด้วย $0, 4, 1$ และ 0 ตามลำดับ ใน $(x-h)^2=4p(y-k)$

จะได้

$$(1-0)^2 = 4p(0-4)$$

$$1 = -16p$$

$$p = -\frac{1}{16}$$

ดังนั้น สมการพาราโบลานี้ คือ $x^2=-\frac{1}{4}(y-4)$ หรือ $4x^2+y-c=0$

2) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นพาราโบลาที่เส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

โดยที่ จุดยอดคือ $(-6, 0)$ นั่นคือ $h=-6, k=0$ และไดเรกตริกซ์ คือ $x=-12$

จะได้

$$-12 = -6-p$$

$$p = 6$$

ดังนั้น สมการพาราโบลานี้ คือ $y^2 = 24(x+6)$ หรือ $y^2 = 24x+144$

3) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

โดยที่ จุดศูนย์กลาง คือ $(5, 0)$ แกนเอกยาว 10 หน่วย และแกนโทยาว 8 หน่วย

นั่นคือ $h=5, k=0, 2a=10$ และ $2b=8$ จะได้ $a=5$ และ $b=4$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

4) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

โดยที่ จุดศูนย์กลาง คือ $(2, -3)$ แกนเอกยาว 6 หน่วย และแกนโทยาว 4 หน่วย

นั่นคือ $h=2, k=-3, 2a=6$ และ $2b=4$ จะได้ $a=3$ และ $b=2$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

5) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

โดยที่ จุดศูนย์กลางคือ $(0, 1)$ แกนตามขวางยาว 2 หน่วย

นั่นคือ $h=0, k=1, a=1$

จากสมการเส้นกำกับ คือ $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

จะได้
$$\begin{aligned} y-1 &= \pm\frac{1}{b}(x-0) \\ y &= \pm\frac{1}{b}x+1 \end{aligned}$$

จากรูป สมการเส้นกำกับ คือ $y=\pm x+1$ จะได้ $\frac{1}{b}=1$ นั่นคือ $b=1$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $(y-1)^2-x^2=1$

6) จากกราฟที่กำหนดให้ซึ่งเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

จะได้ว่า สมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

โดยที่ จุดศูนย์กลางคือ $(4, 0)$ แกนตามขวางยาว 4 หน่วย

และกราฟผ่านจุด $(8, 4)$

นั่นคือ $h=4, k=0, a=2, x=8$ และ $y=4$

แทน h, k, a, x และ y ด้วย 4, 0, 2, 8 และ 4 ตามลำดับ ใน $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะได้
$$\begin{aligned} \frac{(8-4)^2}{2^2}-\frac{(4-0)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{16}{4}-\frac{16}{b^2} &= 1 \\ \frac{16}{b^2} &= \frac{16}{4}-1 \\ \frac{16}{b^2} &= 3 \\ b^2 &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{3y^2}{16}=1$

5. 1) จากกราฟวงรี A ที่กำหนดให้

จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรีนี้ คือ $(-1,-1)$

ความยาวของแกนเอก 8 หน่วย และความยาวของแกนโท 4 หน่วย

2) จากข้อ 1) จะได้ว่า ต้องเลื่อนขนานกราฟ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ไปทางซ้าย 1 หน่วย และเลื่อนลงข้างล่าง 1 หน่วย จึงจะได้วงรี A

3) จากกราฟวงรี A ที่กำหนดให้ซึ่งเป็นวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

นั่นคือ มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จากข้อ 1) และ 2) จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี A คือ $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

6. 1) จาก

$$\begin{aligned}
9y^2-36y+4x^2 &= 0\\
9\left(y^2-4y\right)+4x^2 &= 0\\
9\left(y^2-4y+4\right)+4x^2 &= 0+36\\
9(y-2)^2+4x^2 &= 36\\
\frac{9(y-2)^2}{36}+\frac{4x^2}{36} &= \frac{36}{36}\\
\frac{(y-2)^2}{4}+\frac{x^2}{9} &= 1
\end{aligned}$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 มีเครื่องหมายเหมือนกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

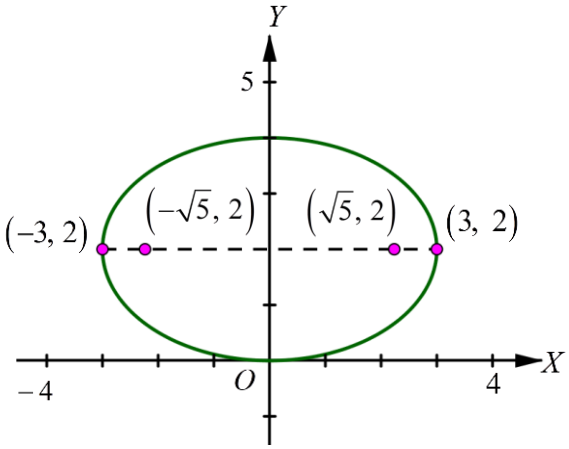
จะได้ว่า $h=0, k=2, a^2=9$ และ $b^2=4$ นั่นคือ $a=3$ และ $b=2$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=9-4=5$ นั่นคือ $c=\sqrt{5}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 2)$ จุดยอด คือ $(-3, 2)$ และ $(3, 2)$

โฟกัส คือ $(-\sqrt{5}, 2)$ และ $(\sqrt{5}, 2)$ แกนเอกยาว 6 หน่วย

แกนโทยาว 4 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



2) จาก

$$\begin{aligned} x^2 &= 4(y+2x) \\ x^2 &= 4y+8x \\ x^2-8x &= 4y \\ x^2-8x+16 &= 4y+16 \\ (x-4)^2 &= 4(y+4) \end{aligned}$$

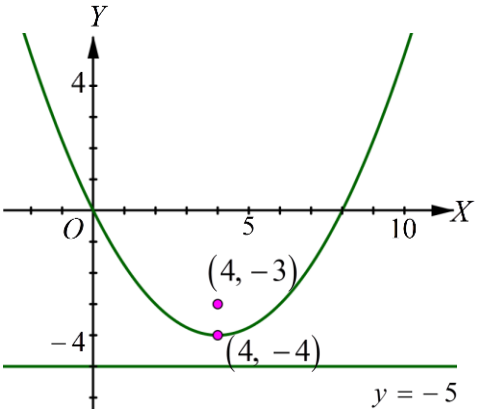
จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการพาราโบลาที่เส้นโค้งหงายขึ้น

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

จะได้ว่า $h = 4, k = -4, 4p = 4$ นั่นคือ $p = 1$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(4, -4)$ โฟกัส คือ $(4, -3)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y = -5$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



3) จาก

$$\begin{aligned} y^2-4x^2-2y+16x &= 20 \\ \left(y^2-2y\right)-4\left(x^2-4x\right) &= 20 \\ \left(y^2-2y+1\right)-4\left(x^2-4x+4\right) &= 20+1-16 \\ (y-1)^2-4(x-2)^2 &= 5 \\ \frac{(y-1)^2}{5}-\frac{4(x-2)^2}{5} &= 1 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-2)^2$ และ $(y-1)^2$ มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=2, k=1, a^2=5$ และ $b^2=\frac{5}{4}$ นั่นคือ $a=\sqrt{5}$ และ $b=\frac{\sqrt{5}}{2}$

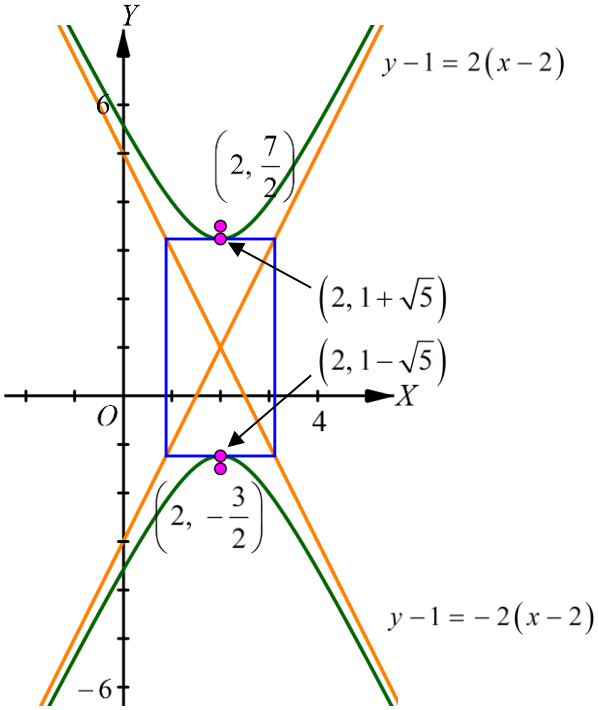
จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=5+\frac{5}{4}=\frac{25}{4}$ นั่นคือ $c=\frac{5}{2}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(2,1)$ จุดยอด คือ $\left(2,1-\sqrt{5}\right)$ และ $\left(2,1+\sqrt{5}\right)$

โฟกัส คือ $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$ และ $\left(2,\frac{7}{2}\right)$

เส้นกำกับ คือ $y-1=\pm 2(x-2)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



4) จาก

$$\begin{aligned} x^2+6x-12y+9 &= 0 \\ x^2+6x &= 12y-9 \\ x^2+6x+9 &= 12y-9+9 \\ (x+3)^2 &= 12y \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการพาราโบลาที่เส้นโค้งหงายขึ้น

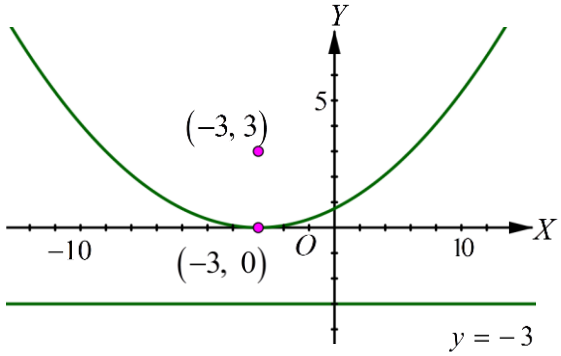
ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(x-h)^2=4p(y-k)$

จะได้ว่า $h=-3, k=0, 4p=12$ นั่นคือ $p=3$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(-3, 0)$ โฟกัส คือ $(-3, 3)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y=-3$

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



5) จาก $4x^2+25y^2-24x+250y+561 = 0$

$$4\left(x^2-6x\right)+25\left(y^2+10y\right) = 0-561$$

$$4\left(x^2-6x+9\right)+25\left(y^2+10y+25\right) = -561+36+625$$

$$4(x-3)^2+25(y+5)^2 = 100$$

$$\frac{4(x-3)^2}{100}+\frac{25(y+5)^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+5)^2}{4} = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-3)^2$ และ $(y+5)^2$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน ดังนั้นสมการนี้เป็นสมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=3, k=-5, a^2=25$ และ $b^2=4$ นั่นคือ $a=5$ และ $b=2$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=25-4=21$ นั่นคือ $c=\sqrt{21}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(3, -5)$

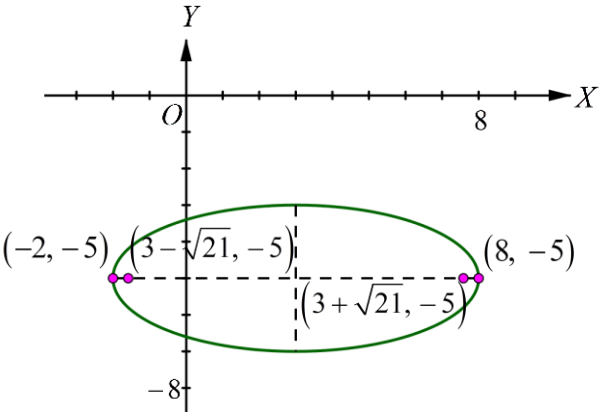
จุดยอด คือ $(-2, -5)$ และ $(8, -5)$

โฟกัส คือ $\left(3-\sqrt{21}, -5\right)$ และ $\left(3+\sqrt{21}, -5\right)$

แกนเอกยาว 10 หน่วย

แกนโทยาว 4 หน่วย

และเขียนวงรีได้ดังนี้



6) จาก

$$
\begin{aligned}
2y^2 + x^2 &= 2x+1 \\
2y^2 + \left(x^2 - 2x\right) &= 1 \\
2y^2 + \left(x^2 - 2x + 1\right) &= 1+1 \\
2y^2 + (x-1)^2 &= 2 \\
\frac{2y^2}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} &= \frac{2}{2} \\
\frac{(x-1)^2}{2} + y^2 &= 1
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-1)^2$ และ y^2 มีเครื่องหมายเหมือนกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

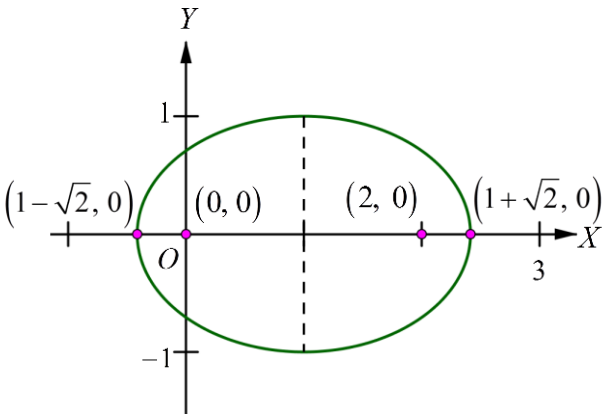
จะได้ว่า $h=1, k=0, a^2=2$ และ $b^2=1$ นั่นคือ $a=\sqrt{2}$ และ $b=1$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=2-1=1$ นั่นคือ $c=1$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 0)$ จุดยอด คือ $(1-\sqrt{2}, 0)$ และ $(1+\sqrt{2}, 0)$

โฟกัส คือ $(0, 0)$ และ $(2, 0)$ แกนเอกยาว $2\sqrt{2}$ หน่วย

แกนโทยาว 2 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



7) จาก

$$\begin{aligned}
16x^2-9y^2-96x+288 &= 0\\
16(x^2-6x)-9y^2 &= -288\\
16(x^2-6x+9)-9y^2 &= -288+144\\
16(x-3)^2-9y^2 &= -144\\
\frac{16(x-3)^2}{144}-\frac{9y^2}{144} &= -\frac{144}{144}\\
\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{16} &= -1\\
\frac{y^2}{16}-\frac{(x-3)^2}{9} &= 1
\end{aligned}$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-3)^2$ และ y^2 มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

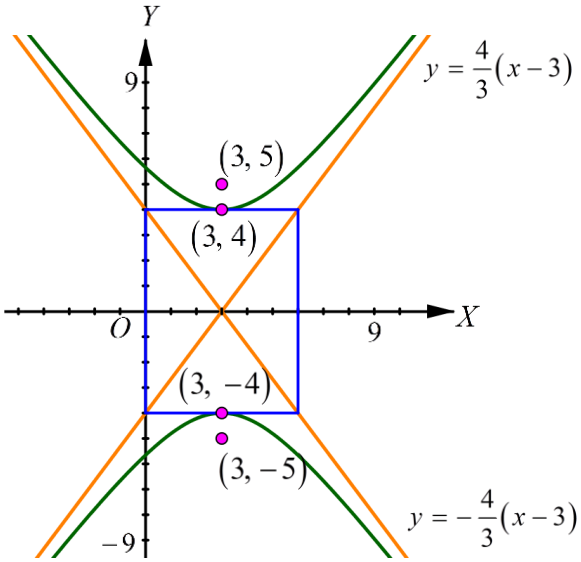
จะได้ว่า $h=3,\ k=0,\ a^2=16$ และ $b^2=9$ นั่นคือ $a=4$ และ $b=3$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=16+9=25$ นั่นคือ $c=5$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(3,0)$ จุดยอด คือ $(3,-4)$ และ $(3,4)$

โฟกัส คือ $(3,-5)$ และ $(3,5)$ เส้นกำกับ คือ $y=\pm\dfrac{4}{3}(x-3)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



8) จาก

$$
\begin{aligned}
4y^2-4y-8x+9 &= 0 \\
4y^2-4y &= 8x-9 \\
4\left(y^2-y\right) &= 8x-9 \\
4\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right) &= 8x-9+1 \\
4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 &= 8(x-1) \\
\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 &= 2(x-1)
\end{aligned}
$$

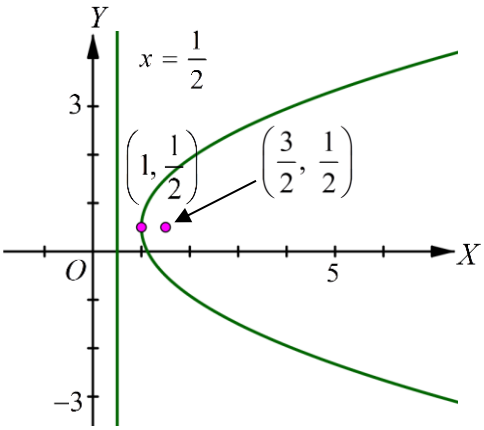
จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการพาราโบลาที่เส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(y-k)^2=4p(x-h)$

จะได้ว่า $h=1,\ k=\frac{1}{2},\ 4p=2$ นั่นคือ $p=\frac{1}{2}$

ดังนั้น จุดยอด คือ $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ โฟกัส คือ $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x=\frac{1}{2}$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



9) จาก

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 10(x-y)+1 \\ x^2 - y^2 &= 10x-10y+1 \\ x^2 - y^2 - 10x + 10y &= 1 \\ \left(x^2 - 10x + 25\right) - \left(y^2 - 10y + 25\right) &= 1+25-25 \\ (x-5)^2 - (y-5)^2 &= 1 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-5)^2$ และ $(y-5)^2$ มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $h = 5, k = 5, a^2 = 1$ และ $b^2 = 1$ นั่นคือ $a = 1$ และ $b = 1$

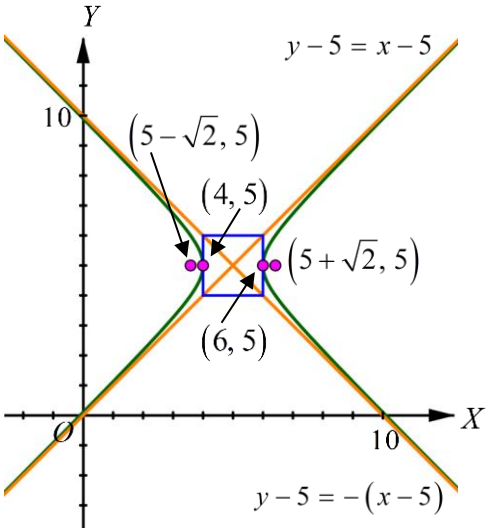
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 1+1 = 2$ นั่นคือ $c = \sqrt{2}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(5, 5)$ จุดยอด คือ $(4, 5)$ และ $(6, 5)$

โฟกัส คือ $\left(5-\sqrt{2}, 5\right)$ และ $\left(5+\sqrt{2}, 5\right)$

เส้นกำกับ คือ $y-5 = \pm(x-5)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



10) จาก

$$\begin{aligned} x^2+16 &= 4(y^2+2x) \\ x^2+16 &= 4y^2+8x \\ x^2+16-4y^2-8x &= 0 \\ (x^2-8x+16)-4y^2 &= 0 \\ (x-4)^2-4y^2 &= 0 \qquad \text{-----}(1) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า จำนวนข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับเป็น 0 จึงไม่สามารถเขียนสมการใหม่ให้ตรงกับรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลาได้ เมื่อวิเคราะห์ต่อไป สามารถแสดงว่า สมการดังกล่าวเป็นสมการของเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

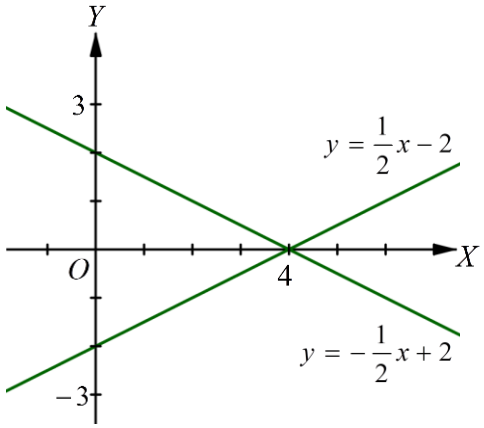
จากสมการ (1) จะได้

$$(x-4)^2 = 4y^2$$

$$x-4=2y \quad \text{หรือ} \quad x-4=-2y$$

ดังนั้น $y=\frac{1}{2}x-2$ หรือ $y=-\frac{1}{2}x+2$

เขียนกราฟของเส้นตรงสองเส้นตัดกัน ได้ดังนี้



11) จาก

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 39 &= 0 \\ \left(3x^2 - 6x\right) + \left(4y^2 - 24y\right) + 39 &= 0 \\ 3\left(x^2 - 2x\right) + 4\left(y^2 - 6y\right) + 39 &= 0 \\ 3\left(x^2 - 2x + 1\right) + 4\left(y^2 - 6y + 9\right) &= 0 \\ 3(x-1)^2 + 4(y-3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า จำนวนข้างขวาของเครื่องหมายเท่ากับเป็น 0 จึงไม่สามารถเขียนสมการใหม่ให้ตรงกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีได้

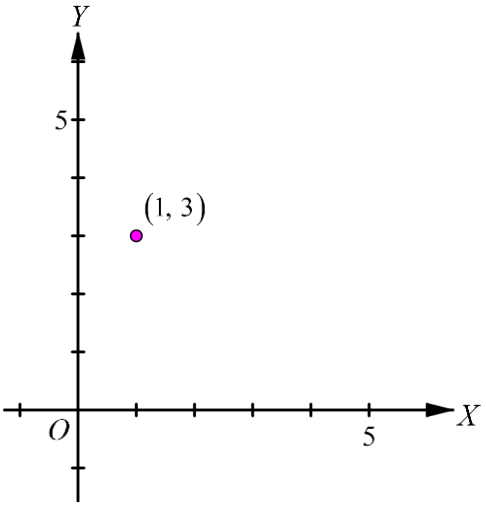
เมื่อวิเคราะห์ต่อไป สามารถแสดงว่าสมการดังกล่าวเป็นสมการของจุดจุดเดียว

เนื่องจาก $(x-1)^2 \geq 0$ และ $(y-3)^2 \geq 0$

ดังนั้น $(x-1)^2 = 0$ และ $(y-3)^2 = 0$ นั่นคือ $x = 1$ และ $y = 3$

สมการนี้จึงแทนจุด $(1, 3)$ เพียงจุดเดียว

และเขียนกราฟได้ดังนี้



12) จาก $x^2+4y^2+20x-40y+300 = 0$

$$\left(x^2+20x\right)+4\left(y^2-10y\right) = -300$$

$$\left(x^2+20x+100\right)+4\left(y^2-10y+25\right) = -300+100+100$$

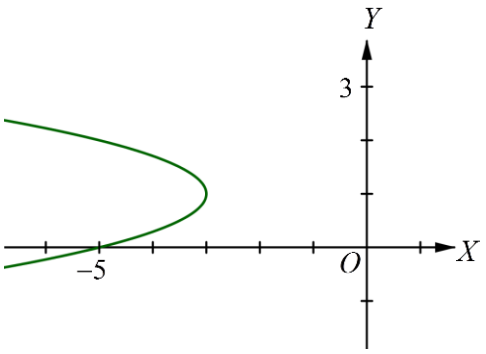
$$(x+10)^2+4(y-5)^2 = -100$$

สมการข้างต้นเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $(x+10)^2 \geq 0$ และ $4(y-5)^2 \geq 0$

ดังนั้น สมการนี้ไม่มีกราฟในระนาบจำนวนจริง

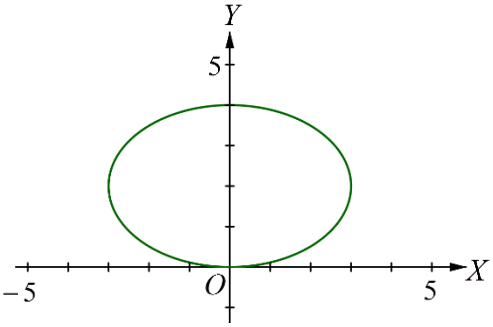
7. 1) จาก $2y^2-4y+x+5 = 0$

เขียนกราฟได้ดังนี้



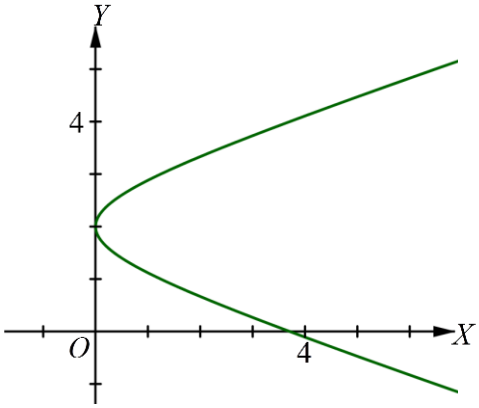
2) จาก $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

เขียนกราฟได้ดังนี้



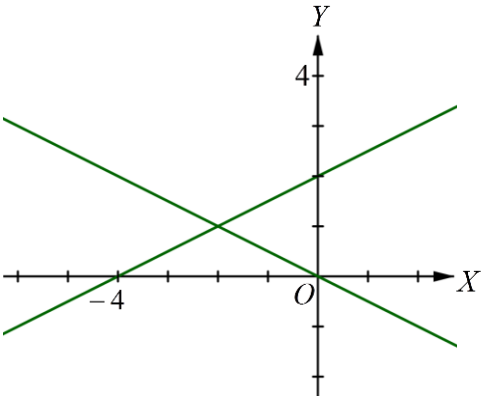
3) จาก $9y^2 + 36 = x^2 + 36y + 6x$

เขียนกราฟได้ดังนี้



4) จาก $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y = 0$

เขียนกราฟได้ดังนี้



8. จาก

$$4x^2+y^2+4(x-2y)+F = 0$$

$$4x^2+y^2+4x-8y+F = 0$$

$$(4x^2+4x)+(y^2-8y)+F = 0$$

$$4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+(y^2-8y+16)+F = 0+1+16$$

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-4)^2+F = 17$$

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-4)^2 = 17-F$$

1) ถ้ากราฟของสมการ $4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-4)^2=17-F$ เป็นสมการวงรี

แล้ว $17-F>0$ นั่นคือ $F<17$

2) ถ้ากราฟของสมการ $4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-4)^2=17-F$ เป็นจุดจุดเดียว

แล้ว $17-F=0$ นั่นคือ $F=17$

3) ถ้ากราฟของสมการ $4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-4)^2=17-F$ เป็นเซตว่าง

แล้ว $17-F<0$ นั่นคือ $F>17$

9. จาก $y^2 + x = 100$

$$y^2 = -(x-100)$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

ที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน จะได้ว่า $h = 100, k = 0, 4p = -1$ นั่นคือ $p = -\frac{1}{4}$

ดังนั้น จุดยอดของพาราโบลา คือ $(100, 0)$ และโฟกัสของพาราโบลา คือ $\left(\frac{399}{4}, 0\right)$

เนื่องจากวงรีมีจุดยอดและโฟกัสจุดหนึ่งร่วมกับพาราโบลา $y^2 + x = 100$ และโฟกัสอีกจุดหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด

จะได้ จุดยอดหนึ่งของวงรี คือ $(100, 0)$

โฟกัสหนึ่งของวงรี คือ $\left(\frac{399}{4}, 0\right)$ และโฟกัสอีกจุดหนึ่งของวงรี คือ $(0, 0)$

นั่นคือ $2c = \frac{399}{4}$ จะได้ $c = \frac{399}{8}$

และจุดศูนย์กลาง คือ $\left(\frac{\frac{399}{4}+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ หรือ $\left(\frac{399}{8}, 0\right)$

จะได้ $a = 100 - \frac{399}{8} = \frac{401}{8}$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $b^2 = a^2 - c^2 = \left(\frac{401}{8}\right)^2 - \left(\frac{399}{8}\right)^2 = \frac{1600}{64} = 25$

ดังนั้น สมการวงรีที่มีจุดยอดและโฟกัสจุดหนึ่งร่วมกับพาราโบลา $y^2 + x = 100$

และโฟกัสอีกจุดหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด คือ $\dfrac{\left(x - \frac{399}{8}\right)^2}{\left(\frac{401}{8}\right)^2} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จากอุณหภูมิ $0^{\circ}C$ เท่ากับ $32^{\circ}F$ และอุณหภูมิ $100^{\circ}C$ เท่ากับ $212^{\circ}F$

เขียนแสดงความสัมพันธ์ในรูปคู่อันดับได้เป็น $(0, 32)$ และ $(100, 212)$

และความสัมพันธ์ระหว่างองศาเซลเซียสและองศาฟาเรนไฮต์ในรูป $y = mx + b$

เมื่อ x แทนอุณหภูมิในหน่วยองศาเซลเซียส

และ y แทนอุณหภูมิในหน่วยองศาฟาเรนไฮต์

แทน x และ y ด้วย 0 และ 32 ตามลำดับ ใน $y = mx + b$

จะได้ $$32 = m(0) + b$$

$$b = 32$$

แทน x, y และ b ด้วย 100, 212 และ 32 ตามลำดับ ใน $y = mx + b$

จะได้ $$212 = m(100) + 32$$

$$m = 1.8$$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างองศาเซลเซียสและองศาฟาเรนไฮต์

คือ $y = 1.8x + 32$

2. เขียนสมการเส้นตรง $\ell_1 : 4y - x + 17 = 0$ ให้อยู่ในรูป $y = mx + b$

จะได้ $$y = \frac{1}{4}x - \frac{17}{4} \qquad -----(1)$$

นั่นคือ ความชันของเส้นตรง ℓ_1 คือ $\frac{1}{4}$

เนื่องจากเส้นตรง ℓ_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด และตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ_1

ดังนั้น สมการของเส้นตรง ℓ_2 คือ $$y = -4x \qquad -----(2)$$

หาจุดตัดระหว่างเส้นตรง ℓ_1 กับแกน X โดยแทน y ด้วย 0 ใน (1)

จะได้ $$0 = \frac{1}{4}x - \frac{17}{4}$$

$$x = 17$$

ดังนั้น เส้นตรง ℓ_1 ตัดแกน X ที่จุด $(17, 0)$

หาจุดตัดระหว่างเส้นตรง ℓ_1 กับเส้นตรง ℓ_2

จะได้ $$\frac{1}{4}x - \frac{17}{4} = -4x$$

$$\frac{1}{4}x + 4x = \frac{17}{4}$$

$$\frac{17}{4}x = \frac{17}{4}$$

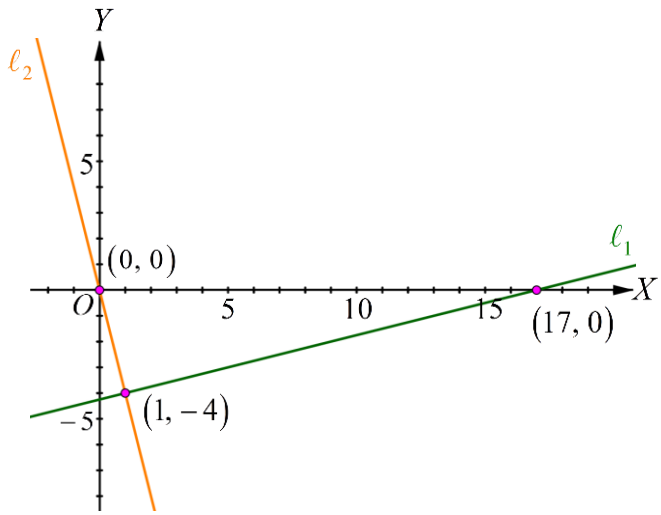
$$x = 1$$

แทน x ด้วย 1 ใน (2)

จะได้ $$y = -4(1)$$

$$y = -4$$

ดังนั้น เส้นตรง ℓ_1 ตัดเส้นตรง ℓ_2 ที่จุด $(1, -4)$



ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง ℓ_1, ℓ_2 และแกน X

คือ $\frac{1}{2}\times 17\times 4 = 34$ ตารางหน่วย

3. จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

เนื่องจากวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2,-5)$ และรัศมียาว 2 หน่วย

แทน h, k และ r ด้วย $2, -5$ และ 2 ตามลำดับ

จะได้ $$(x-2)^2+(y-(-5))^2 = 2^2$$

$$(x-2)^2+(y+5)^2 = 4$$

ดังนั้น สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2,-5)$ และรัศมียาว 2 หน่วย

คือ $(x-2)^2+(y+5)^2 = 4$

4. จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

เนื่องจากวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-5,1)$ และผ่านจุดกำเนิด

แทน h, k, x และ y ด้วย $-5, 1, 0$ และ 0 ตามลำดับ

จะได้ $$(0-(-5))^2+(0-1)^2 = r^2$$

$$r^2 = 26$$

ดังนั้น สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-5,1)$ และผ่านจุดกำเนิด

คือ $(x+5)^2+(y-1)^2 = 26$

5. เนื่องจากจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม คือ $P(2,3)$ และ $Q(-1,8)$

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม

จะได้ $h = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ และ $k = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2}$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางของวงกลมนี้ คือ $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

และจะได้ ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม คือ $\sqrt{(2+1)^2+(3-8)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ หน่วย

นั่นคือ รัศมีของวงกลมนี้ คือ $\frac{\sqrt{34}}{2}$ หน่วย

ดังนั้น สมการวงกลมที่มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลมอยู่ที่ $P(2, 3)$ และ $Q(-1, 8)$

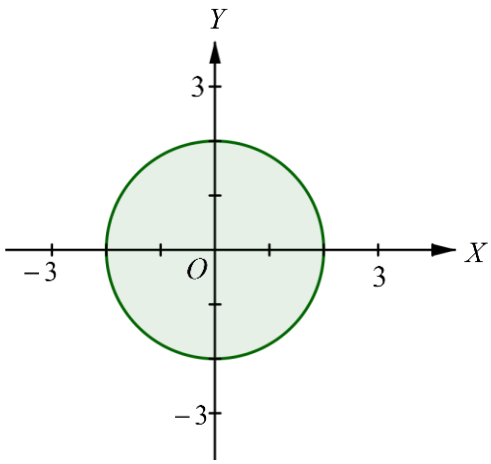
คือ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2$ หรือ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$

6. 1) จาก $\{(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2\le 4\}$

เนื่องจาก $x^2+y^2=4$ เป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

และมีรัศมียาว 2 หน่วย

เขียนกราฟของ $x^2+y^2\le 4$ ได้ดังนี้

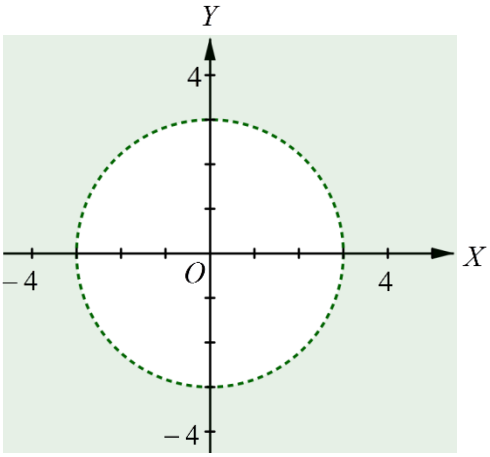


2) จาก $\{(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2>9\}$

เนื่องจาก $x^2+y^2=9$ เป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

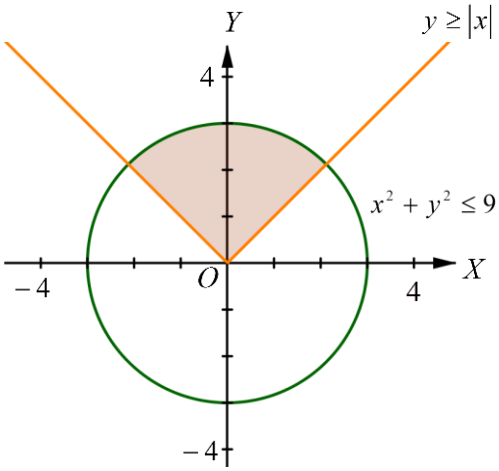
และมีรัศมียาว 3 หน่วย

เขียนกราฟของ $x^2 + y^2 > 9$ ได้ดังนี้



7. เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 9$ เป็นสมการวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมียาว 3 หน่วย

และเนื่องจาก $x^2 + y^2 \le 9$ และ $y \ge |x|$ เขียนกราฟได้ดังนี้



จาก $y = |x|$ คือ $y = x$ เมื่อ $x \ge 0$ และ $y = -x$ เมื่อ $x < 0$

จะได้ว่า ผลคูณของความชันของเส้นตรง $y = x$ และเส้นตรง $y = -x$ คือ $1(-1) = -1$

นั่นคือ เส้นตรง $y = x$ และเส้นตรง $y = -x$ ตั้งฉากกัน

เนื่องจากมุมภายในของวงกลมเป็น 360°

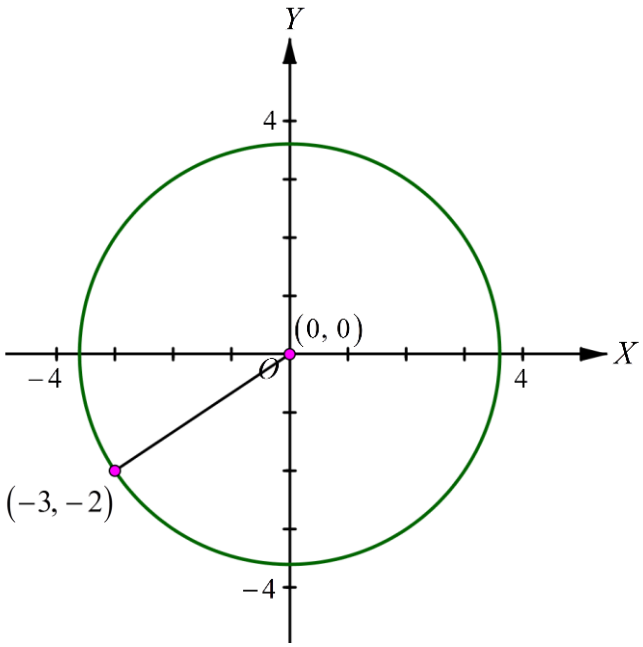
จะได้ พื้นที่ที่ต้องการเป็น $\frac{1}{4}$ ของพื้นที่ของวงกลม

ดังนั้น พื้นที่ที่ต้องการ คือ $\frac{1}{4}\pi\left(3^2\right) = \frac{9}{4}\pi$ ตารางหน่วย

8. จาก $x^2 + y^2 = 13$ ซึ่งเป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$

และรัศมียาว $\sqrt{13}$ หน่วย

สร้างส่วนของเส้นตรงจากจุด $(0, 0)$ และ $(-3, -2)$



จะได้ ความชันของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(0, 0)$ และ $(-3, -2)$ คือ $\frac{-2-0}{-3-0} = \frac{2}{3}$

เนื่องจาก เส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 = 13$ ที่จุด $(-3, -2)$ จะตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง

ที่เชื่อมจุด $(0, 0)$ และ $(-3, -2)$

จะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 = 13$ ที่จุด $(-3, -2)$ คือ $-\frac{3}{2}$

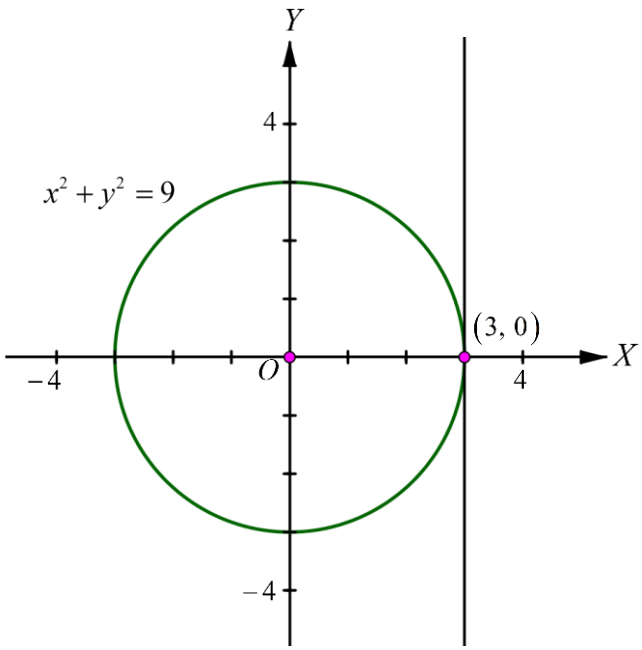
เนื่องจาก เส้นสัมผัสวงกลม คือ เส้นตรงที่มีสมการอยู่ในรูป $y-y_1=m(x-x_1)$

จะได้ สมการของเส้นสัมผัสวงกลม คือ

$$\begin{aligned} y-(-2) &= -\frac{3}{2}(x-(-3)) \\ y+2 &= -\frac{3}{2}(x+3) \\ y+2 &= -\frac{3}{2}x-\frac{9}{2} \\ y &= -\frac{3}{2}x-\frac{13}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=13$ ที่จุด $(-3,-2)$ คือ $y=-\frac{3}{2}x-\frac{13}{2}$

9. 1) แสดงวงกลม $x^2+y^2=9$ และเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=9$ ที่ผ่านจุด $(3,0)$ ได้ดังรูป



จากรูป จะได้ว่าเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=9$ ที่ผ่านจุด $(3,0)$ จะตั้งฉากกับแกน X ที่ $x=3$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=9$ และผ่านจุด $(3,0)$ คือ $x=3$

2) ให้ เส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=9$ ซึ่งมีความชันเป็น -1 อยู่ในรูป

$$y=-x+c \qquad -----(1)$$

จะได้ว่า เส้นสัมผัสนี้จะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่มีความชันเป็น 1

นั่นคือ จุดปลายของรัศมีนี้จะอยู่บนเส้นตรง $y=x$ ซึ่งตัดวงกลม $x^2+y^2=9$

ที่จุด $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ และ $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

แทน x และ y ด้วย $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ และ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ตามลำดับ ใน (1)

จะได้
$$\frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}+c$$
$$c = 3\sqrt{2}$$

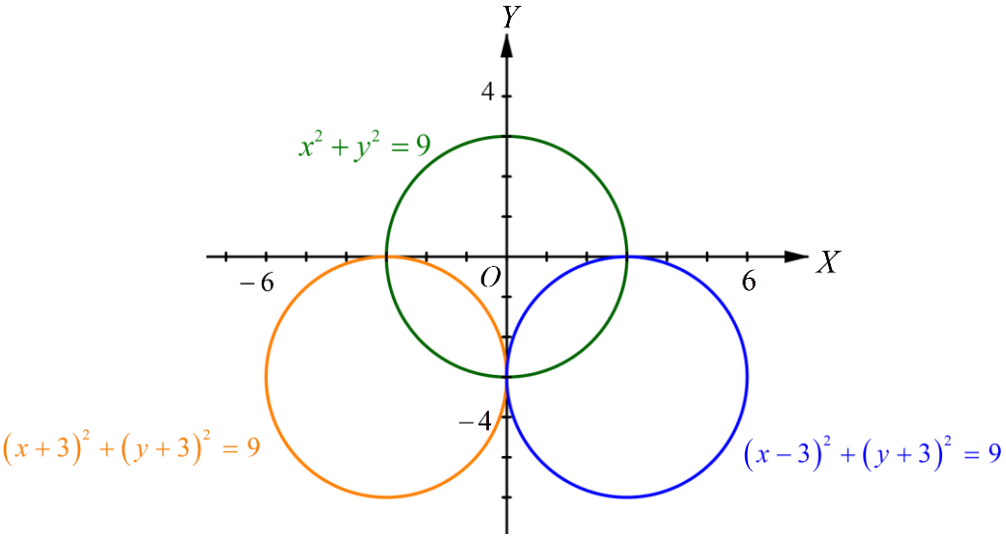
แทน x และ y ด้วย $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ และ $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ตามลำดับ ใน (1)

จะได้
$$-\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}+c$$
$$c = -3\sqrt{2}$$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=9$ ที่มีความชันเป็น -1 คือ

$y=-x+3\sqrt{2}$ และ $y=-x-3\sqrt{2}$

3) เขียนวงกลม $x^2+y^2=9$ วงกลม $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ และวงกลม $(x+3)^2+(y+3)^2=9$ ได้ดังนี้

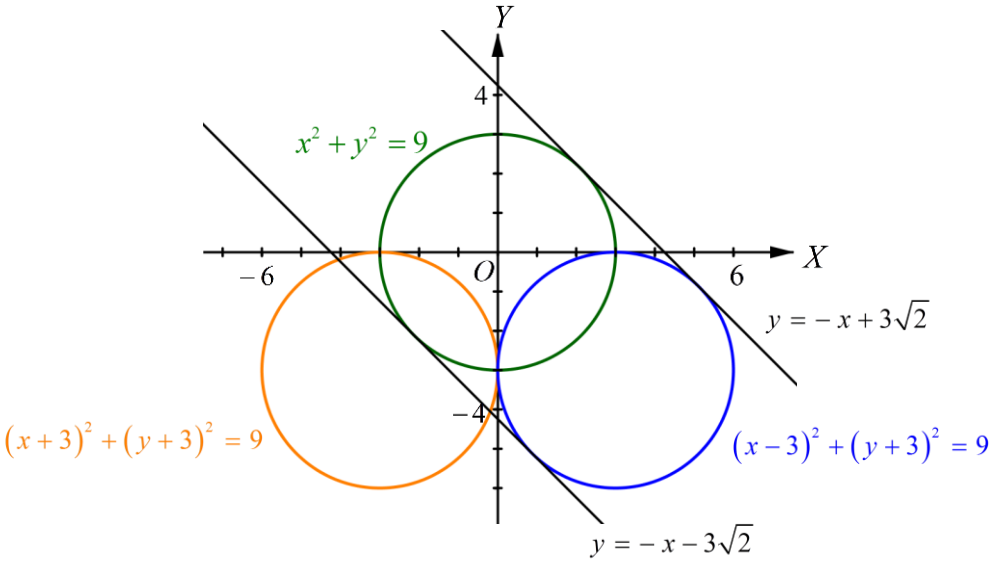


เนื่องจากวงกลม $x^2+y^2=9$ และวงกลม $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ มีรัศมียาวเท่ากัน ดังนั้น เส้นสัมผัสของวงกลมทั้งสองจะขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสอง

เนื่องจาก จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+y^2=9$ และวงกลม $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ คือ $(0,0)$ และ $(3,-3)$ ตามลำดับ

จะได้ว่า เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองมีความชันเป็น $\frac{-3-0}{3-0}=-1$

จากข้อ 2) จะได้สมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=9$ และมีความชันของเส้นสัมผัสเป็น -1 คือ $y=-x+3\sqrt{2}$ และ $y=-x-3\sqrt{2}$ ดังรูป



จากรูป จะเห็นได้ว่าเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=9$ และวงกลม $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ แต่ไม่ตัดวงกลม $(x+3)^2+(y+3)^2=9$ คือ $y=-x+3\sqrt{2}$

10. จากสมการรูปแบบทั่วไปของภาคตัดกรวย กราฟของสมการ $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ เมื่อ A และ C ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน กราฟของสมการนี้เป็นวงกลม เมื่อ $A=C$

จากโจทย์

~~สมการต่อไปนี้เป็นสมการวงกลม~~
$\cancel{3x^2-12x+3y^2-6y-48=0}$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ y^2 คือ 3

11. 1) จาก $x^2+4y^2 = 16$

จะได้ $\frac{x^2}{16}+\frac{4}{16}y^2 = \frac{16}{16}$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4} = 1$

จะเห็นว่าตัวหารของ x^2 มากกว่าตัวหารของ y^2

ดังนั้น แกนเอกอยู่ในแนวนอน

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=0, k=0, a^2=16$ และ $b^2=4$ นั่นคือ $a=4$ และ $b=2$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=16-4=12$ นั่นคือ $c=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$

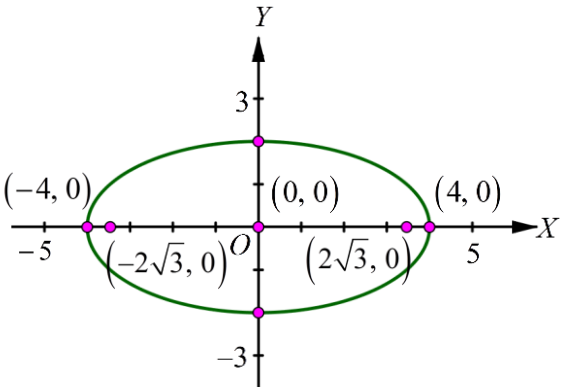
จุดยอด คือ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$

โฟกัส คือ $(-2\sqrt{3}, 0)$ และ $(2\sqrt{3}, 0)$

แกนเอกยาว 8 หน่วย

แกนโทยาว 4 หน่วย

และเขียนวงรีได้ดังนี้



2) จาก $9x^2 + 4y^2 = 1$

จะได้ $\dfrac{x^2}{\frac{1}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

จะเห็นว่าตัวหารของ y^2 มากกว่าตัวหารของ x^2

ดังนั้น แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

จะได้ว่า $h = 0, k = 0, a^2 = \frac{1}{4}$ และ $b^2 = \frac{1}{9}$ นั่นคือ $a = \frac{1}{2}$ และ $b = \frac{1}{3}$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$ นั่นคือ $c = \frac{\sqrt{5}}{6}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$

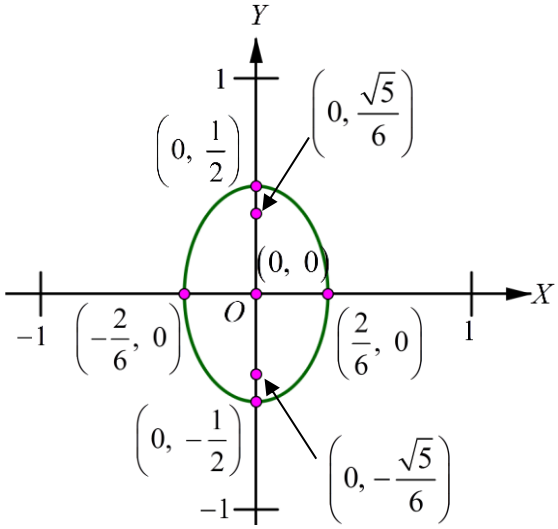
จุดยอด คือ $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ และ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

โฟกัส คือ $\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$ และ $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{6}\right)$

แกนเอกยาว 1 หน่วย

แกนโทยาว $\frac{2}{3}$ หน่วย

และเขียนวงรีได้ดังนี้



3) จาก $4x^2+9y^2 = 36y$

จะได้

$$4x^2+9y^2-36y = 0$$

$$4x^2+9\left(y^2-4y\right) = 0$$

$$4x^2+9\left(y^2-4y+4\right) = 0+36$$

$$4x^2+9(y-2)^2 = 36$$

$$\frac{4}{36}x^2+\frac{9}{36}(y-2)^2 = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

จะเห็นว่าตัวหารของ x^2 มากกว่าตัวหารของ $(y-2)^2$

ดังนั้น แกนเอกอยู่ในแนวนอน

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=0, k=2, a^2=9$ และ $b^2=4$ นั่นคือ $a=3$ และ $b=2$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=9-4=5$ นั่นคือ $c=\sqrt{5}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 2)$

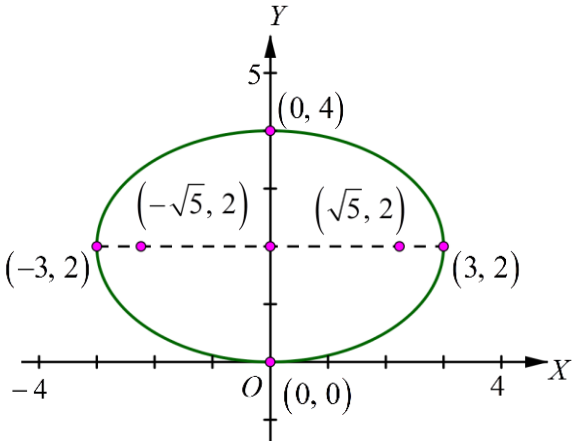
จุดยอด คือ $(-3, 2)$ และ $(3, 2)$

โฟกัส คือ $(-\sqrt{5}, 2)$ และ $(\sqrt{5}, 2)$

แกนเอกยาว 6 หน่วย

แกนโทยาว 4 หน่วย

และเขียนวงรีได้ดังนี้



4) จาก $2x^2 + y^2 = 2 + 4(x - y)$

จะได้ $2x^2 + y^2 = 2 + 4x - 4y$

$$2x^2 + y^2 - 4x + 4y = 2$$

$$2(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 2$$

$$2(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 2 + 2 + 4$$

$$2(x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$$

$$\frac{2}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{8}(y+2)^2 = \frac{8}{8}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{8} = 1$$

จะเห็นว่าตัวหารของ $(y+2)^2$ มากกว่าตัวหารของ $(x-1)^2$

ดังนั้น แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

จะได้ว่า $h=1, k=-2, a^2=8$ และ $b^2=4$ นั่นคือ $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ และ $b=2$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=8-4=4$ นั่นคือ $c=2$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(1,-2)$

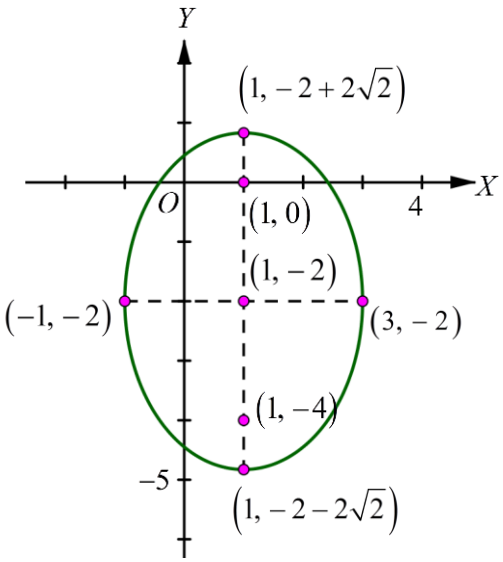
จุดยอด คือ $(1,-2-2\sqrt{2})$ และ $(1,-2+2\sqrt{2})$

โฟกัส คือ $(1,-4)$ และ $(1,0)$

แกนเอกยาว $4\sqrt{2}$ หน่วย

แกนโทยาว 4 หน่วย

และเขียนวงรีได้ดังนี้



12. 1) จาก $x^2+8y = 0$

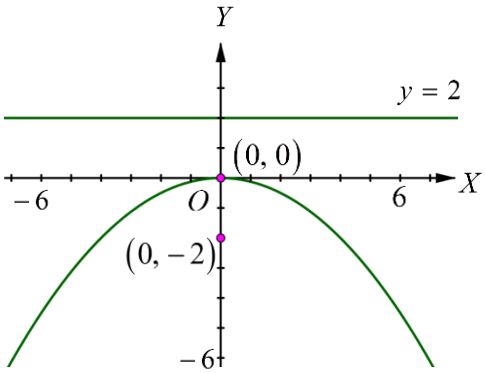
จะได้ $x^2 = -8y$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

จะได้ว่า $h=0, k=0, 4p=-8$ นั่นคือ $p=-2$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(0, 0)$ โฟกัส คือ $(0, -2)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y=2$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



2) จาก $2x-y^2 = 0$

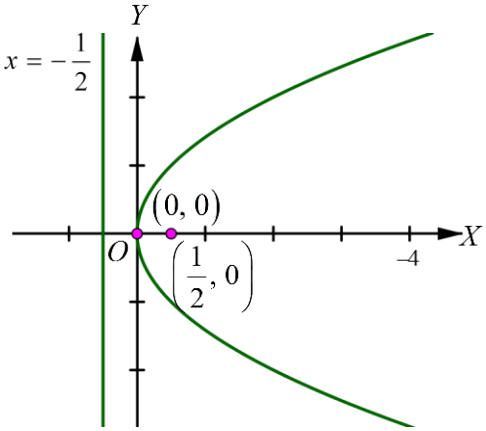
จะได้ $y^2 = 2x$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

จะได้ว่า $h=0, k=0, 4p=2$ นั่นคือ $p=\frac{1}{2}$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(0, 0)$ โฟกัส คือ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x=-\frac{1}{2}$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



3) จาก $x - y^2 + 4y - 2 = 0$

จะได้ $y^2 - 4y = x - 2$

$$y^2 - 4y + 4 = x - 2 + 4$$

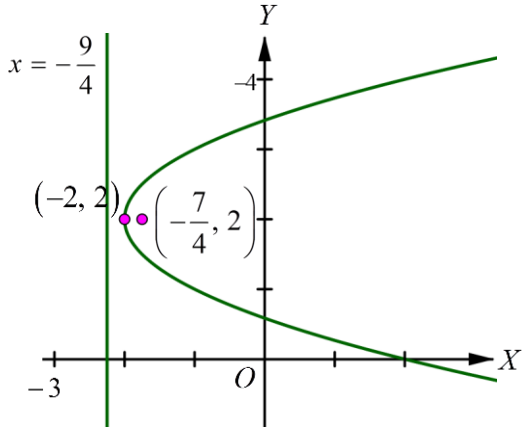
$$(y-2)^2 = x + 2$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

จะได้ว่า $h = -2, k = 2, 4p = 1$ นั่นคือ $p = \frac{1}{4}$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(-2, 2)$ โฟกัส คือ $\left(-\frac{7}{4}, 2\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x = -\frac{9}{4}$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



4) จาก $2x^2+6x+5y+10 = 0$

จะได้ $2x^2+6x = -5y-10$

$$2\left(x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -5y-10+\frac{9}{2}$$

$$2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = -5y-\frac{11}{2}$$

$$2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = -5\left(y+\frac{11}{10}\right)$$

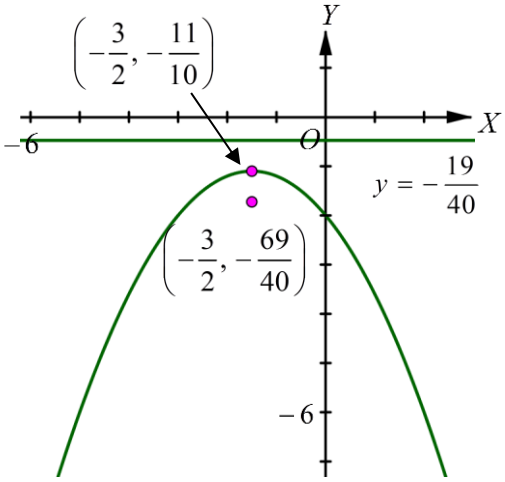
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{5}{2}\left(y+\frac{11}{10}\right)$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

จะได้ว่า $h=-\frac{3}{2}, k=-\frac{11}{10}, 4p=-\frac{5}{2}$ นั่นคือ $p=-\frac{5}{8}$

ดังนั้น จุดยอด คือ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{10}\right)$ โฟกัส คือ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{69}{40}\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y=-\frac{19}{40}$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



13. 1) จาก $x^2 - 2y^2 = 16$

จะได้ $\frac{x^2}{16} - \frac{2}{16}y^2 = \frac{16}{16}$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$

เทียบรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $h = 0, k = 0, a^2 = 16, b^2 = 8$ นั่นคือ $a = 4$ และ $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวนอน จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน X

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 16 + 8 = 24$ นั่นคือ $c = 2\sqrt{6}$

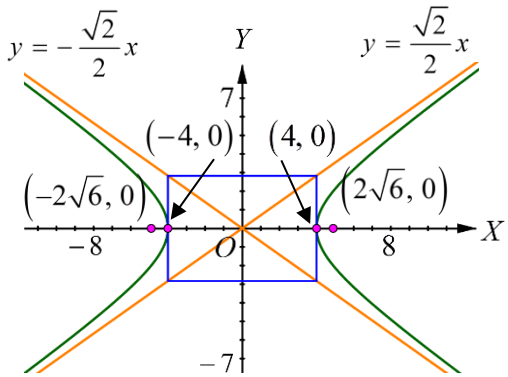
ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$

จุดยอด คือ $(-4, 0)$ และ $(4, 0)$

โฟกัส คือ $(-2\sqrt{6}, 0)$ และ $(2\sqrt{6}, 0)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



2) จาก $$x^2 - 4y^2 = -16$$

จะได้ $$\frac{x^2}{(-16)} - \frac{4}{(-16)}y^2 = -\frac{16}{(-16)}$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

เทียบรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $h = 0, k = 0, a^2 = 4, b^2 = 16$ นั่นคือ $a = 2$ และ $b = 4$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 4 + 16 = 20$ นั่นคือ $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

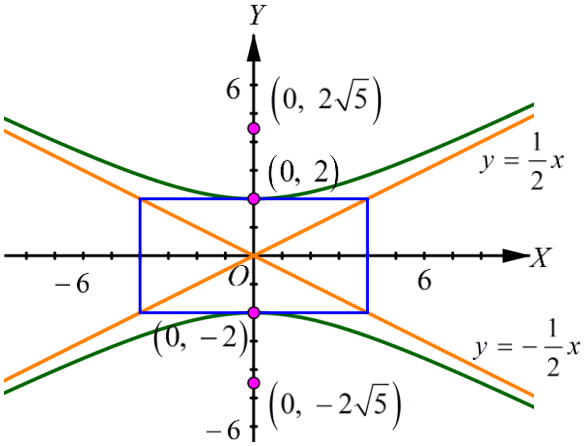
ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$

จุดยอด คือ $(0, -2)$ และ $(0, 2)$

โฟกัส คือ $(0, -2\sqrt{5})$ และ $(0, 2\sqrt{5})$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{1}{2}x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



3) จาก

$$9y^2+18y = x^2+6x+18$$

จะได้

$$9\left(y^2+2y\right) = \left(x^2+6x\right)+9+9$$

$$9\left(y^2+2y+1\right) = \left(x^2+6x+9\right)+9+9$$

$$9(y+1)^2 = (x+3)^2+18$$

$$9(y+1)^2-(x+3)^2 = 18$$

$$\frac{9}{18}(y+1)^2-\frac{1}{18}(x+3)^2 = \frac{18}{18}$$

$$\frac{(y+1)^2}{2}-\frac{(x+3)^2}{18} = 1$$

เทียบรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=-3, k=-1, a^2=2, b^2=18$ นั่นคือ $a=\sqrt{2}$ และ $b=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $x=-3$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=2+18=20$ นั่นคือ $c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

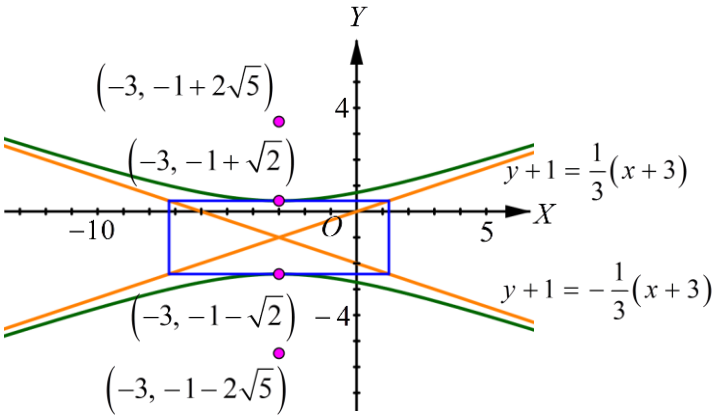
ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(-3, -1)$

จุดยอด คือ $\left(-3, -1-\sqrt{2}\right)$ และ $\left(-3, -1+\sqrt{2}\right)$

โฟกัส คือ $\left(-3, -1-2\sqrt{5}\right)$ และ $\left(-3, -1+2\sqrt{5}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y+1=\pm\frac{1}{3}(x+3)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



4) จาก $y^2 = x^2+6y$

จะได้

$$
\begin{aligned}
y^2-\left(x^2+6y\right) &= 0\\
\left(y^2-6y\right)-x^2 &= 0\\
\left(y^2-6y+9\right)-x^2 &= 0+9\\
(y-3)^2-x^2 &= 9\\
\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{x^2}{9} &= \frac{9}{9}\\
\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{x^2}{9} &= 1
\end{aligned}
$$

เทียบรูปแบบมาตรฐานของสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=0, k=3, a^2=9, b^2=9$ นั่นคือ $a=3$ และ $b=3$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

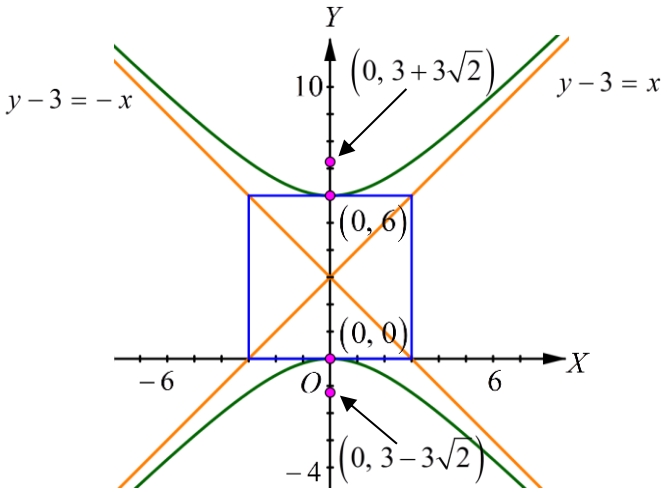
จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=9+9=18$ นั่นคือ $c=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 3)$ จุดยอด คือ $(0, 0)$ และ $(0, 6)$

โฟกัส คือ $\left(0, 3-3\sqrt{2}\right)$ และ $\left(0, 3+3\sqrt{2}\right)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y-3=\pm x$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



14. 1) จาก

$$\frac{y^2}{12}+x = 1$$

จะได้

$$\frac{y^2}{12} = -x+1$$

$$y^2 = -12(x-1)$$

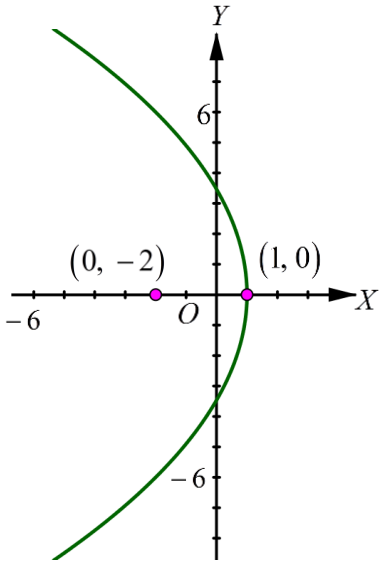
จะเห็นว่า สมการนี้เป็นสมการพาราโบลา

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(y-k)^2=4p(x-h)$

จะได้ว่า $h=1, k=0, 4p=-12$ นั่นคือ $p=-3$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(1, 0)$ โฟกัส คือ $(-2, 0)$

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



2) จาก
$$\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{144} = \frac{y}{12}$$

จะได้
$$\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{144}-\frac{y}{12} = 0$$
$$\left(\frac{y^2}{12}-\frac{y}{12}\right)+\frac{x^2}{144} = 0$$
$$\frac{1}{12}\left(y^2-y\right)+\frac{x^2}{144} = 0$$
$$\frac{1}{12}\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)+\frac{x^2}{144} = 0+\frac{1}{48}$$
$$\frac{1}{12}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{x^2}{144} = \frac{1}{48}$$
$$\frac{48}{12}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{48}{144}x^2 = \frac{48}{48}$$

$$\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{x^2}{3} = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 มีเครื่องหมายเหมือนกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

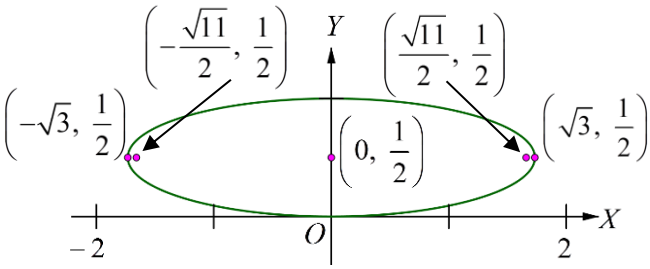
และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=0, k=\frac{1}{2}, a^2=3$ และ $b^2=\frac{1}{4}$ นั่นคือ $a=\sqrt{3}$ และ $b=\frac{1}{2}$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$ นั่นคือ $c=\frac{\sqrt{11}}{2}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ จุดยอด คือ $\left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ และ $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

โฟกัส คือ $\left(-\frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ และ $\left(\frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ และเขียนวงรีได้ดังนี้



3) จาก $x^2-y^2+144 = 0$

จะได้ $x^2-y^2 = 0-144$

$$\frac{x^2}{(-144)}-\frac{y^2}{(-144)} = \frac{-144}{(-144)}$$

$$\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{144} = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

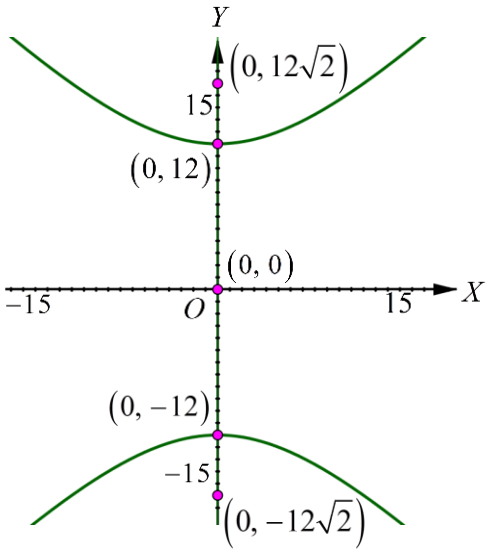
จะได้ว่า $h=0,\ k=0,\ a^2=144$ และ $b^2=144$ นั่นคือ $a=12$ และ $b=12$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=144+144=288$ นั่นคือ $c=12\sqrt{2}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(0,0)$ จุดยอด คือ $(0,-12)$ และ $(0,12)$

โฟกัส คือ $(0,-12\sqrt{2})$ และ $(0,12\sqrt{2})$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



4) จาก $x^2+6x = 9y^2$

จะได้ $x^2+6x+9 = 9y^2+9$

$$(x+3)^2 = 9y^2+9$$

$$(x+3)^2-9y^2 = 9$$

$$\frac{(x+3)^2}{9}-y^2 = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x+3)^2$ และ y^2 มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

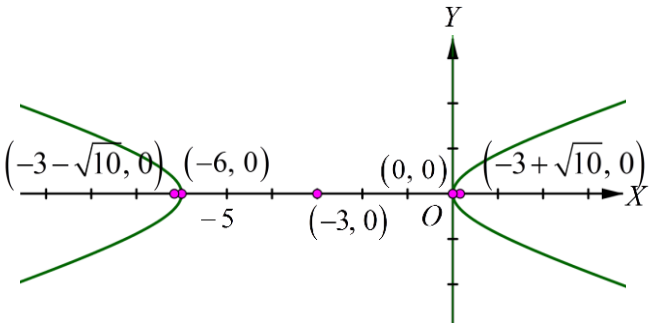
จะได้ว่า $h=-3, k=0, a^2=9$ และ $b^2=1$ นั่นคือ $a=3$ และ $b=1$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=9+1=10$ นั่นคือ $c=\sqrt{10}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(-3, 0)$ จุดยอด คือ $(-6, 0)$ และ $(0, 0)$

โฟกัส คือ $(-3-\sqrt{10}, 0)$ และ $(-3+\sqrt{10}, 0)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



5) จาก $4x^2+y^2 = 8(x+y)$

จะได้ $4x^2+y^2 = 8x+8y$

$$4x^2+y^2-8x-8y = 0$$

$$4(x^2-2x)+(y^2-8y) = 0$$

$$4(x^2-2x+1)+(y^2-8y+16) = 0+4+16$$

$$4(x-1)^2+(y-4)^2 = 20$$

$$\frac{4}{20}(x-1)^2+\frac{1}{20}(y-4)^2 = \frac{20}{20}$$

$$\frac{(x-1)^2}{5}+\frac{(y-4)^2}{20} = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 มีเครื่องหมายเหมือนกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

จะได้ว่า $h=1, k=4, a^2=20$ และ $b^2=5$ นั่นคือ $a=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ และ $b=\sqrt{5}$

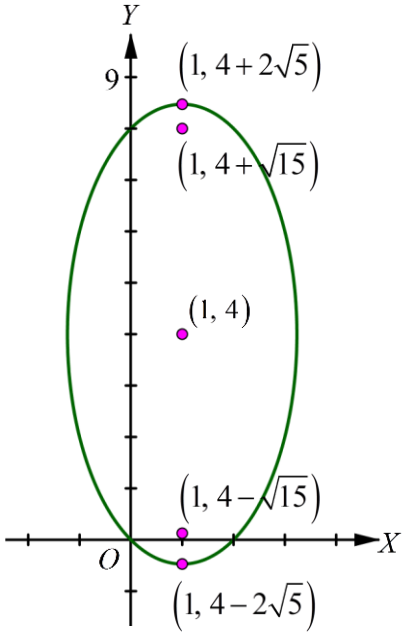
จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=20-5=15$ นั่นคือ $c=\sqrt{15}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 4)$

จุดยอด คือ $(1, 4-2\sqrt{5})$ และ $(1, 4+2\sqrt{5})$

โฟกัส คือ $(1, 4-\sqrt{15})$ และ $(1, 4+\sqrt{15})$

และเขียนวงรีได้ดังนี้



6) จาก $3x^2-6(x+y) = 10$

จะได้

$$3x^2-6x-6y = 10$$
$$3(x^2-2x) = 6y+10$$
$$3(x^2-2x+1) = 6y+10+3$$
$$3(x-1)^2 = 6y+13$$
$$(x-1)^2 = 2y+\frac{13}{3}$$
$$(x-1)^2 = 2\left(y+\frac{13}{6}\right)$$

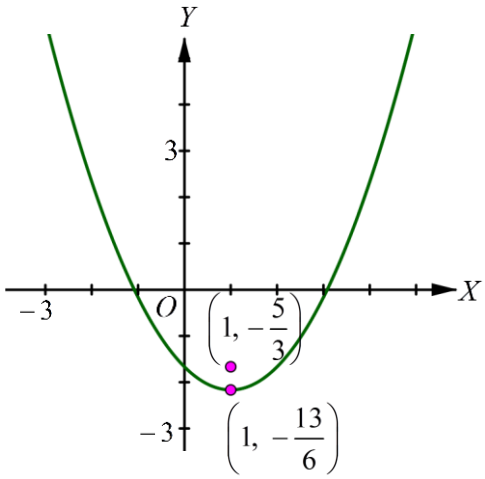
จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการพาราโบลา

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

จะได้ว่า $h=1, k=-\frac{13}{6}, 4p=2$ นั่นคือ $p=\frac{1}{2}$

ดังนั้น จุดยอด คือ $\left(1, -\frac{13}{6}\right)$ โฟกัส คือ $\left(1, -\frac{5}{3}\right)$

และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



7) จาก
$$2x^2+4 = 4x+y^2$$

จะได้
$$2x^2-4x-y^2 = -4$$
$$2\left(x^2-2x+1\right)-y^2 = -4+2$$
$$2(x-1)^2-y^2 = -2$$
$$\frac{2}{(-2)}(x-1)^2-\frac{1}{(-2)}y^2 = \frac{-2}{(-2)}$$
$$\frac{y^2}{2}-(x-1)^2 = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-1)^2$ และ y^2 มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

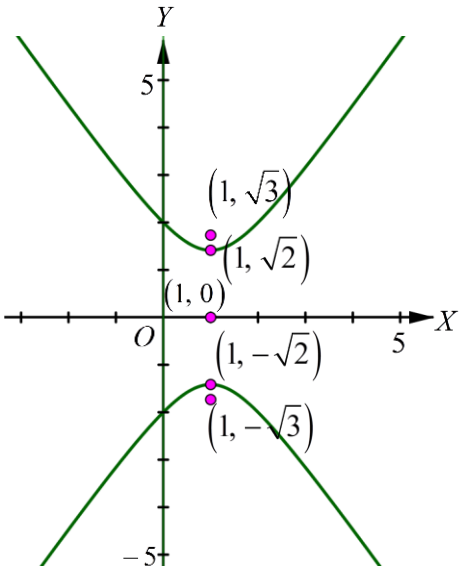
จะได้ว่า $h=1, k=0, a^2=2$ และ $b^2=1$ นั่นคือ $a=\sqrt{2}$ และ $b=1$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 2 + 1 = 3$ นั่นคือ $c = \sqrt{3}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(1, 0)$ จุดยอด คือ $(1, -\sqrt{2})$ และ $(1, \sqrt{2})$

โฟกัส คือ $(1, -\sqrt{3})$ และ $(1, \sqrt{3})$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



8) จาก $2x^2 - 12x + y^2 + 6y + 26 = 0$

จะได้ $2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 6y + 9) = -26 + 18 + 9$

$$2(x-3)^2 + (y+3)^2 = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{\frac{1}{2}} + (y+3)^2 = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-3)^2$ และ $(y+3)^2$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

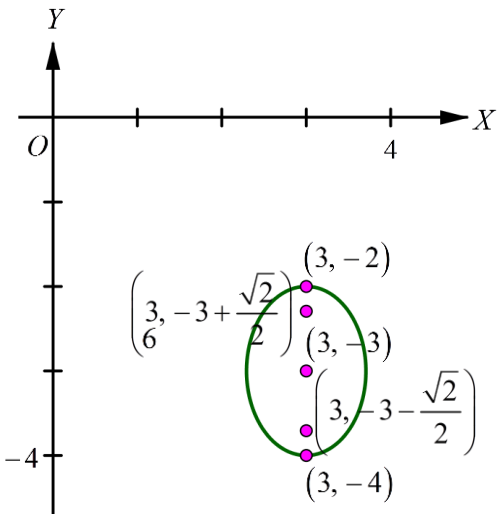
จะได้ว่า $h = 3, k = -3, a^2 = 1$ และ $b^2 = \frac{1}{2}$ นั่นคือ $a = 1$ และ $b = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ นั่นคือ $c = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(3, -3)$ จุดยอด คือ $(3, -4)$ และ $(3, -2)$

โฟกัส คือ $\left(3, -3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ และ $\left(3, -3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

และเขียนวงรีได้ดังนี้



9) จาก

$$36x^2 - 4y^2 - 36x - 8y = 31$$

จะได้

$$\begin{aligned}
(36x^2 - 36x) - (4y^2 + 8y) &= 31 \\
36(x^2 - x) - 4(y^2 + 2y) &= 31 \\
36\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 4(y^2 + 2y + 1) &= 31 + 9 - 4 \\
36\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4(y+1)^2 &= 36 \\
\frac{36}{36}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{36}(y+1)^2 &= \frac{36}{36}
\end{aligned}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ และ $(y+1)^2$ มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

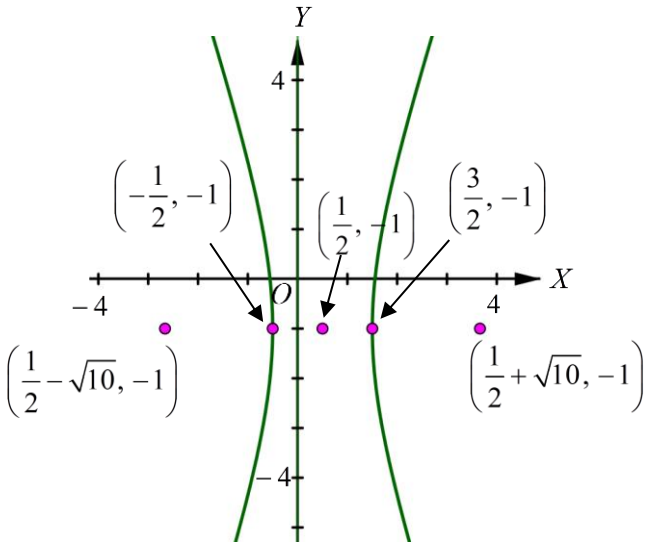
จะได้ว่า $h=\frac{1}{2}, k=-1, a^2=1$ และ $b^2=9$ นั่นคือ $a=1$ และ $b=3$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=1+9=10$ นั่นคือ $c=\sqrt{10}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ จุดยอด คือ $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ และ $\left(\frac{3}{2},-1\right)$

โฟกัส คือ $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{10},-1\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{10},-1\right)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



10) จาก $x^2+4y^2 = 4x+8$

จะได้

$$x^2+4y^2-4x = 8$$

$$\left(x^2-4x+4\right)+4y^2 = 8+4$$

$$(x-2)^2+4y^2 = 12$$

$$\frac{(x-2)^2}{12}+\frac{4}{12}y^2 = \frac{12}{12}$$

$$\frac{(x-2)^2}{12}+\frac{y^2}{3} = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-2)^2$ และ y^2 มีเครื่องหมายเหมือนกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=2, k=0, a^2=12$ และ $b^2=3$

นั่นคือ $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ และ $b=\sqrt{3}$

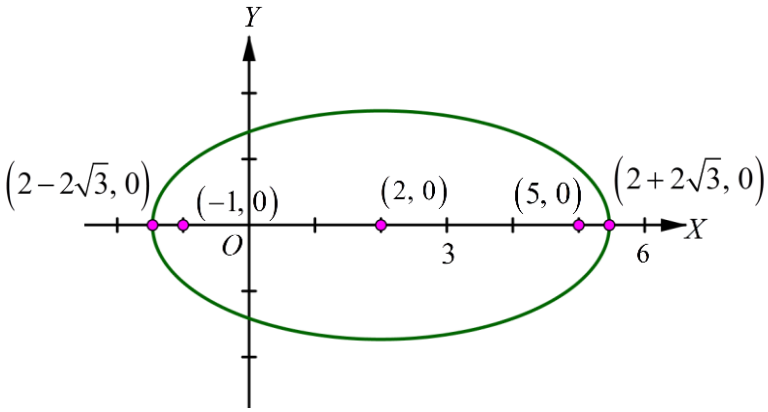
จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=12-3=9$ นั่นคือ $c=3$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(2, 0)$

จุดยอด คือ $\left(2-2\sqrt{3}, 0\right)$ และ $\left(2+2\sqrt{3}, 0\right)$

โฟกัส คือ $(-1, 0)$ และ $(5, 0)$

และเขียนวงรีได้ดังนี้



15. 1) จาก $x^2+y^2-6x+4y+9 = 0$

จะได้ $(x^2-6x)+(y^2+4y) = -9$

$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4) = -9+9+4$

$(x-3)^2+(y+2)^2 = 4$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-3)^2$ และ $(y+2)^2$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

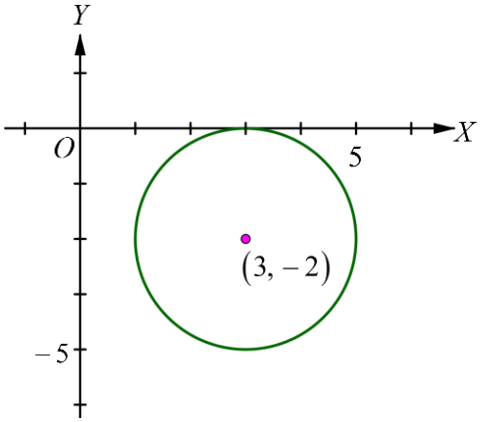
และสัมประสิทธิ์หน้า $(x-3)^2$ และ $(y+2)^2$ เป็น 1

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงกลม และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จะได้ว่า $h=3, k=-2$ และ $r^2=4$ นั่นคือ $r=2$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(3,-2)$ รัศมียาว 2 หน่วย

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



2) จาก $x^2+4y^2-6x+16y+21 = 0$

จะได้ $(x^2-6x)+4(y^2+4y) = -21$

$$(x^2-6x+9)+4(y^2+4y+4) = -21+9+16$$

$$(x-3)^2+4(y+2)^2 = 4$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{4}{4}(y+2)^2 = \frac{4}{4}$$

$$\frac{(x-3)^2}{4}+(y+2)^2 = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-3)^2$ และ $(y+2)^2$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

และสัมประสิทธิ์หน้า $(x-3)^2$ และ $(y+2)^2$ ไม่เท่ากับ 1

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

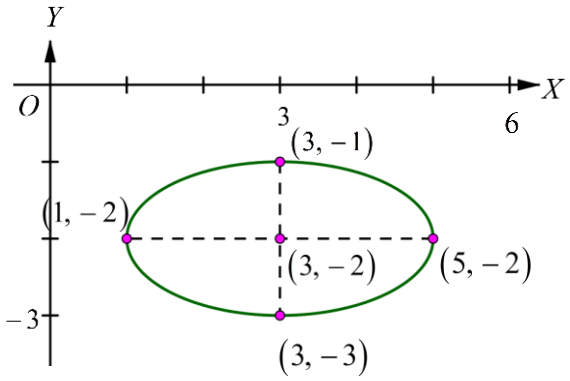
และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=3, k=-2, a^2=4$ และ $b^2=1$ นั่นคือ $a=2$ และ $b=1$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=4-1=3$ นั่นคือ $c=\sqrt{3}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(3,-2)$ แกนเอกยาว 4 หน่วย

แกนโทยาว 2 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



3) จาก $4x^2 - y^2 - 4x - 3 = 0$

จะได้ $4(x^2 - x) - y^2 = 3$

$$4\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - y^2 = 3+1$$

$$4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = 4$$

$$\frac{4}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 = \frac{4}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ และ y^2 มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

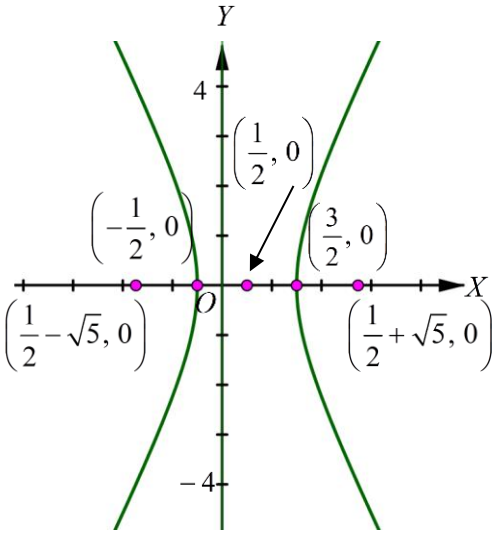
จะได้ว่า $h = \frac{1}{2}, k = 0, a^2 = 1$ และ $b^2 = 4$ นั่นคือ $a = 1$ และ $b = 2$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 1 + 4 = 5$ นั่นคือ $c = \sqrt{5}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ จุดยอด คือ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ และ $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

โฟกัส คือ $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{5}, 0\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}+\sqrt{5}, 0\right)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



4) จาก $y^2-4y-4x = 0$

จะได้ $(y^2-4y) = 4x$

$(y^2-4y+4) = 4x+4$

$(y-2)^2 = 4(x+1)$

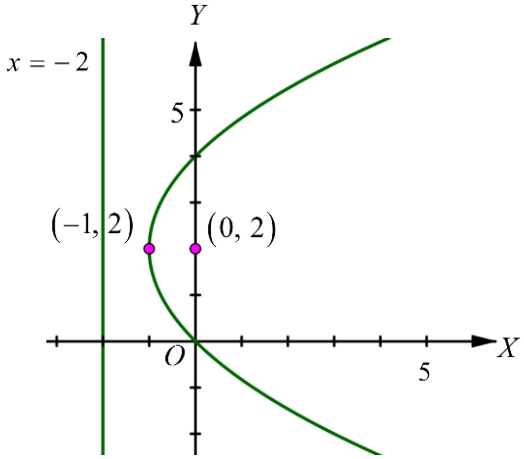
จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการพาราโบลา

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

จะได้ว่า $h=-1, k=2, 4p=4$ นั่นคือ $p=1$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(-1, 2)$ โฟกัส คือ $(0, 2)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $x=-2$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



5) จาก $4x^2+3y^2+8x-24y+51 = 0$

จะได้ $(4x^2+8x)+(3y^2-24y) = -51$

$$4(x^2+2x)+3(y^2-8y) = -51$$

$$4(x^2+2x+1)+3(y^2-8y+16) = -51+4+48$$

$$4(x+1)^2+3(y-4)^2 = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(y-4)^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x+1)^2$ และ $(y-4)^2$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

และสัมประสิทธิ์หน้า $(x+1)^2$ และ $(y-4)^2$ ไม่เท่ากับ 1

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

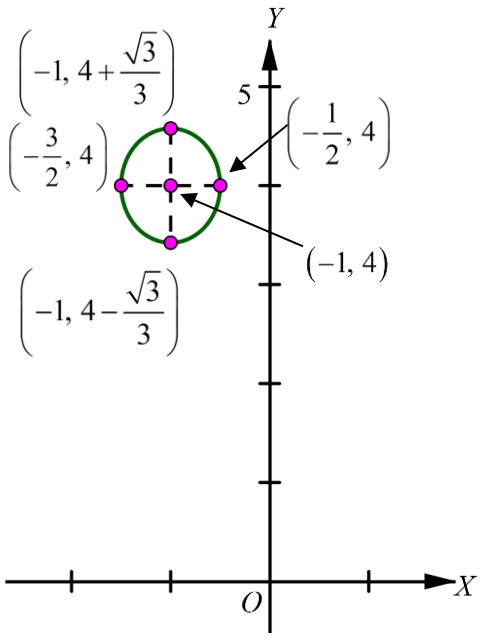
และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

จะได้ว่า $h=-1, k=4, a^2=\frac{1}{3}$ และ $b^2=\frac{1}{4}$ นั่นคือ $a=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ และ $b=\frac{1}{2}$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $c^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ นั่นคือ $c=\frac{1}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(-1, 4)$ แกนเอกยาว $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ หน่วย

แกนโทยาว 1 หน่วย และเขียนวงรีได้ดังนี้



6) จาก $4y^2-2x^2-4y-8x-15 = 0$

จะได้ $(4y^2-4y)+(-2x^2-8x) = 15$

$$4(y^2-y)-2(x^2+4x) = 15$$

$$4\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)-2(x^2+4x+4) = 15+1-8$$

$$4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-2(x+2)^2 = 8$$

$$4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-2(x+2)^2 = 8$$

$$\frac{4}{8}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{8}(x+2)^2 = \frac{8}{8}$$

$$\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{2}-\frac{(x+2)^2}{4} = 1$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$ และ $(x+2)^2$ มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

จะได้ว่า $h=-2, k=\frac{1}{2}, a^2=2$ และ $b^2=4$ นั่นคือ $a=\sqrt{2}$ และ $b=2$

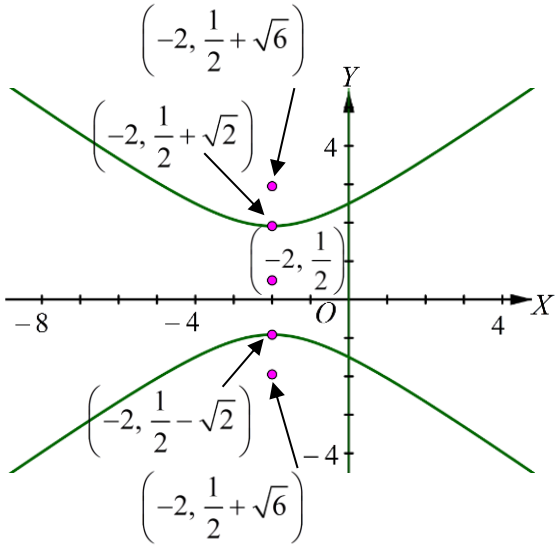
จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=2+4=6$ นั่นคือ $c=\sqrt{6}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

จุดยอด คือ $\left(-2, \frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$ และ $\left(-2, \frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$

โฟกัส คือ $\left(-2, \frac{1}{2}-\sqrt{6}\right)$ และ $\left(-2, \frac{1}{2}+\sqrt{6}\right)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



7) จาก $25x^2 - 10x - 200y - 119 = 0$

จะได้ $25x^2 - 10x = 200y + 119$

$$25\left(x^2 - \frac{2}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) = 200y + 119 + 1$$

$$25\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = 200y + 120$$

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = 8y + \frac{24}{5}$$

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = 8\left(y + \frac{3}{5}\right)$$

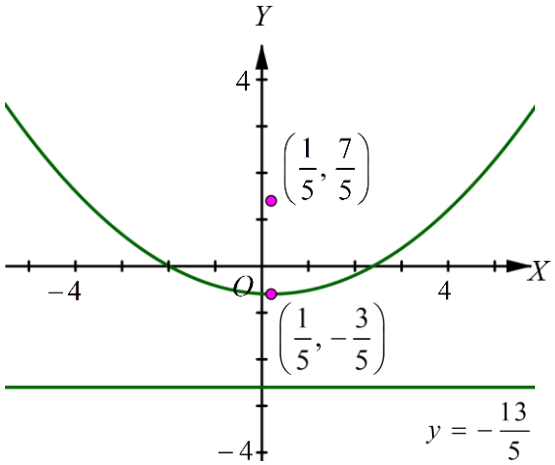
จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการพาราโบลา

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

จะได้ว่า $h = \frac{1}{5}, k = -\frac{3}{5}, 4p = 8$ นั่นคือ $p = 2$

ดังนั้น จุดยอด คือ $\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ โฟกัส คือ $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y = -\frac{13}{5}$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



8) จาก $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$

จะได้ $4x^2 + 4\left(y^2 - 4y\right) = -15$

$$4x^2 + 4\left(y^2 - 4y + 4\right) = -15 + 16$$

$$4x^2 + 4(y-2)^2 = 1$$

$$x^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ x^2 และ $(y-2)^2$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

และสัมประสิทธิ์หน้า x^2 และ $(y-2)^2$ เป็น 1

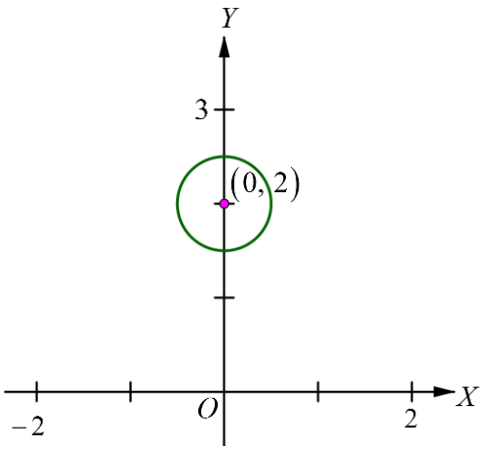
ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงกลม และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้ว่า $h = 0, k = 2$ และ $r^2 = \frac{1}{4}$ นั่นคือ $r = \frac{1}{2}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 2)$ รัศมียาว $\frac{1}{2}$ หน่วย

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



9) จาก
$$4x^2 - y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$$

จะได้
$$\begin{aligned}
\left(4x^2 + 8x\right) + \left(-y^2 - 6y\right) &= -4 \\
4\left(x^2 + 2x\right) - \left(y^2 + 6y\right) &= -4 \\
4\left(x^2 + 2x + 1\right) - \left(y^2 + 6y + 9\right) &= -4 + 4 - 9 \\
4(x+1)^2 - (y+3)^2 &= -9 \\
\frac{4}{(-9)}(x+1)^2 - \frac{1}{(-9)}(y+3)^2 &= \frac{-9}{(-9)} \\
\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{\frac{9}{4}} &= 1
\end{aligned}$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(y+3)^2$ และ $(x+1)^2$ มีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

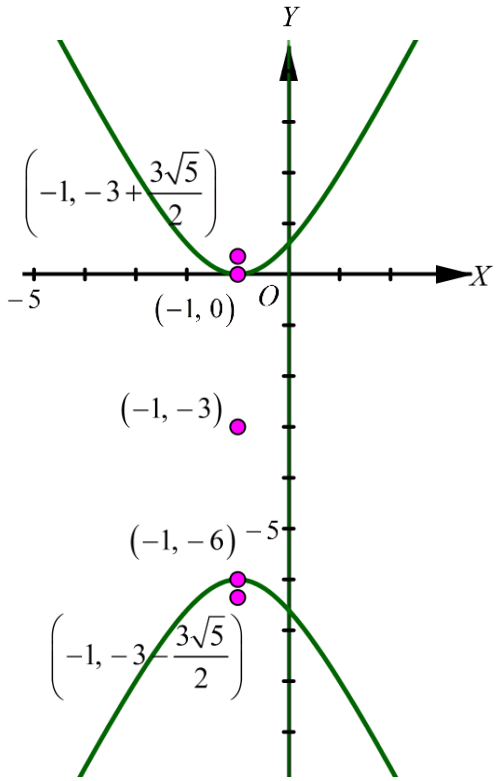
จะได้ว่า $h=-1, k=-3, a^2=9$ และ $b^2=\frac{9}{4}$ นั่นคือ $a=3$ และ $b=\frac{3}{2}$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=9+\frac{9}{4}=\frac{45}{4}$ นั่นคือ $c=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(-1,-3)$ จุดยอด คือ $(-1,-6)$ และ $(-1,0)$

โฟกัส คือ $\left(-1,-3-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ และ $\left(-1,-3+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



10) จาก $2x^2+2y^2-8x+12y+2 = 0$

จะได้ $(2x^2-8x)+(2y^2+12y) = -2$

$2(x^2-4x)+2(y^2+6y) = -2$

$2(x^2-4x+4)+2(y^2+6y+9) = -2+8+18$

$$2(x-2)^2+2(y+3)^2 = 24$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2 = 12$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ $(x-2)^2$ และ $(y+3)^2$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

และสัมประสิทธิ์หน้า $(x-2)^2$ และ $(y+3)^2$ เป็น 1

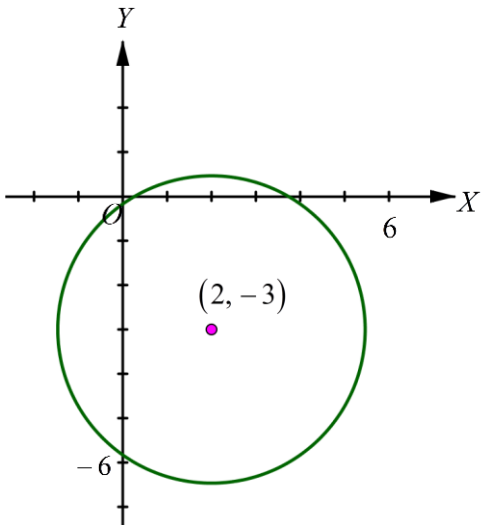
ดังนั้น สมการนี้เป็นสมการวงกลม และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จะได้ว่า $h=2, k=-3$ และ $r^2=12$ นั่นคือ $r=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ $(2,-3)$ รัศมียาว $2\sqrt{3}$ หน่วย

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



16. 1) จากพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0,1)$ และไดเรกตริกซ์ คือ $y=-1$

แสดงว่าพาราโบลานี้มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(x-h)^2=4p(y-k)$

นั่นคือ $h=0, k=0, k+p=1$ และ $k-p=-1$ จะได้ $p=1$

แทน h, k และ p ด้วย $0, 0$ และ 1 ตามลำดับ ใน $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

จะได้
$$(x-0)^2 = 4(1)(y-0)$$
$$x^2 = 4y$$

ดังนั้น สมการพาราโบลานี้ คือ $x^2 = 4y$

2) จากวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $C(0, 4)$ โฟกัส คือ $F_1(0, 0)$ และ $F_2(0, 8)$ และแกนเอกยาว 10 หน่วย

แสดงว่าแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

จุดศูนย์กลาง คือ (h, k) โฟกัสอยู่ที่จุด $(h, k \pm c)$ และแกนเอกยาว $2a$ หน่วย

นั่นคือ $h = 0, k = 4, k - c = 0, k + c = 8$ และ $2a = 10$

จะได้ $c = 4$ และ $a = 5$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ นั่นคือ $b = 3$

แทน h, k, a และ b ด้วย $0, 4, 5$ และ 3 ตามลำดับ ใน $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

จะได้
$$\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-4)^2}{5^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

3) จากไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(0, -2), V_2(0, 2)$ และเส้นกำกับคือ $y = \pm\frac{1}{2}x$

แสดงว่าแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$

มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

นั่นคือ $h=0, k=0, k-a=-2, k+a=2, \frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ จะได้ $a=2, b=4$

แทน h, k, a และ b ด้วย 0, 0, 2 และ 4 ตามลำดับ ใน $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

จะได้
$$\frac{(y-0)^2}{2^2}-\frac{(x-0)^2}{4^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16} = 1$$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$

4) จากไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(2, 4)$ โฟกัส คือ $F_1(2, 1)$ และ $F_2(2, 7)$

จุดยอด คือ $V_1(2, 6)$ และ $V_2(2, 2)$

แสดงว่าแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น

$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

นั่นคือ $h=2, k=4, k-c=1, k+c=7, k-a=2, k+a=6$

จะได้ $c=3, a=2$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $b^2=a^2-c^2=3^2-2^2=9-4=5$ นั่นคือ $b=\sqrt{5}$

แทน h, k, a และ b ด้วย 2, 4, 2 และ $\sqrt{5}$ ตามลำดับ ใน $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

จะได้
$$\frac{(y-4)^2}{2^2}-\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$
$$\frac{(y-4)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5} = 1$$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\frac{(y-4)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=1$

5) จากวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(1,1)$ และ $F_2(1,3)$ และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนแกน X แสดงว่าแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,2)$

มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

นั่นคือ $h=1, k=2, k-c=1, k+c=3, k-a=0$ จะได้ $c=1$ และ $a=2$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $b^2=a^2-c^2=2^2-1^2=4-1=3$ นั่นคือ $b=\sqrt{3}$

แทน h, k, a และ b ด้วย 1, 2, 2 และ $\sqrt{3}$ ตามลำดับ ใน $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

จะได้
$$\frac{(x-1)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$$
$$\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

6) จากพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(5,5)$ และแกน Y เป็นไดเรกตริกซ์ แสดงว่าแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(y-k)^2=4p(x-h)$

นั่นคือ $h=5, k=5, h-p=0$ จะได้ $p=5$

แทน h, k และ p ด้วย 5, 5 และ 5 ตามลำดับ ใน $(y-k)^2=4p(x-h)$

จะได้
$$(y-5)^2 = 4(5)(x-5)$$
$$(y-5)^2 = 20(x-5)$$

ดังนั้น สมการพาราโบลานี้ คือ $(y-5)^2=20(x-5)$

7) จากวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(7,12)$ และ $V_2(7,-8)$ และผ่านจุด $P(1,8)$

แสดงว่าแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

นั่นคือ $h=7, k-a=-8, k+a=12, x=1$ และ $y=8$ จะได้ $k=2$ และ $a=10$

แทน h, k, x, y และ a ด้วย $7, 2, 1, 8$ และ 10 ตามลำดับ ใน $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

จะได้
$$\begin{aligned}
\frac{(1-7)^2}{b^2}+\frac{(8-2)^2}{10^2} &= 1\\
\frac{36}{b^2}+\frac{36}{100} &= 1\\
\frac{36}{b^2} &= 1-\frac{36}{100}\\
\frac{36}{b^2} &= \frac{64}{100}\\
b^2 &= \frac{36\times 100}{64}\\
b^2 &= \frac{225}{4}
\end{aligned}$$

แทน h, k, a และ b^2 ด้วย $7, 2, 10$ และ $\frac{225}{4}$ ใน $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

จะได้
$$\begin{aligned}
\frac{(x-7)^2}{\frac{225}{4}}+\frac{(y-2)^2}{10^2} &= 1\\
\frac{4(x-7)^2}{225}+\frac{(y-2)^2}{100} &= 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\frac{4(x-7)^2}{225}+\frac{(y-2)^2}{100}=1$

8) จากพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(-1, 0)$ แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน และมีระยะตัดแกน Y เท่ากับ 2

แสดงว่ามีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

นั่นคือ $h=-1, k=0, x=0$ และ $y=2$

แทน h, k, x และ y ด้วย $-1, 0, 0$ และ 2 ตามลำดับ ใน $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

จะได้
$$\begin{aligned}(2-0)^2 &= 4p(0-(-1)) \\ 4 &= 4p \\ p &= 1\end{aligned}$$

แทน h, k และ p ด้วย $-1, 0$ และ 1 ใน $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

จะได้
$$\begin{aligned}(y-0)^2 &= 4(1)(x-(-1)) \\ y^2 &= 4(x+1)\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการพาราโบลานี้ คือ $y^2 = 4(x+1)$

17. 1) **วิธีที่ 1** จากระยะห่างจากจุด $P(x, y)$ กับจุด $(7, 2)$ เป็น 5 หน่วย

จะได้ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดคือ
$$\begin{aligned}5 &= \sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2} \\ (x-7)^2+(y-2)^2 &= 25 \\ x^2+y^2-14x-4y+28 &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด $P(x, y)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข คือ $x^2+y^2-14x-4y+28=0$

วิธีที่ 2 จากระยะห่างจากจุด $P(x, y)$ กับจุด $(7, 2)$ เป็น 5 หน่วย

จะได้ว่า จุด $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(7, 2)$

และรัศมียาว 5 หน่วย

ดังนั้น สมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด $P(x, y)$ ซึ่งสอดคล้อง กับเงื่อนไข

คือ $(x-7)^2+(y-2)^2=25$ หรือ $x^2+y^2-14x-4y+28=0$

2) จากระยะห่างจากจุด $P(x, y)$ กับจุด $(-3, 2)$ และ $(-3, 8)$ รวมกันเป็น 10 หน่วย

จะได้ว่า จุด $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-3, 2)$ และ $(-3, 8)$

แกนเอกอยู่ในแนวตั้งและยาว 10 หน่วย

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงรีอยู่ที่ $\left(\frac{-3-3}{2}, \frac{2+8}{2}\right)=(-3,5)$

จะได้ $2a=10, h=-3, k=5, k-c=2$ และ $k+c=8$

นั่นคือ $a=5$ และ $c=3$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=25-9=16$

ดังนั้น สมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด $P(x, y)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

คือ $\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

3) จากระยะห่างจากจุด $P(x, y)$ กับจุด $(2, 2)$ เท่ากับระยะห่างจากจุด $P(x, y)$

ถึงเส้นตรง $y=4$

จะได้ว่า จุด $P(x, y)$ เป็นจุดบนพาราโบลาที่เป็นเส้นโค้งคว่ำลง

มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(2, 2)$ และไดเรกตริกซ์ คือ $y=4$

จะได้ $h=2, k+p=2$ และ $k-p=4$ นั่นคือ $k=3$ และ $p=-1$

ดังนั้น สมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด $P(x, y)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

คือ $(x-2)^2 = -4(y-3)$

4) จากระยะห่างจากจุด $P(x, y)$ กับจุด $(0, 5)$ และ $(10, 5)$ ต่างกัน 8 หน่วย

จะได้ว่า จุด $P(x, y)$ เป็นจุดบนไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, 5)$ และ $(10, 5)$

และแกนตามขวางอยู่ในแนวนอนและยาว 8 หน่วย

จะได้ $2a = 8, h-c = 0, h+c=10$ และ $k=5$

นั่นคือ $a = 4, h = 5$ และ $c = 5$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 25-16 = 9$

ดังนั้น สมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด $P(x, y)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

คือ $\dfrac{(x-5)^2}{16} - \dfrac{(y-5)^2}{9} = 1$

18. 1) จากเงื่อนไขของโจทย์ที่ว่า จุดทั้งหมดที่มีระยะห่างจากจุด $(0, 1)$ และระยะห่าง

จากเส้นตรง $y = -1$ เท่ากัน

จะได้ว่า ภาคตัดกรวยที่กำหนดให้เป็นพาราโบลาที่เป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

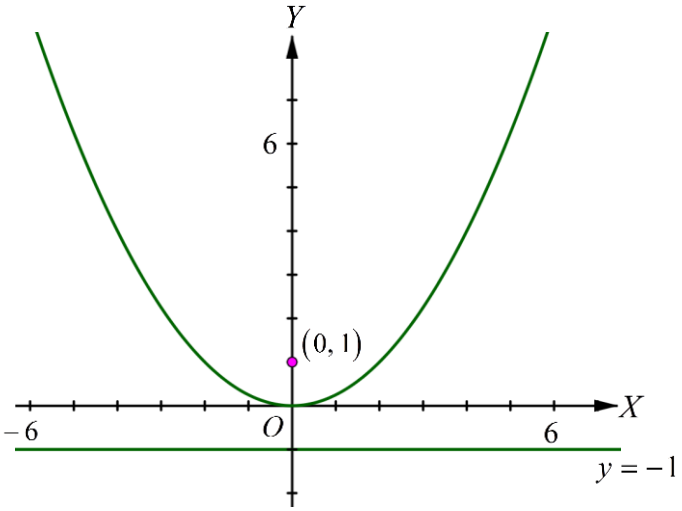
มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0,1)$ ไดเรกตริกซ์ คือ $y = -1$ และจุดยอด คือ $(0,0)$

จะได้ $h = 0, k = 0, k + p = 1$ และ $k - p = -1$ นั่นคือ $p = 1$

ดังนั้น สมการพาราโบลานี้ คือ $x^2 = 4y$

นั่นคือ เซตของจุดทั้งหมดที่มีระยะห่างจากจุด $(0, 1)$ และระยะห่างจากเส้นตรง

$y = -1$ เท่ากัน คือ $\{(x, y) \mid x^2 = 4y\}$ และเขียนพาราโบลาได้ดังนี้



จะเห็นว่า ความสัมพันธ์นี้เป็นฟังก์ชัน

2) จากเงื่อนไขของโจทย์ที่ว่า จุดทั้งหมดที่อยู่บนวงกลมที่มีส่วนของเส้นตรงที่เชื่อม

จุด $(7, 5)$ และ $(11, 3)$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลมนี้ คือ $\left(\frac{7+11}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$ หรือ $(9, 4)$

เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมนี้ยาว $\sqrt{(7-11)^2+(5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ หน่วย

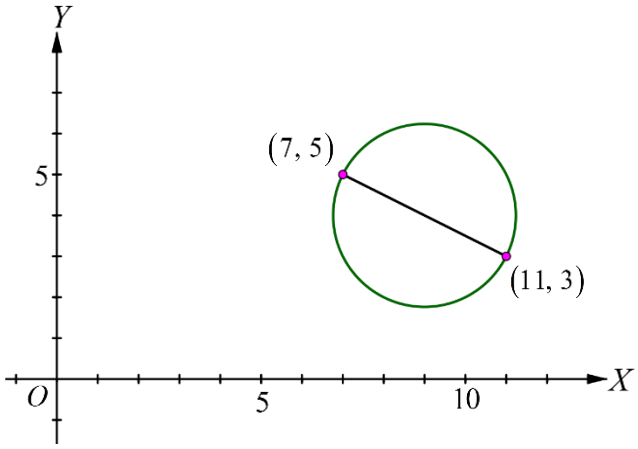
นั่นคือ รัศมีของวงกลมนี้ยาว $\frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$ หน่วย

ดังนั้น สมการวงกลมนี้ คือ $(x-9)^2+(y-4)^2 = 5$

นั่นคือ เซตของจุดทั้งหมดที่อยู่บนวงกลมที่มีส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(7, 5)$

และ $(11, 3)$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง คือ $\left\{(x, y) \middle| (x-9)^2+(y-4)^2 = 5\right\}$

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



จะเห็นว่า ความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

3) จากเงื่อนไขของโจทย์ที่ว่า จุดทั้งหมดที่มีผลต่างของระยะห่างจากจุด $(1, 3)$ และ $(1, 9)$ เป็น 4 หน่วย

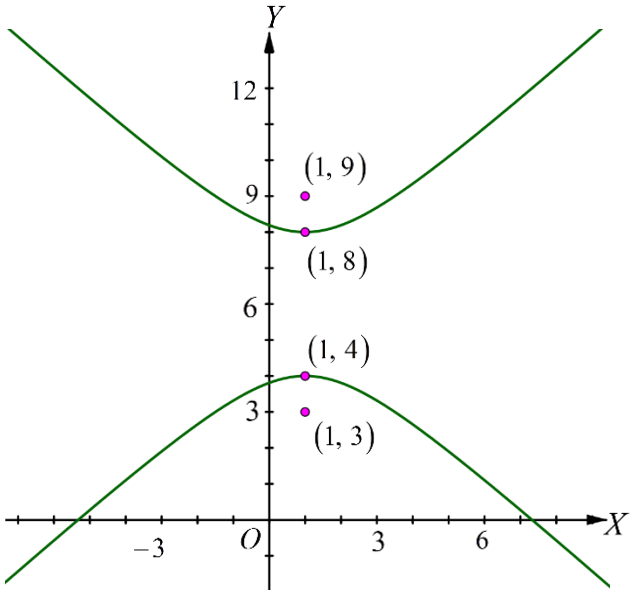
จะได้ว่า ภาคตัดกรวยที่กำหนดให้เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(1, 3)$ และ $(1, 9)$ และแกนตามขวางยาว 4 หน่วย

จะได้ $h = 1, k - c = 3, k + c = 9$ และ $2a = 4$ นั่นคือ $k = 6, c = 3$ และ $a = 2$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $b^2 = c^2 - a^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลานี้ คือ $\dfrac{(y-6)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{5} = 1$

นั่นคือ เซตของจุดทั้งหมดที่มีผลต่างของระยะห่างจากจุด $(1, 3)$ และ $(1, 9)$ เป็น 4 หน่วย คือ $\left\{ (x, y) \middle| \dfrac{(y-6)^2}{4} - \dfrac{(x-1)^2}{5} = 1 \right\}$ และเขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



จะเห็นว่า ความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

4) จากเงื่อนไขของโจทย์ที่ว่า จุดทั้งหมดที่มีผลรวมของระยะห่างจากจุด $(-1,-1)$ และ $(11,-1)$ เป็น 26 หน่วย

จะได้ว่า ภาคตัดกรวยที่กำหนดให้เป็นวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-1,-1)$ และ $(11,-1)$ และแกนเอกยาว 26 หน่วย

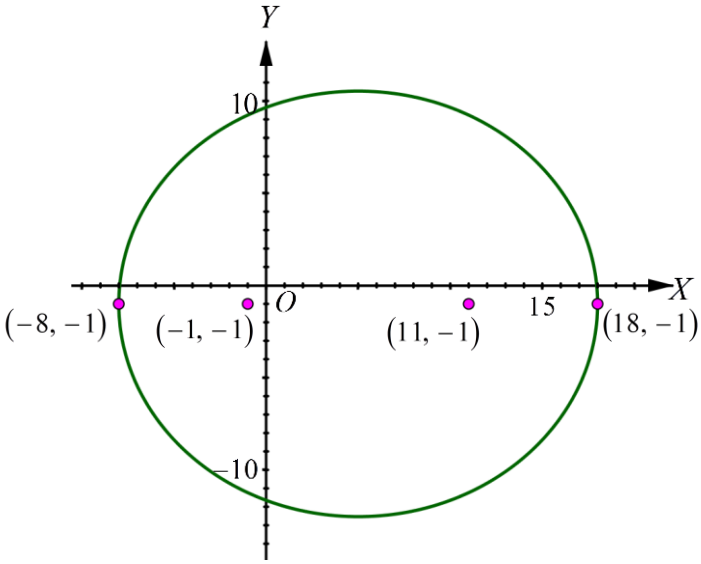
จะได้ $h-c=-1, h+c=11, k=-1$ และ $2a=26$

นั่นคือ $h=5, c=6$ และ $a=13$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $b^2=a^2-c^2=13^2-6^2=169-36=133$

ดังนั้น สมการวงรีนี้ คือ $\dfrac{(x-5)^2}{169}+\dfrac{(y+1)^2}{133}=1$

นั่นคือ จุดทั้งหมดที่มีผลรวมของระยะห่างจากจุด $(-1,-1)$ และ $(11,-1)$ เป็น 26 หน่วย คือ $\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{(x-5)^2}{169}+\dfrac{(y+1)^2}{133}=1\right\}$ และเขียนวงรีได้ดังนี้



จะเห็นว่า ความสัมพันธ์นี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

19. 1) จากวงกลม C มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(5, 3)$ รัศมียาว 5 หน่วย

จะได้ว่า สมการของวงกลม C คือ $(x-5)^2+(y-3)^2=25$

2) จาก $(x-5)^2+(y-3)^2 = 25$

และเนื่องจาก $(x-5)^2 \geq 0$ และ $(y-3)^2 \geq 0$

จะได้ว่า ค่าที่เป็นไปได้ที่เป็นจำนวนเต็มของ $x-5$ คือ $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$

กรณีที่ 1 $x-5=0$

จะได้ $(y-3)^2=25$ นั่นคือ $y-3=\pm 5$

ดังนั้น $(5, -2)$ และ $(5, 8)$ เป็นพิกัดบนวงกลม C

กรณีที่ 2 $x-5=\pm 1$

จะได้ $(y-3)^2=24$ นั่นคือ $y-3=\pm\sqrt{24}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น ในกรณีนี้ y ไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3 $x-5=\pm 2$

จะได้ $(y-3)^2=21$ นั่นคือ $y-3=\pm\sqrt{21}$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น ในกรณีนี้ y ไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 4 $x-5=\pm 3$

จะได้ $(y-3)^2=16$ นั่นคือ $y-3=\pm 4$

ดังนั้น $(2,-1),(2,7),(8,-1)$ และ $(8,7)$ เป็นพิกัดบนวงกลม C

กรณีที่ 5 $x-5=\pm 4$

จะได้ $(y-3)^2=9$ นั่นคือ $y-3=\pm 3$

ดังนั้น $(1,0),(1,6),(9,0)$ และ $(9,6)$ เป็นพิกัดบนวงกลม C

กรณีที่ 6 $x-5=\pm 5$

จะได้ $(y-3)^2=0$ นั่นคือ $y-3=0$

ดังนั้น $(0,3)$ และ $(10,3)$ เป็นพิกัดบนวงกลม C

ดังนั้น พิกัด $(x,y)\in C$ ทั้งหมดที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มมี 12 พิกัด ได้แก่ $(5,-2),(5,8),(2,-1),(2,7),(8,-1),(8,7),(1,0),(1,6),(9,0),(9,6),(0,3)$ และ $(10,3)$

20. จาก
$$\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

แสดงว่าเป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐาน

เป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ จะได้ว่า $h=1, k=2, a=5, b=4$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=5^2+4^2=25+16=41$ นั่นคือ $c=\sqrt{41}$

นั่นคือ ไฮเพอร์โบลานี้มีจุดยอด คือ $(-4,2),(6,2)$ และโฟกัส คือ $(1-\sqrt{41},2),(1+\sqrt{41},2)$

จะได้ว่า วงรีที่ต้องการหามีโฟกัส คือ $(-4,2),(6,2)$

และมีจุดยอด คือ $\left(1-\sqrt{41},\ 2\right), \left(1+\sqrt{41},\ 2\right)$

แสดงว่าเป็นวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น

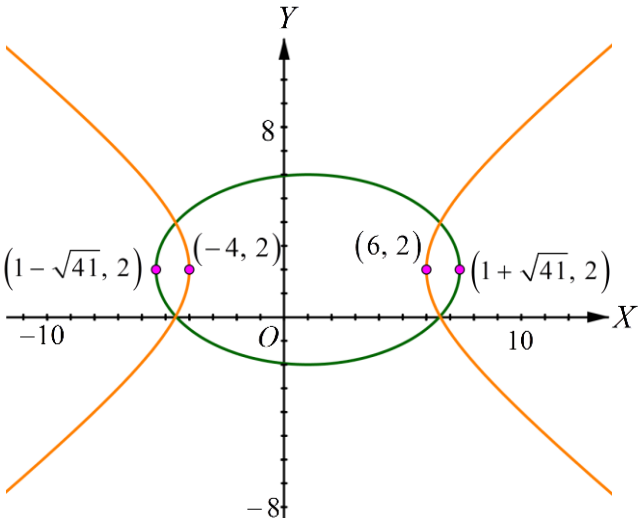
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

จะได้ $h-a=1-\sqrt{41},\ h+a=1+\sqrt{41},\ k=2,\ h-c=-4,\ h+c=6$

นั่นคือ $h=1,\ a=\sqrt{41},\ c=5$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $b^2=a^2-c^2=41-25=16$

ดังนั้น สมการของวงรีนี้ คือ $\dfrac{(x-1)^2}{41}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$



21. จาก
$$4x^2-4x+my^2 = 8$$
จะได้
$$4\left(x^2-x\right)+my^2 = 8$$
$$4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+my^2 = 8+1$$
$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+my^2 = 9$$

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{m}} = 1$$

กรณีที่ $m<0$ จะทำให้ $4x^2-4x+my^2=8$ เป็นสมการไฮเพอร์โบลา

กรณีที่ $m=4$ จะทำให้ $4x^2-4x+my^2=8$ เป็นสมการวงกลม

กรณีที่ $m>4$ จะทำให้ $4x^2-4x+my^2=8$ เป็นสมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน

นั่นคือ โฟกัสทั้งสองอยู่บนแกน X

และเนื่องจาก จุด A อยู่บนแกน X

จะได้ว่า จุด F_1, F_2 และ A อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จึงไม่เกิดรูปสามเหลี่ยม

ดังนั้น จึงไม่สามารถหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม F_1F_2A ได้

กรณีที่ $0<m<4$ จะทำให้ $4x^2-4x+my^2=8$ เป็นสมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

จะได้ $h=\frac{1}{2}, k=0, a=\frac{3}{\sqrt{m}}, b=\frac{3}{2}$

จาก $c^2=a^2+b^2$ จะได้ $c^2=\frac{9}{m}-\frac{9}{4}$ นั่นคือ $c=\sqrt{\frac{9}{m}-\frac{9}{4}}$

เนื่องจาก ระยะห่างระหว่างจุด F_1 และ F_2 เป็นความยาวฐานของ

รูปสามเหลี่ยม F_1F_2A และระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงรีนี้

กับจุด A เป็นความสูงของรูปสามเหลี่ยม F_1F_2A

นั่นคือ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม F_1F_2A เท่ากับ $\frac{1}{2}(2c)b$ ตารางหน่วย

แทน b และ c ด้วย $\frac{3}{2}$ และ $\sqrt{\frac{9}{m}-\frac{9}{4}}$ ตามลำดับ ใน $\frac{1}{2}(2c)b$

จะได้ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม F_1F_2A เท่ากับ

$$\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{9}{m}-\frac{9}{4}}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{m}-\frac{9}{4}} \text{ ตารางหน่วย}$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม F_1F_2A เท่ากับ $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{m}-\frac{9}{4}}$ ตารางหน่วย เมื่อ $0<m<4$

22. จากเส้นตรง $y=-x$ และวงกลม $(x-3)^2+y^2=9$

แทน y ด้วย $-x$ ใน $(x-3)^2+y^2=9$

จะได้

$$\begin{aligned}(x-3)^2+(-x)^2 &= 9\\ x^2-6x+9+x^2 &= 9\\ 2x^2-6x &= 0\\ 2x(x-3) &= 0\\ x = 0 \text{ หรือ } x &= 3\end{aligned}$$

แทน x ด้วย 0 ใน $(x-3)^2+y^2=9$

จะได้

$$\begin{aligned}(0-3)^2+y^2 &= 9\\ y &= 0\end{aligned}$$

แทน x ด้วย 3 ใน $(x-3)^2+y^2=9$

จะได้

$$\begin{aligned}(3-3)^2+y^2 &= 9\\ y = -3 \text{ หรือ } y &= 3\end{aligned}$$

แต่จุด $(3, 3)$ ไม่อยู่บนเส้นตรง $y=-x$

จะได้ จุดตัดของเส้นตรง $y=-x$ กับวงกลม $(x-3)^2+y^2=9$ คือจุด $(0, 0)$ และ $(3, -3)$

หาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุด $(0, 0)$ และ $(3, -3)$ และมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

นั่นคือ โฟกัสอยู่บนแกน X และสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(y-k)^2=4p(x-h)$

จุดยอด คือ $(0, 0)$ และพาราโบลาผ่านจุด $(3, -3)$ จะได้ $h=0, k=0, x=3, y=-3$

แทน h, k, x และ y ด้วย $0, 0, 3$ และ -3 ตามลำดับ ใน $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

จะได้
$$\begin{aligned}(-3-0)^2 &= 4p(3-0)\\ 9 &= 12p\\ p &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการพาราโบลานี้ คือ $y^2 = 3x$

23. จาก
$$\frac{(x-3)^2}{49} - \frac{(y+4)^2}{576} = 1$$

จะได้ $h = 3, k = -4, a^2 = 49, b^2 = 576$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 49 + 576 = 625$ นั่นคือ $c = 25$

จะได้ โฟกัสของไฮเพอร์โบลานี้ คือ $(-22, -4)$ และ $(28, -4)$

จากเส้นตรงสองเส้นมีความชันเท่ากับ 1 และผ่านโฟกัสของไฮเพอร์โบลานี้

และจากสมการรูปแบบมาตรฐานของเส้นตรงคือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

หาเส้นตรงเส้นที่หนึ่ง เมื่อ $m = 1$ และผ่านจุด $(-22, -4)$

จะได้
$$\begin{aligned}y-(-4) &= (1)(x-(-22))\\ y+4 &= x+22\\ x-y+18 &= 0\end{aligned}$$

หาเส้นตรงเส้นที่สอง เมื่อ $m = 1$ และผ่านจุด $(28, -4)$

จะได้
$$\begin{aligned}y-(-4) &= (1)(x-28)\\ y+4 &= x-28\\ x-y-32 &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเส้นตรงทั้งสองเส้น คือ $\dfrac{|18-(-32)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{50}{\sqrt{2}} = 25\sqrt{2}$ หน่วย

24. จาก $x^2-6x = 6-2y-y^2$

จะได้ $(x^2-6x)+(y^2+2y) = 6$

$(x^2-6x+9)+(y^2+2y+1) = 6+9+1$

$(x-3)^2+(y+1)^2 = 16$

ซึ่งเป็นสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3,-1)$

จาก $y^2-8x = 4$

จะได้ $y^2 = 8x+4$

$y^2 = 8\left(x+\frac{1}{2}\right)$

ซึ่งเป็นสมการพาราโบลา ที่มีโฟกัสอยู่ที่ $\left(\frac{3}{2},0\right)$

หาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,-1)$ และ $\left(\frac{3}{2},0\right)$

จากสมการรูปแบบมาตรฐานของเส้นตรงคือ $y-y_1=m(x-x_1)$

จะได้ $0-(-1) = m\left(\frac{3}{2}-3\right)$

$1 = m\left(-\frac{3}{2}\right)$

$m = -\frac{2}{3}$

หาเส้นตรงที่ $m=-\frac{2}{3}$ และผ่านจุด $(3,-1)$

จะได้ $y-(-1) = \left(-\frac{2}{3}\right)(x-3)$

$y+1 = -\frac{2}{3}x+2$

$y = -\frac{2}{3}x+1$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของ $x^2-6x=6-2y-y^2$ และโฟกัส

ของ $y^2-8x=4$ คือ $y=-\frac{2}{3}x+1$

25. จาก
$$2y^2-x = 4$$
จะได้
$$2y^2 = x+4$$
$$y^2 = \frac{1}{2}(x+4)$$

นั่นคือพาราโบลา ที่มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(y-k)^2=4p(x-h)$

จะได้ $h=-4, k=0, 4p=\frac{1}{2}$ นั่นคือ $p=\frac{1}{8}$

ดังนั้น พาราโบลานี้มีจุดยอดอยู่ที่ $(-4, 0)$ โฟกัสอยู่ที่ $\left(-\frac{31}{8}, 0\right)$

เนื่องจากเลตัสเรกตัมคือคอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านโฟกัสของพาราโบลา

แทน x ด้วย $-\frac{31}{8}$ ใน $2y^2-x=4$ เพื่อหาจุดปลายของเลตัสเรกตัม

จะได้
$$2y^2-\left(-\frac{31}{8}\right) = 4$$
$$2y^2 = 4-\frac{31}{8}$$
$$2y^2 = \frac{1}{8}$$
$$y^2 = \frac{1}{16}$$
$$y = \pm\frac{1}{4}$$

ดังนั้น จุดปลายของเลตัสเรกตัมของพาราโบลานี้ คือ $\left(-\frac{31}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ และ $\left(-\frac{31}{8}, \frac{1}{4}\right)$

เนื่องจากวงรีผ่านจุดยอดของพาราโบลานี้ และมีโฟกัสเป็นจุดปลายของเลตัสเรกตัม

ของพาราโบลานี้

นั่นคือ วงรีผ่านจุด $(-4, 0)$ และมีโฟกัสอยู่ที่ $\left(-\frac{31}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ และ $\left(-\frac{31}{8}, \frac{1}{4}\right)$

จะได้ว่า วงรีนี้มีแกนเอกอยู่ในแนวตั้ง ที่มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

และ $h=-\frac{31}{8}, k-c=-\frac{1}{4}, k+c=\frac{1}{4}$ นั่นคือ $k=0, c=\frac{1}{4}$

แทน h, k, x และ y ด้วย $-\frac{31}{8}, 0, -4$ และ 0 ตามลำดับ ใน $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

จะได้
$$\frac{\left((-4)-\left(-\frac{31}{8}\right)\right)^2}{b^2}+\frac{(0-0)^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{\left((-4)+\frac{31}{8}\right)^2}{b^2} = 1$$
$$b^2 = \left((-4)+\frac{31}{8}\right)^2$$
$$b^2 = \frac{1}{64}$$

จาก $c^2=a^2-b^2$ จะได้ $a^2=c^2-b^2=\frac{1}{16}-\frac{1}{64}=\frac{3}{64}$

ดังนั้น สมการวงรีที่ผ่านจุดยอดของพาราโบลานี้ และมีโฟกัสเป็นจุดปลายของ

เลตัสเรกตัมของพาราโบลานี้ คือ $64\left(x+\frac{31}{8}\right)^2+\frac{64y^2}{3}=1$

26. 1) จาก
$$x^2+y^2+2x-6y+9 = 0$$
จะได้
$$(x^2+2x)+(y^2-6y) = 0-9$$
$$(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9) = -9+1+9$$
$$(x+1)^2+(y-3)^2 = 1$$

เทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จะได้ $h=-1, k=3$ และ $r=1$

ดังนั้น สมการนี้มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 3)$ และรัศมียาว 1 หน่วย

2) จาก $2x^2+2y^2-2x+8y = \frac{1}{2}$

จะได้ $(x^2-x)+(y^2+4y) = \frac{1}{4}$

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+(y^2+4y+4) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+4$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2 = \frac{9}{2}$$

เทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จะได้ $h=\frac{1}{2}, k=-2$ และ $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น สมการนี้มีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

และรัศมียาว $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ หน่วย

3) จาก $x^2+y^2+72 = 12x$

จะได้ $(x^2-12x)+y^2 = -72$

$$(x^2-12x+36)+y^2 = -72+36$$

$$(x-6)^2+y^2 = -36$$

จะเห็นว่า สมการนี้เป็นสมการที่ไม่มีคำตอบ เนื่องจากผลบวกของกำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ เป็นจำนวนจริงลบไม่ได้

ดังนั้น สมการนี้ไม่มีกราฟในระนาบจำนวนจริง

4) จาก $x^2+y^2-6x-10y+34 = 0$

จะได้ $(x^2-6x)+(y^2-10y) = 0-34$

$$\left(x^2-6x+9\right)+\left(y^2-10y+25\right) = -34+9+25$$

$$(x-3)^2+(y-5)^2 = 0$$

เนื่องจาก $(x-3)^2 \geq 0$ และ $(y-5)^2 \geq 0$

จะได้ $(x-3)^2=0$ และ $(y-5)^2=0$ นั่นคือ $x=3$ และ $y=5$

ดังนั้น สมการนี้มีกราฟเป็นจุดหนึ่งจุด

27. 1) จาก $-3x^2+y+2 = 0$

จะได้ $3x^2 = y+2$

$$x^2 = \frac{1}{3}(y+2)$$

ดังนั้น สมการนี้มีกราฟเป็นพาราโบลา

2) จาก $2x^2-4y^2+4x-16y+1 = 0$

จะได้ $\left(2x^2+4x\right)+\left(-4y^2-16y\right) = 0-1$

$$2\left(x^2+2x+1\right)-4\left(y^2+4y+4\right) = -1+2-16$$

$$2(x+1)^2-4(y+2)^2 = -15$$

$$\frac{4(y+2)^2}{15}-\frac{2(x+1)^2}{15} = 1$$

ดังนั้น สมการนี้มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา

3) จาก $2x^2-3y^2 = 0$

จะได้ $3y^2 = 2x^2$

$$y^2 = \frac{2}{3}x^2$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x$$

ดังนั้น สมการนี้มีกราฟเป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

4) จาก $3x^2+2y^2+4y = 0$

จะได้ $3x^2+2\left(y^2+2y\right) = 0$

$$3x^2+2\left(y^2+2y+1\right) = 2$$

$$3x^2+2\left(y+1\right)^2 = 2$$

$$\frac{3x^2}{2}+\left(y+1\right)^2 = 1$$

ดังนั้น สมการนี้มีกราฟเป็นวงรี

5) จาก $x^2+5x+y^2-4y+3 = 0$

จะได้ $\left(x^2+5x\right)+\left(y^2-4y\right) = 0-3$

$$\left(x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)+\left(y^2-4y+4\right) = -3+\left(\frac{5}{2}\right)^2+4$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-2\right)^2 = \frac{29}{4}$$

ดังนั้น สมการนี้มีกราฟเป็นวงกลม

6) จาก $9x^2+8y^2-15x+8y = -27$

จะได้ $9\left(x^2-\frac{15}{9}x\right)+8\left(y^2+y\right) = -27$

$$9\left(x^2-\frac{15}{9}x+\left(\frac{15}{18}\right)^2\right)+8\left(y^2+y+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = -27+9\left(\frac{15}{18}\right)^2+8\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

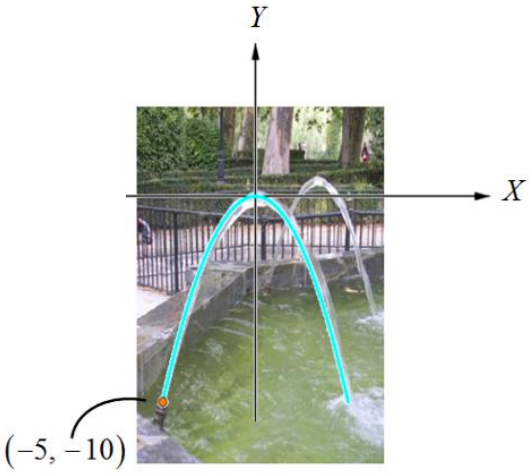
$$9\left(x-\frac{15}{18}\right)^2+8\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{75}{4}$$

จะเห็นว่าสมการนี้เป็นสมการที่ไม่มีคำตอบ เนื่องจากผลบวกของกำลังสองของจำนวนจริงใด ๆ เป็นจำนวนจริงลบไม่ได้

ดังนั้น สมการนี้ไม่มีกราฟในระนาบจำนวนจริง

28. ขอบของแสงไฟที่ฉายบนพื้นถนนมีลักษณะเป็นไฮเพอร์โบลา

29. จากเส้นทางของน้ำพุ ทำให้เกิดพาราโบลาดังรูป



จะเห็นว่า พาราโบลานี้มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

ที่มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$

และผ่านจุด $(-5, -10)$

แทน h, k, x และ y ด้วย $0, 0, -5$ และ -10 ตามลำดับ ใน $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

จะได้

$$\begin{aligned}(-5-0)^2 &= 4p(-10-0)\\ 25 &= -40p\\ p &= -\frac{5}{8}\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการแสดงเส้นทางของน้ำพุ คือ $x^2 = -\frac{5}{2}y$

30. เนื่องจาก เส้นทางของยานอวกาศเป็นเส้นโค้งพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

นั่นคือ มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

เนื่องจาก โฟกัสของพาราโบลาอยู่ที่ $(0, 0)$ ระยะห่างระหว่างโฟกัสกับจุดยอดของ

พาราโบลา คือ $6,400 + 150 = 6,550$ กิโลเมตร และเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

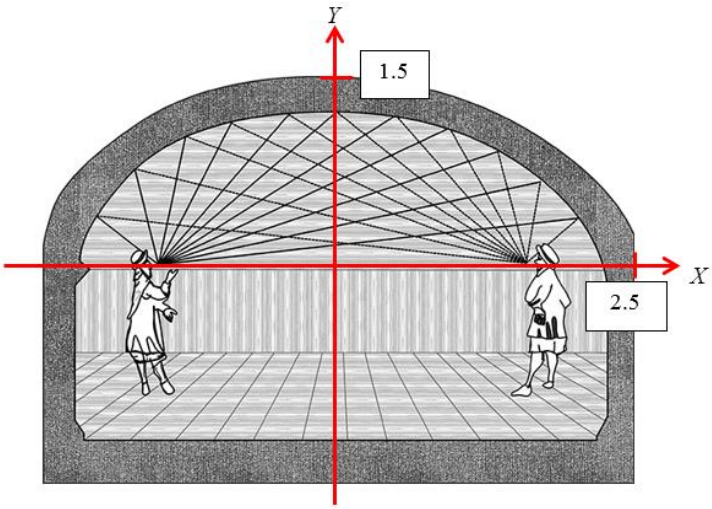
จะได้ $h = 0, k + p = 0$ และ $p = -6550$ นั่นคือ $k = 6550$

และเนื่องจาก ยานอวกาศจะหลุดออกจากแรงโน้มถ่วงของโลก เมื่อมีความเร็วที่เหมาะสม ณ ตำแหน่งขั้วโลกเหนือ

ดังนั้น สมการเส้นทางของยานอวกาศ คือ $x^2 = -26200(y - 6550)$ เมื่อ $x \geq 0$

30. เนื่องจากเส้นทางของยานอวกาศเป็นเส้นโค้งพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

31. จากรูป



หน้าตัดห้องเสียงกระซิบเป็นรูปวงรี ที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ และมี $h = 0\ k = 0, a = 2.5, b = 1.5$

ดังนั้น สมการจำลองรูปร่างของห้องเสียงกระซิบ คือ $\frac{x^2}{2.5^2} + \frac{y^2}{1.5^2} = 1$

2) จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 2.5^2 - 1.5^2 = 6.25 - 2.25 = 4$ นั่นคือ $c = 2$

จะได้ โฟกัสของห้องเสียงกระซิบอยู่ที่ $(-2, 0)$ และ $(2, 0)$

ดังนั้น โฟกัสทั้งสองอยู่ห่างกัน 4 เมตร

32. เนื่องจากวงโคจรของยานอวกาศเป็นส่วนโค้งไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด จุดยอดอยู่ที่ $(0, 5)$ และเข้าใกล้เส้น $y = \frac{5}{2}x$ มากขึ้นเรื่อย ๆ

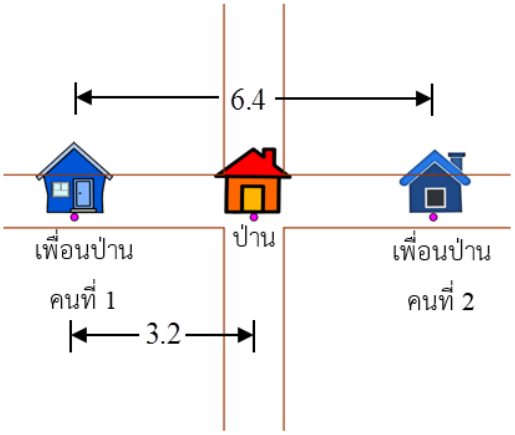
จะได้ว่า สมการของวงโคจรของยานอวกาศที่เป็นส่วนโค้งไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

ซึ่งมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

จะได้ $h = 0,\ k = 0,\ k + a = 5,\ \frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ นั่นคือ $a = 5$ และ $b = 2$

ดังนั้น สมการวงโคจรของยานอวกาศ คือ $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$

33. จากโจทย์ สามารถอธิบายตำแหน่งของหม้อแปลงไฟฟ้าที่ระเบิดได้ด้วยสมการไฮเพอร์โบลา ดังแสดงในรูปต่อไปนี้



พิจารณากรณีที่บ้านของเพื่อนทั้งสองของป่านคือโฟกัสของไฮเพอร์โบลา

เนื่องจากบ้านของเพื่อนทั้งสองของป่านอยู่ห่างกัน 6.4 กิโลเมตร

จะได้ $2c = 6.4$ นั่นคือ $c = 3.2$

เนื่องจาก เพื่อนของป่านที่มีบ้านอยู่ทางทิศตะวันออกได้ยินเสียงหม้อแปลงระเบิดก่อนเพื่อนของป่านที่มีบ้านอยู่ทางทิศตะวันตก เป็นระยะเวลา $8 - 6 = 2$ วินาที

และเสียงมีความเร็วประมาณ 0.35 กิโลเมตรต่อวินาที

และจาก $v = \frac{s}{t}$

จะได้ $0.35 = \frac{s}{2}$

$s = 0.7$

แสดงว่าผลต่างของระยะทางจากหม้อแปลงไฟฟ้าที่ระเบิดไปยังบ้านของเพื่อนทั้งสองของป่านเป็น 0.7 กิโลเมตร

นั่นคือ $2a = 0.7$

$a = 0.35$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $b^2 = c^2 - a^2 = 3.2^2 - 0.35^2 = 10.24 - 0.1225 = 10.1175$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลาที่ระบุตำแหน่งที่เป็นไปได้ของหม้อแปลงไฟฟ้าที่ระเบิด คือ

$$\frac{x^2}{0.1225} - \frac{y^2}{10.1175} = 1$$

พิจารณากรณีที่บ้านของป่านและบ้านของเพื่อนของป่านที่อยู่ทางทิศตะวันออกคือโฟกัสของไฮเพอร์โบลา

เนื่องจากบ้านของป่านอยู่ที่ $(0, 0)$ และบ้านของเพื่อนของป่านที่อยู่ทางทิศตะวันออกอยู่ที่ $(3.2, 0)$ ซึ่งจุดทั้งสองคือโฟกัสของไฮเพอร์โบลา จะได้ $2c = 3.2$ นั่นคือ $c = 1.6$

และไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{3.2-0}{2}, \frac{0-0}{2}\right)$ หรือ $(1.6, 0)$

เนื่องจากป่านได้ยินเสียงหม้อแปลงระเบิดก่อนเพื่อนของป่านที่มีบ้านอยู่ทางทิศตะวันออก เป็นระยะเวลา 6 วินาที และเสียงมีความเร็วประมาณ 0.35 กิโลเมตรต่อวินาที

และจาก $v = \frac{s}{t}$

จะได้ $0.35 = \frac{s}{6}$

$$s = 2.1$$

แสดงว่าผลต่างของระยะทางจากหม้อแปลงไฟฟ้าที่ระเบิดไปยังบ้านของป่านและบ้านของเพื่อนของป่านที่อยู่ทางทิศตะวันออก เป็น 2.1 กิโลเมตร

นั่นคือ $$2a = 2.1$$

$$a = 1.05$$

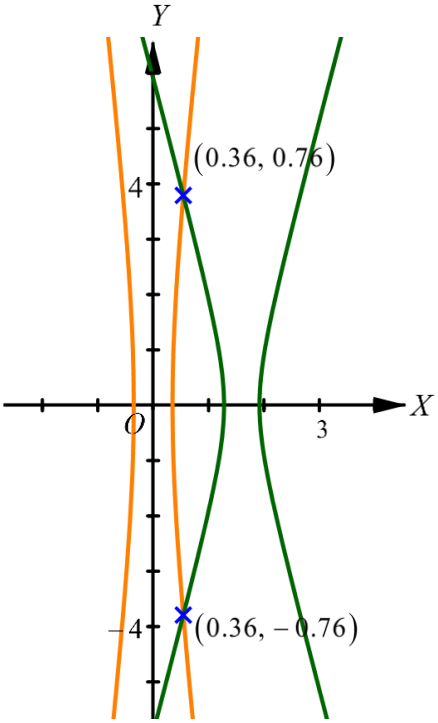
จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $b^2 = c^2 - a^2 = 1.6^2 - 1.05^2 = 2.56 - 1.1025 = 1.4575$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลาที่จะระบุตำแหน่งที่เป็นไปได้ของหม้อแปลงไฟฟ้าที่ระเบิด คือ

$$\frac{(x-1.6)^2}{1.1025} - \frac{y^2}{1.4575} = 1$$

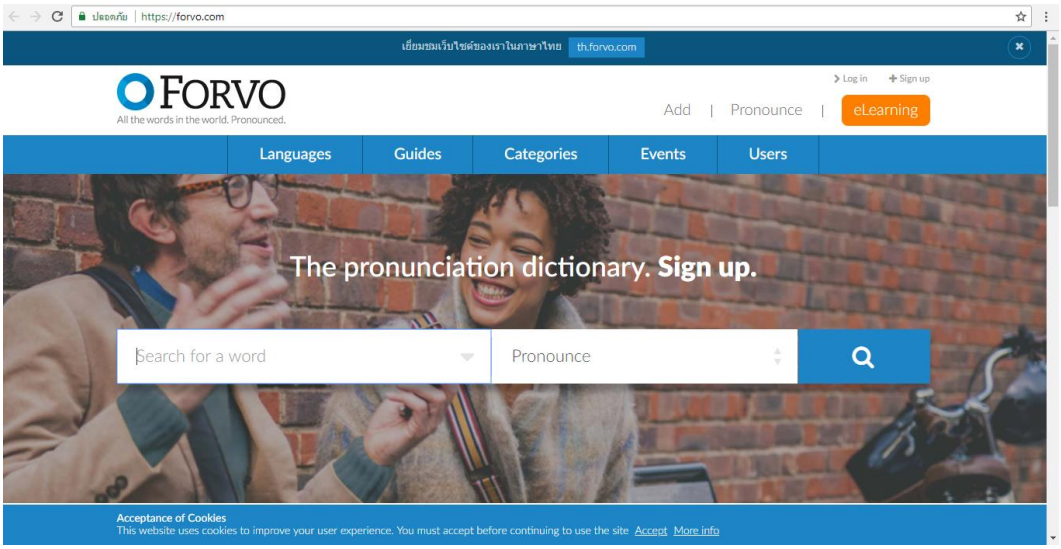
ตำแหน่งของหม้อแปลงที่ระเบิดที่เป็นไปได้ หาได้จากจุดตัดของสมการ

$\frac{x^2}{0.1225} - \frac{y^2}{10.1175} = 1$ และ $\frac{(x-1.6)^2}{1.1025} - \frac{y^2}{1.4575} = 1$ ซึ่งมีพิกัดเป็น $(0.36, -0.76)$ และ $(0.36, 0.76)$


Y
X
O
3
4
−4
(0.36, 0.76)
(0.36, −0.76)

แหล่งเรียนรู้เพิ่มเติม

forvo.com เป็นเว็บไซต์ที่รวบรวมการออกเสียงคำในภาษาต่าง ๆ ก่อตั้งขึ้นเมื่อ ค.ศ. 2008 โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อพัฒนาการสื่อสารทางการพูด ผ่านการแลกเปลี่ยนการออกเสียงคำในภาษาต่าง ๆ ทั้งจากบุคคลที่เป็นเจ้าของภาษาและบุคคลที่ไม่ใช่เจ้าของภาษา forvo.com ได้รับคัดเลือกจากนิตยสาร Times ให้เป็น 50 เว็บไซต์ที่ดีที่สุดใน ค.ศ. 2013 (50 best websites of 2013) ปัจจุบันเว็บไซต์นี้เป็นฐานข้อมูลที่รวบรวมการออกเสียงที่ใหญ่ที่สุด มีคลิปเสียงที่แสดงการออกเสียงคำศัพท์ประมาณสี่ล้านคำในภาษาต่าง ๆ มากกว่า 330 ภาษา



ครูอาจใช้เว็บไซต์ forvo.com เพื่อศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการออกเสียงคำศัพท์คณิตศาสตร์หรือชื่อนักคณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษหรือภาษาอื่น ๆ ที่ปรากฏในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ได้ เช่น quotient และ nappe ซึ่งเป็นคำศัพท์คณิตศาสตร์ในภาษาอังกฤษ หรือ Font-Romeu-Odeillo-Via ซึ่งเป็นชื่อเมืองในประเทศฝรั่งเศส

บรรณานุกรม

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2552). *คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2553). *คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2552). *คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เรขาคณิตวิเคราะห์.* กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2552). *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

คณะผู้จัดทำ

คณะที่ปรึกษา

ดร.พรพรรณ ไวทยางกูร	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สัญญา มิตรเอม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุพัตรา ผาติวิสันติ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะผู้จัดทำคู่มือครู

นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวอัมริสา จันทนะศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายพัฒนชัย รวิวรรณ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวภิญญดา กลับแก้ว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุธารส นิลรอด	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายภควุฒิ จิรดิลก	นักวิชาการอิสระ
นายวิจิต ยังจิตร	นักวิชาการอิสระ
นายอัฐวิช นริศยาพร	นักวิชาการอิสระ

คณะผู้พิจารณาคู่มือครู

นายประสาท สอ้านวงศ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฎ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสุเทพ กิตติพิทักษ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

นางสาวอัมริสา จันทนะศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายทศธรรม เมขลา	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายพัฒนชัย รวิวรรณ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวภิญญดา กลับแก้ว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุธารส นิลรอด	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ผศ. ดร.บุญรอด ยุทธานันท์	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่
ดร.ต้องตา สมใจเพ็ง	มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
นายสมภพ ศริสิทธิไพบูลย์	มหาวิทยาลัยราชภัฏกาญจนบุรี

คณะบรรณาธิการ

รศ.ดร.สิริพร ทิพย์คง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะทำงานฝ่ายเสริมวิชาการ

นางสาวขวัญใจ ภาสพันธุ์	โรงเรียนราชวินิตบางเขน
ดร.เชิดศักดิ์ ภักดีวิโรจน์	โรงเรียน ภ.ป.ร. ราชวิทยาลัย ในพระบรมราชูปถัมภ์
นายณรงค์ฤทธิ์ ฉายา	โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ศูนย์วิจัยและพัฒนาการศึกษา
นายถนอมเกียรติ งานสกุล	โรงเรียนสตรีภูเก็ต
นางสาวปรารถนา วิริยธรรมเจริญ	โรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย
นายวิฑิตพงค์ พะวงษา	โรงเรียนสภาราชินี
นางสาวศราญลักษณ์ บุตรรัตน์	โรงเรียนบางละมุง
นายศรัณย์ แสงนิลาวิวัฒน์	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย เพชรบุรี
ว่าที่ร้อยตรีสามารถ วนาธรัตน์	โรงเรียนเฉลิมขวัญสตรี
นางสุธิดา นานช้า	โรงเรียนย่านตาขาวรัฐชนูปถัมภ์
นายสุรชัย บุญเรือง	โรงเรียนเบ็ญจะมะมหาราช

นางศรีสกุล สุขสว่าง	ข้าราชการบำนาญ
นางศุภรา ทวรรณกุล	ข้าราชการบำนาญ
นายสุกิจ สมงาม	ข้าราชการบำนาญ
นางสุปราณี พ่วงพี	ข้าราชการบำนาญ
นายชัยรัตน์ สุนทรประพี	นักวิชาการอิสระ
นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ