



คู่มือครูรายวิชาพื้นฐาน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่

๓

# คณิตศาสตร์

## เล่ม ๒

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑





คู่มือครู

# รายวิชาพื้นฐาน

## คณิตศาสตร์

ชั้น

## มัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี



# คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีพันธกิจในการศึกษาค้นคว้า วิจัยและพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ วิธีสอนและการประเมินผลการจัดการเรียนรู้ รวมทั้งจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกทักษะ กิจกรรม และสื่อการเรียนรู้เพื่อใช้ประกอบการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐานด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี

คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒ นี้ จัดทำขึ้นตามพันธกิจและพัฒนาให้สอดคล้องกับ ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลาง การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมุ่งหวังให้ผู้สอนนำไปใช้ประกอบการจัดการเรียนรู้ควบคู่กับการใช้หนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒ เพื่อให้ผู้เรียนสามารถคิด วิเคราะห์และแก้ปัญหาอย่างเป็นคณิตศาสตร์ เกิดทักษะที่จำเป็นสำหรับการดำรงชีวิตในศตวรรษที่ ๒๑ และประยุกต์ใช้ความรู้และทักษะต่าง ๆ เพื่อพัฒนาคุณภาพชีวิตของตนเอง

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพ และมาตรฐานการศึกษา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ บุคลากรทางการศึกษาและหน่วยงานต่าง ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้



(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจนนท์)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

# คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบ และถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ จึงได้จัดทำคู่มือครูสำหรับผู้สอน ใช้ประกอบกับหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒ ในการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน เพื่อให้ผู้เรียนบรรลุมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร

คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๓ เล่ม ๒ นี้ ประกอบด้วยคำแนะนำการใช้คู่มือครู กำหนดเวลาสอนโดยประมาณในแต่ละบท ในทุก ๆ บทจะกล่าวถึงสาระ มาตรฐานการเรียนรู้ และตัวชี้วัดที่เกี่ยวข้อง จุดประสงค์ของบทเรียน การวิเคราะห์ความเชื่อมโยงระหว่างตัวชี้วัดกับจุดประสงค์ของบทเรียน ความคิดรวบยอดของบทเรียน ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ความเชื่อมโยงของความรู้ ลำดับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของบทเรียน กิจกรรมเสนอแนะ เฉลยชวนคิดและแบบฝึกหัดต่าง ๆ ตัวอย่างแบบทดสอบท้ายบท รวมทั้งความรู้เพิ่มเติมในบางเนื้อหาสำหรับผู้สอน ผู้สอนสามารถนำคู่มือครูเล่มนี้ไปใช้ประกอบการวางแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้บรรลุจุดประสงค์ที่ตั้งไว้ เลือกและประยุกต์ใช้กิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับผู้เรียน ชั้นเรียนและบริบทของโรงเรียนที่มีความแตกต่างกัน

ในการจัดทำคู่มือครูเล่มนี้ สสวท. ได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดีจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ รวมทั้ง ครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบัน และสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณมา ณ ที่นี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่า คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์แก่ผู้สอน และผู้ที่เกี่ยวข้องทุกฝ่าย ที่จะช่วยให้การจัดการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้คู่มือครูเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

## คำแนะนำการใช้คู่มือครู

คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 จัดทำขึ้นเพื่อเป็นคู่มือสำหรับการใช้หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียนให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด มุ่งส่งเสริมให้ผู้เรียนมีพัฒนาการด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และด้านคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยม ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดที่กำหนดไว้ในหลักสูตรอย่างครบถ้วน ครูจึงควรศึกษาคู่มือครูให้เข้าใจอย่างถ่องแท้ และทดลองปฏิบัติกิจกรรมเพื่อให้เกิดความพร้อมก่อนสอนจริง และเข้าใจลำดับการดำเนินกิจกรรมตามที่เสนอแนะไว้ ทั้งนี้ ครูอาจปรับเปลี่ยนกิจกรรมหรือวิธีการจัดการเรียนการสอนได้ตามความเหมาะสมโดยคำนึงถึงศักยภาพของนักเรียนเป็นสำคัญ

จำนวนชั่วโมงเรียนที่แนะนำให้ใช้ในการจัดการเรียนการสอนสำหรับหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ในแต่ละเล่ม คือ 60–100 ชั่วโมง/ภาคเรียน เพื่อเปิดโอกาสให้ครูสามารถปรับรายละเอียดของเนื้อหาและเวลาเรียนให้เหมาะสมกับทั้งศักยภาพของนักเรียนและบริบทของชั้นเรียน ทั้งนี้ ครูอาจใช้หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 เป็นสื่อประกอบการจัดการเรียนการสอนกับทั้งรายวิชาพื้นฐานและเพิ่มเติม โดยอาจจัดเนื้อหาบางส่วนของหนังสือเรียนที่มีขอบเขตของเนื้อหา และความซับซ้อนมากกว่าที่ตัวชี้วัดกำหนด ให้นักเรียนได้เรียนเป็นรายวิชาเพิ่มเติม

คู่มือครูเล่มนี้ประกอบด้วยหัวข้อต่อไปนี้

### 1 ขอบทเรียน

เป็นส่วนที่ประกอบด้วยขอบทเรียน พร้อมทั้งหัวข้อย่อยของบทเรียนและจำนวนชั่วโมงที่แนะนำให้ใช้ในการจัดการเรียนการสอนโดยประมาณ เพื่อให้ครูสามารถนำไปประกอบการวางแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้รายภาค และเพื่อให้เวลาเรียนสอดคล้องกับโครงสร้างเวลาเรียนของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 คู่มือครูนี้ จึงกำหนดจำนวนชั่วโมงเรียนที่แนะนำให้ใช้ในการจัดการเรียนการสอนของทุกหัวข้อไว้รวม 60 ชั่วโมง/ภาคเรียน

### 2 สาระและมาตรฐาน การเรียนรู้

เป็นสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ตามที่ปรากฏอยู่ในตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เพื่อให้ครูได้ตรวจสอบความสอดคล้องและครอบคลุมกับหลักสูตรสถานศึกษา

3

ตัวชี้วัด

เป็นตัวชี้วัดตามที่ปรากฏอยู่ในตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เพื่อให้ครูได้คำนึงถึงว่าจะต้องจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้นักเรียนได้เรียนรู้ตามตัวชี้วัด และวัดและประเมินผลตามตัวชี้วัด

4

จุดประสงค์  
ของบทเรียน

เป็นจุดประสงค์ตามที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ของแต่ละบทเรียน เพื่อให้ครูได้ตระหนักถึงความรู้ที่นักเรียนพึงมีหลังสิ้นสุดการเรียนการสอน รวมทั้งนำไปใช้ในการวัดและประเมินผลของครู

5

ความเชื่อมโยง  
ระหว่างตัวชี้วัดกับ  
จุดประสงค์ของบทเรียน

เป็นการอธิบายหรือขยายความตัวชี้วัด โดยเชื่อมโยงกับจุดประสงค์ของบทเรียน เพื่อให้ครูได้เห็นว่าการจัดการเรียนรู้ตามแต่ละจุดประสงค์จะทำให้นักเรียนบรรลุการเรียนรู้ตามตัวชี้วัดอย่างไร

6

ความคิดรวบยอด  
ของบทเรียน

เป็นความคิดรวบยอดของบทเรียนโดยภาพรวม เพื่อให้ครูได้ทราบเกี่ยวกับความรู้ที่เป็นแนวคิดหลักของเนื้อหาที่นักเรียนจำเป็นต้องรู้หลังจากเรียนจบบทเรียนนั้น ๆ

7

ทักษะและ  
กระบวนการทาง  
คณิตศาสตร์

เป็นทักษะและกระบวนการที่นักเรียนควรจะได้รับจากการเรียนในแต่ละหัวข้อเป็นอย่างน้อย โดยรายละเอียดในการจัดการเรียนการสอนที่ช่วยส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จะแทรกอยู่ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ทั้งนี้ การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนจะเกิดขึ้นได้มากหรือน้อยนั้น ขึ้นอยู่กับกระบวนการจัดการเรียนการสอนของครูเป็นสำคัญ



## 8

### ความเชื่อมโยง ของความรู้

เป็นส่วนที่ต้องการสะท้อนให้ครูเห็นภาพความต่อเนื่องและเชื่อมโยงของความรู้ทั้งสามลักษณะ ได้แก่

- 1) **ความรู้พื้นฐาน** เป็นหัวข้อความรู้ที่นักเรียนจะต้องมีก่อนการเรียนรู้ในแต่ละบท ซึ่งครูอาจเริ่มต้นจากการใช้แบบทดสอบก่อนเรียนออนไลน์ เพื่อตรวจสอบและประเมินความรู้เดิมของผู้เรียน แล้วทบทวนหรือจัดกิจกรรมให้กับนักเรียนในกรณีที่นักเรียนขาดความรู้ในส่วนนี้ ทั้งนี้เพื่อกระตุ้นให้เกิดความเชื่อมโยงของประสบการณ์เดิมจนเกิดเป็นองค์ความรู้ที่เป็นพื้นฐาน เพื่อพัฒนาเป็นความรู้ที่สำคัญในบทเรียนต่อไป
- 2) **ความรู้ในบทเรียน** เป็นความคิดรวบยอดต่าง ๆ ของบทเรียนในภาพรวม เพื่อให้ครูได้ทราบเกี่ยวกับความรู้ที่เป็นแนวคิดหลักของเนื้อหาที่นักเรียนจำเป็นต้องรู้หลังจากเรียนจบบทเรียนนั้น ๆ
- 3) **ความรู้ในอนาคต** เป็นหัวข้อความรู้ที่นักเรียนจะได้ศึกษาต่อไปในอนาคต ซึ่งชี้แนะให้ครูได้เห็นว่าความรู้ที่เกิดขึ้นจากแต่ละบทเรียนนั้นมีความสำคัญสำหรับการพัฒนาความรู้ในหัวข้ออื่นใดบ้าง ในระดับชั้นเดียวกันหรือระดับชั้นที่สูงขึ้น

## 9

### ลำดับการจัด กิจกรรมการเรียนรู้ ของบทเรียน

เป็นลำดับของแนวทางการจัดกิจกรรมที่ควรเกิดขึ้นในแต่ละบทเรียน ทั้งนี้ลำดับของแนวทางการจัดกิจกรรมจะสอดคล้องกับลำดับของหัวข้อและกิจกรรมต่าง ๆ ที่ปรากฏในหนังสือเรียน

## 10

### ข้อเสนอแนะ ในการจัดกิจกรรม การเรียนรู้

เป็นหัวข้อภายใต้หัวข้อย่อยของบทเรียนประกอบด้วยหัวข้อ ดังนี้

- 1) **ชื่อหัวข้อย่อย** เป็นหัวข้อย่อยพร้อมทั้งจำนวนชั่วโมงที่แนะนำให้ใช้ในการกิจกรรมการเรียนรู้โดยประมาณ เพื่อให้ครูสามารถนำไปประกอบการวางแผนการจัดการเรียนการสอนรายคาบ ทั้งนี้ ครูอาจยืดหยุ่นได้ตามที่เห็นสมควร
- 2) **จุดประสงค์** เป็นจุดประสงค์รายหัวข้อย่อยของบทเรียน โดยระบุไว้เพื่อให้ครูคำนึงถึงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ให้นักเรียนได้มีความรู้และความสามารถตรงตามจุดประสงค์ที่วางไว้ จุดประสงค์ในส่วนนี้เป็นจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมที่สามารถสะท้อนกลับไปยังจุดประสงค์ของบทเรียนและตัวชี้วัด ทั้งนี้ ครูอาจปรับเปลี่ยนจุดประสงค์นี้ได้ตามที่เห็นสมควร แต่จะต้องเป็นจุดประสงค์ที่สะท้อนความสามารถของนักเรียนว่าผ่านจุดประสงค์ของบทเรียนและตัวชี้วัดได้

นอกจากนี้ ครูควรประเมินผลให้ตรงตามจุดประสงค์โดยใช้วิธีการที่หลากหลาย เช่น การตอบคำถามในชั้นเรียน การทำแบบฝึกหัด การทำใบกิจกรรม ชิ้นงาน หรือการทดสอบย่อย โดยถ้าจุดประสงค์ใดที่ครูเห็นว่านักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่ผ่าน ในช่วงต่อไปครูควรนำบทเรียนนั้นมาสอนซ่อมเสริมใหม่

- 3) **ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน** เป็นตัวอย่างเนื้อหาที่นักเรียนมักเข้าใจคลาดเคลื่อน หรือเข้าใจผิด เพื่อให้ครูได้ทราบและป้องกันไม่ให้นักเรียนเกิดความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน
- 4) **สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้** เป็นสื่อที่แนะนำให้ครูใช้สำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อให้ครูได้จัดเตรียมสื่อหรืออุปกรณ์ต่าง ๆ ล่วงหน้า ทั้งนี้ สื่อดังกล่าว เป็นสื่อที่แนะนำให้ใช้ตามข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
- 5) **ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้** เป็นจุดเน้นหรือแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่สำคัญอย่างเป็นลำดับขั้นตอนในแต่ละหัวข้อย่อย ซึ่งครูควรศึกษาและทำความเข้าใจควบคู่ไปกับหนังสือเรียน เพื่อจะได้เตรียมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับจุดประสงค์และเหมาะสมกับศักยภาพของนักเรียน
- 6) **กิจกรรม** เป็นกิจกรรมที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 โดยขยายขั้นตอนการทำกิจกรรมที่อยู่ในหนังสือเรียน รวมทั้งมีตัวอย่างหรือใบกิจกรรม เพื่อให้ครูสามารถนำไปใช้ประกอบการจัดกิจกรรมในชั้นเรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ
- 7) **กิจกรรมเสนอแนะ** เป็นกิจกรรมที่แนะนำให้ครูนำไปใช้กับนักเรียนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งมีอยู่หลายลักษณะ ทั้งกิจกรรมเพื่อนำเข้าสู่เนื้อหา กิจกรรมเสริมเนื้อหาในบทเรียน เพื่อให้เข้าใจเนื้อหาในบทเรียนนั้น ๆ ได้มากขึ้น โดยแต่ละกิจกรรมจะสอดแทรกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้นักเรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการอย่างต่อเนื่อง ทั้งนี้ ครูอาจพิจารณาปรับเปลี่ยนการจัดกิจกรรมให้เหมาะสมกับเวลาและศักยภาพของนักเรียน
- 8) **เฉลยชวนคิด** เป็นการอธิบายแนวคิดและคำตอบของกรอบชวนคิดที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 เพื่อให้ครูใช้เป็นแนวทางในการอภิปรายร่วมกันกับนักเรียนถึงแนวคิดในการแก้ปัญหา นั้น ๆ
- 9) **เฉลยมุมเทคโนโลยี** เป็นการอธิบายแนวคิดและคำตอบของกรอบมุมเทคโนโลยีที่ปรากฏอยู่ในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 เพื่อให้ครูใช้เป็นแนวทางในการอภิปรายร่วมกันกับนักเรียนถึงแนวคิดในการแก้ปัญหา นั้น ๆ

- 10) **เฉลยแบบฝึกหัด** เป็นคำตอบของแบบฝึกหัดในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 เพื่อให้ครูได้ใช้เป็นแนวทางในการตรวจแบบฝึกหัดของนักเรียน ซึ่งในบางข้อจะมีแนวคิดไว้เพื่อเป็นแนวทางหนึ่งในการหาคำตอบ และในบางข้ออาจมีหลายคำตอบ แต่ให้ไว้เพียงตัวอย่างคำตอบที่ถูกต้องและเป็นไปได้ ทั้งนี้ เพราะแบบฝึกหัดดังกล่าว ได้สอดแทรกปัญหาที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดอย่างหลากหลาย และฝึกการให้เหตุผล ซึ่งคำอธิบายของนักเรียนอาจแตกต่างจากที่เฉลยไว้ ดังนั้น ในการตรวจแบบฝึกหัดครูควรพิจารณาอย่างรอบคอบ และยอมรับคำตอบที่เห็นว่ามีความถูกต้องและเป็นไปได้ที่แตกต่างไปจากที่เฉลยไว้

สำหรับแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน ครูควรเลือกให้นักเรียนได้ฝึกฝนตามความรู้ความสามารถ ซึ่งในหลายแบบฝึกหัด ครูอาจใช้เพื่อการตรวจสอบความเข้าใจในชั้นเรียน โดยอาจใช้การถาม-ตอบร่วมกันในชั้นเรียน สำหรับแบบฝึกหัดที่เป็นข้อท้าทายนั้น จะมีความยากและซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งนักเรียนทั่วไปอาจยังไม่สามารถทำได้ ดังนั้น ครูควรพิจารณาความเหมาะสมของการใช้งานกับระดับความรู้ความสามารถของนักเรียนในชั้นเรียน และไม่ควรรนำแบบฝึกหัดที่มีความยากในระดับนี้ไปสร้างแบบทดสอบเพื่อวัดและประเมินผลกับนักเรียนโดยทั่วไป

11

เฉลยกิจกรรม  
ท้ายบท

เป็นคำตอบ หรือแนวคิดในการทำกิจกรรมท้ายบท เพื่อเป็นแนวทางให้ครูใช้อธิบายร่วมกับนักเรียน และโดยบางกิจกรรมที่มีลักษณะเป็นปัญหาปลายเปิดจะมีตัวอย่างแนวคิดหรือคำตอบที่ถูกต้อง และเป็นไปได้ให้ไว้

12

เฉลยแบบฝึกหัด  
ท้ายบท

เป็นคำตอบของแบบฝึกหัดท้ายบทในหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 เพื่อให้ครูได้ใช้เป็นแนวทางในการตรวจแบบฝึกหัดของนักเรียน ซึ่งมีแนวคิดเช่นเดียวกับใน ส่วนของเฉลยแบบฝึกหัดที่อยู่ในแต่ละหัวข้อย่อย

สำหรับแบบฝึกหัดท้ายบทในหนังสือเรียนนี้ มีไว้เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกทำโจทย์แบบบูรณาการความรู้ โดยไม่จำแนกความรู้ที่ใช้ในการแก้ปัญหาตามหัวข้อย่อย ซึ่งครูควรเลือกให้นักเรียนได้ฝึกฝนตามระดับความรู้ความสามารถ

## 13

### ตัวอย่าง แบบทดสอบท้ายบท

เป็นตัวอย่างของแบบทดสอบประจำบทที่เน้นการประยุกต์ใช้ความรู้ที่เรียนมาทั้งบท และให้เห็นรูปแบบของแบบทดสอบที่มีความหลากหลาย รวมทั้งมีตัวอย่างเกณฑ์การให้คะแนนที่ครูสามารถนำไปปรับใช้ให้เข้ากับบริบทของชั้นเรียน อย่างไรก็ตามครูสามารถใช้ตัวอย่างแบบทดสอบท้ายบทเป็นแนวทางในการสร้างแบบทดสอบสำหรับวัดและประเมินผลนักเรียนในแต่ละบทเรียน ซึ่งตัวอย่างแบบทดสอบท้ายบทนี้ จะครอบคลุมและสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียนและตัวชี้วัดของหลักสูตร ทั้งนี้ ความซับซ้อนของแบบทดสอบที่จะใช้ควรเหมาะสมกับศักยภาพของนักเรียน

## 14

### กิจกรรมคณิตศาสตร์ เชิงสะสม

เป็นกิจกรรมที่เน้นการประยุกต์ใช้ความรู้คณิตศาสตร์ บูรณาการเข้ากับความรู้ในศาสตร์อื่น ๆ เพื่อแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้ภายใต้เงื่อนไขและข้อจำกัดต่าง ๆ โดยในการแก้ปัญหานั้นจะต้องอาศัยกระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม (Engineering Design Process) เป็นเครื่องมือ

## 15

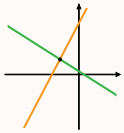
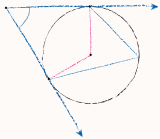
### ความรู้เพิ่มเติม สำหรับครู

เป็นความรู้ที่ครูควรทราบเพิ่มเติมไปจากบทเรียน เช่น ตัวอย่างการใช้เทคโนโลยีเป็นเครื่องมือในการจัดการเรียนรู้เรื่องหนึ่ง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับบทเรียน

## กำหนดเวลาสอน

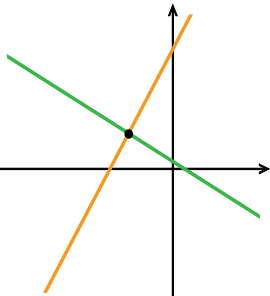
เนื่องจากสถานศึกษาสามารถปรับเปลี่ยนจำนวนชั่วโมงเรียนของรายวิชาพื้นฐานได้เอง ดังนั้น สถานศึกษาแต่ละแห่งอาจกำหนดจำนวนชั่วโมงเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ไม่เท่ากัน สำหรับหนังสือชุดนี้ จะแนะนำจำนวนชั่วโมงเรียนที่อิงตามโครงสร้างหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 คือ 60 ชั่วโมง/ภาคเรียน เป็นหลัก ทั้งนี้ สถานศึกษาสามารถปรับจำนวนชั่วโมงนี้ ให้สอดคล้องกับบริบทของตนเองได้ตามความเหมาะสม

| หน่วยการเรียนรู้           | จำนวนชั่วโมงที่แนะนำ |
|----------------------------|----------------------|
| ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร | 12                   |
| วงกลม                      | 15                   |
| พีระมิด กรวย และทรงกลม     | 15                   |
| ความน่าจะเป็น              | 8                    |
| อัตราส่วนตรีโกณมิติ        | 10                   |

| สารบัญ                                                                                                                   | บทที่ 1-3                                                                                                                                                                             |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| บทที่                                                                                                                    | เนื้อหา                                                                                                                                                                               | หน้า |
| 1                                                                                                                        | บทที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 13<br>1.1 แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 17<br>1.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 32<br>1.3 การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 44 |      |
|  <p>ระบบสมการเชิงเส้น<br/>สองตัวแปร</p> |                                                                                                                                                                                       |      |
| 2                                                                                                                        | บทที่ 2 วงกลม 89<br>2.1 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม 93<br>2.2 คอร์ดของวงกลม 112<br>2.3 เส้นสัมผัสวงกลม 126                                                             |      |
|  <p>วงกลม</p>                         |                                                                                                                                                                                       |      |
| 3                                                                                                                        | บทที่ 3 พีระมิด กรวย และทรงกลม 175<br>3.1 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด 179<br>3.2 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของกรวย 198<br>3.3 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม 212                          |      |
|  <p>พีระมิด กรวย และทรงกลม</p>        |                                                                                                                                                                                       |      |



| สารบัญ                                                                                                                                   | บทที่ 4-5                                      |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|------|
| บทที่                                                                                                                                    | เนื้อหา                                        | หน้า |
| <div>4</div> <div>  <p>ความน่าจะเป็น</p> </div>         | บทที่ 4 ความน่าจะเป็น                          | 267  |
|                                                                                                                                          | 4.1 โอกาสของเหตุการณ์                          | 271  |
|                                                                                                                                          | 4.2 ความน่าจะเป็น                              | 275  |
|                                                                                                                                          |                                                |      |
| <div>5</div> <div>  <p>อัตราส่วนตรีโกณมิติ</p> </div> | บทที่ 5 อัตราส่วนตรีโกณมิติ                    | 305  |
|                                                                                                                                          | 5.1 ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ             | 309  |
|                                                                                                                                          | 5.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม              | 317  |
|                                                                                                                                          | 5.3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา | 338  |
| กิจกรรมคณิตศาสตร์เชิงสะสม                                                                                                                |                                                | 372  |
| ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู                                                                                                                |                                                | 374  |
| บรรณานุกรม                                                                                                                               |                                                | 380  |
| คณะผู้จัดทำ                                                                                                                              |                                                | 381  |

| บทที่                                                                             | 1   | ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|--------------------------------------------------------------------------|
|  |     | <p>ในบทระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้ ประกอบด้วยหัวข้อย่อยดังต่อไปนี้</p> |
|                                                                                   | 1.1 | แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 ชั่วโมง                                |
|                                                                                   | 1.2 | การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 5 ชั่วโมง                               |
|                                                                                   | 1.3 | การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 5 ชั่วโมง               |



### สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้นิพจน์ สมการ และอสมการ อธิบายความสัมพันธ์หรือช่วยแก้ปัญหาที่กำหนดให้



### ตัวชี้วัด

ประยุกต์ใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์



### จุดประสงค์ของบทเรียน

นักเรียนสามารถ

1. ใช้กราฟเพื่อวิเคราะห์เกี่ยวกับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
2. แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
3. นำความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการแก้ปัญหา



### ความเชื่อมโยงระหว่างตัวชี้วัดกับจุดประสงค์ของบทเรียน

เนื่องจากตัวชี้วัดนี้ กล่าวถึงการประยุกต์ใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนั้น เพื่อให้การเรียนรู้ของนักเรียนในเรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรสอดคล้องกับตัวชี้วัด ครูควรจัดประสบการณ์ให้นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการแก้ปัญหาซึ่งสะท้อนได้จากการที่นักเรียนสามารถ

- ✦ รู้จักและเข้าใจเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยสามารถอธิบายลักษณะของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ลักษณะของคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจากการสังเกตกราฟ รวมทั้งใช้กราฟในการวิเคราะห์คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

- ✧ แก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน
- ✧ สร้างระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรแทนสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหา และหาคำตอบพร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบและความสมเหตุสมผลของคำตอบ

 **ความคิดรวบยอดของบทเรียน**

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ ชุดของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรอย่างน้อย 2 สมการ ที่แต่ละสมการเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณสองปริมาณ คำตอบของระบบสมการเป็นคำตอบของแต่ละสมการในระบบสมการ เราใช้ระบบสมการแทนสถานการณ์หรือปัญหาเพื่อนำไปสู่การหาคำตอบ ซึ่งคำตอบที่สอดคล้องกับทุกเงื่อนไขและมีความสมเหตุสมผลจะเป็นคำตอบของปัญหาหรือสถานการณ์

 **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์**

| ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์            | หัวข้อ                                 |                                         |                                                         |                               |
|-------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------|-------------------------------|
|                                           | 1.1<br>แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร | 1.2<br>การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร | 1.3<br>การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร | กิจกรรมท้ายบท/แบบฝึกหัดท้ายบท |
| การแก้ปัญหา                               |                                        |                                         | ✧                                                       | ✧                             |
| การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ | ✧                                      |                                         |                                                         | ✧                             |
| การเชื่อมโยง                              |                                        |                                         | ✧                                                       |                               |
| การให้เหตุผล                              |                                        |                                         |                                                         |                               |
| การคิดสร้างสรรค์                          |                                        |                                         |                                                         |                               |

## ความเชื่อมโยงของความรู้

### ความรู้พื้นฐาน

- ❖ การแก้สมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน เช่น สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก และสมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณ เพื่อเป็นพื้นฐานในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
- ❖ สมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่อยู่ในรูป  $y = mx + b$  เมื่อ  $x$  และ  $y$  เป็นตัวแปรที่แทนจำนวนจริงใด ๆ โดยที่  $m$  และ  $b$  เป็นค่าคงตัว จะมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ  $m$  โดยมีลักษณะของกราฟ 3 ลักษณะ เมื่อ  $m > 0$ ,  $m < 0$  และ  $m = 0$  เพื่อเป็นพื้นฐานในการนิยามเกี่ยวกับลักษณะของกราฟที่จะใช้หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

### ความรู้ ในบทเรียน

- ❖ ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มี  $x$  และ  $y$  เป็นตัวแปร โดยที่  $a, b, c, d, e$  และ  $f$  เป็นจำนวนจริงที่  $a, b$  ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ  $c, d$  ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เป็นระบบที่ประกอบด้วยสมการ
 
$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$
- ❖ คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับ  $(x, y)$  ที่สอดคล้องกับสมการทั้งสองของระบบสมการ ซึ่งค่า  $x$  และค่า  $y$  ทำให้ได้สมการที่เป็นจริงทั้งสองสมการ
- ❖ ลักษณะคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น มี 3 แบบ คือ มีคำตอบเดียว มีคำตอบมากมายไม่จำกัด และไม่มีคำตอบ
- ❖ การแก้ระบบสมการเป็นการหาคำตอบของระบบสมการ ซึ่งสามารถหาได้จากกราฟ หรือใช้สมบัติของการเท่ากัน ได้แก่ สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก และสมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณ
- ❖ การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร จะสร้างสมการเชิงเส้นสองตัวแปรแทนสถานการณ์หรือปัญหา แล้วแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบและความสมเหตุสมผล

### ความรู้ในอนาคต

การใช้ความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในการสร้างระบบสมการที่มากกว่าสองตัวแปรแทนปัญหาที่มีเงื่อนไขและความซับซ้อนมากขึ้น นอกจากนี้ยังใช้เป็นความรู้พื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ เช่น เมทริกซ์ กำหนดการเชิงเส้น และความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

### ลำดับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของบทเรียน

ทบทวนความรู้เรื่อง สมการเชิงเส้นสองตัวแปร รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร  
กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร และคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ทำกิจกรรมเพื่อสำรวจคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจำนวนสองสมการที่มีตัวแปรชุดเดียวกันจากกราฟ  
อภิปรายลักษณะคำตอบ 3 แบบ ของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ  
มีคำตอบเดียว มีคำตอบมากมายไม่จำกัด และ ไม่มีคำตอบ

แนะนำและอภิปรายเกี่ยวกับลักษณะของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรสองสมการที่หาคำตอบร่วมกัน  
เรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ทบทวนการหาคำตอบของสมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน แนะนำและอภิปรายเกี่ยวกับการหาคำตอบ  
ของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยใช้สมบัติการเท่ากัน ซึ่งอาจทำได้โดยวิธีการกำจัดตัวแปร  
และวิธีการแทนค่า

แก้ปัญหาเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยสร้างระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร  
แทนสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหา และแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบ  
พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบและความสมเหตุสมผลของคำตอบ

สรุปบทเรียน เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร  
และฝึกแก้ปัญหาโดยทำกิจกรรมท้ายบทและแบบฝึกหัดท้ายบท

## 1.1 แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร (2 ชั่วโมง)

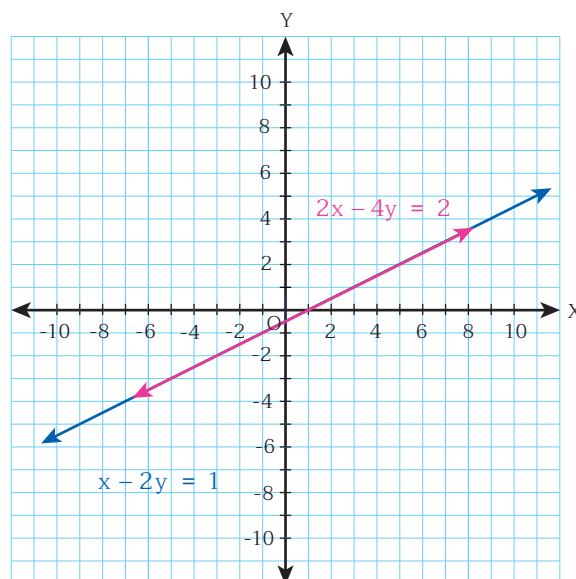
### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

1. อธิบายลักษณะของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
2. อธิบายลักษณะคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจากการสังเกตกราฟหรือระบบสมการ
3. ใช้กราฟในการวิเคราะห์หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

นักเรียนมักเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า คำตอบของระบบสมการที่ได้จากกราฟจะต้องเป็นจุดที่กราฟตัดกันเท่านั้น ดังนั้น ในกรณีที่กราฟเป็นเส้นตรงที่ทับกัน หรือเป็นเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งจะไม่เห็นจุดตัดชัดเจน ทำให้เข้าใจว่าระบบสมการไม่มีคำตอบ ซึ่งในความเป็นจริงระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัด



### สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ใบกิจกรรมเสนอแนะ 1.1 : คำตอบของเธอกับฉัน

### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้จะมุ่งให้นักเรียนได้รู้จักและเข้าใจเกี่ยวกับลักษณะของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร พร้อมทั้งอธิบายลักษณะคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจากกราฟ ซึ่งมี 3 แบบ ได้แก่ มีคำตอบเดียว มีคำตอบมากมายไม่จำกัด และไม่มีคำตอบ รวมทั้งหาคำตอบของสมการจากกราฟได้ นอกจากนี้ ยังมุ่งฝึกการนิยามภาพเกี่ยวกับกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรก่อนวิเคราะห์หาคำตอบ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

1. ครูสนทนากับนักเรียนเพื่อทบทวนรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร  $Ax + By + C = 0$  เมื่อ  $x$  และ  $y$  เป็นตัวแปร  $A$ ,  $B$  และ  $C$  เป็นค่าคงตัว โดยที่  $A$  และ  $B$  ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน โดยครูอาจให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างสมการเชิงเส้นสองตัวแปร เช่น  $3x - 2y = 6$  เพื่อนำไปสู่การเขียนกราฟของสมการ การหาจุดอันดับต่าง ๆ

ที่สอดคล้องกับสมการ และคำตอบของสมการจากกราฟ โดยเน้นย้ำว่าคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรมีจำนวนมากมายไม่จำกัด

2. ครูใช้ “กิจกรรม : ดูกราฟทราบคำตอบ” ในหนังสือเรียน หน้า 14–16 เพื่อให้นักเรียนพิจารณาสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการ และกราฟของสมการทั้งสองบนแกนคู่เดียวกัน ครูให้นักเรียนระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการแต่ละสมการ และพิกัดของจุดร่วมที่เป็นคำตอบของทั้งสองสมการ เพื่อให้นักเรียนสังเกตลักษณะคำตอบจากกราฟว่ามี 3 แบบ คือ มีคำตอบเดียว มีคำตอบมากมายไม่จำกัด และไม่มีคำตอบ

ครูอาจใช้มูมเทคโนโลยี ในหนังสือเรียน หน้า 17 โดยดาวน์โหลดสื่อสำเร็จรูปสำหรับซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) เพื่อพิจารณากราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 2 สมการอื่น ๆ เพิ่มเติม

3. ครูยกตัวอย่างปัญหาเกี่ยวกับจำนวนในหนังสือเรียน หน้า 17 เพื่อให้นักเรียนพิจารณาว่าเราสามารถเขียนสมการแสดงความความสัมพันธ์ของปริมาณสองปริมาณแทนแต่ละเงื่อนไขโดยใช้ตัวแปรชุดเดียวกันได้ แต่คำตอบของแต่ละสมการจะมีมากมาย ซึ่งอาจไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดของปัญหา จึงต้องนำชุดสมการทั้งสองมาพิจารณาคำตอบร่วมกัน เราเรียกชุดของสมการทั้งสองที่พิจารณาคำตอบร่วมกันว่า “ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร” ซึ่งในบทนี้ จะเน้นเฉพาะสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเพียงสองตัวและมีสมการเพียงสองสมการเท่านั้น
4. ครูอาจยกตัวอย่างระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในหนังสือเรียน หน้า 18–20 โดยให้นักเรียนนึกภาพ (visualize) ของกราฟจากแต่ละสมการที่กำหนดก่อนที่จะลงมือเขียนกราฟ เพื่อหาคำตอบของระบบสมการจากกราฟ และเน้นว่าจำนวนคำตอบของระบบสมการจะเป็นแบบใดแบบหนึ่งใน 3 แบบเท่านั้น คือ มีคำตอบเดียว มีคำตอบมากมายไม่จำกัด หรือไม่มีคำตอบ

นอกจากนี้ ครูอาจให้นักเรียนสังเกตเพิ่มเติมเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวของสมการทั้งสองกับคำตอบของระบบสมการที่ได้ จากบทสนทนาของข้าวสวยและข้าวหอม ในหนังสือเรียน หน้า 20–21 เพื่อให้ได้ข้อสังเกตที่ว่า

- ❖ ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวเดียวกันและค่าคงตัวในแต่ละสมการมีความสัมพันธ์ที่ทำให้สมการทั้งสองสมมูลกัน กราฟของสมการทั้งสองจะทับกันสนิท ระบบสมการนี้จะมีคำตอบมากมายไม่จำกัด ซึ่งในกรณีนี้นักเรียนมักคิดว่า ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ เพราะไม่เห็นพิกัดของจุดตัดที่เป็นคำตอบของระบบสมการ ดังนั้น ครูควรเน้นให้นักเรียนสังเกตพิกัดของจุดที่ทับกัน โดยสังเกตว่าคู่อันดับที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าว มีมากมายไม่จำกัด
  - ❖ ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัวเดียวกันเท่ากันหรือสามารถทำให้เท่ากันได้ แต่ค่าคงตัวของสมการทั้งสองไม่เท่ากัน กราฟของสมการทั้งสองจะขนานกัน ทำให้ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ
5. ครูอาจใช้ “กิจกรรมเสนอแนะ 1.1 : คำตอบของเธอกับฉัน” ในคู่มือครู หน้า 21–25 เพื่อสรุปความเข้าใจในการหาคำตอบของระบบสมการโดยการกำหนดเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกันสองเงื่อนไข เพื่อให้ได้คำตอบของจำนวนสองจำนวนตามเงื่อนไขที่กำหนดให้
  6. ครูอาจใช้คำถามชวนคิด 1.1 ในหนังสือเรียน หน้า 24 เพื่อนำไปสู่การอภิปรายที่ว่า การเขียนหรืออ่านจุดตัดที่เป็นพิกัดของคำตอบอาจมีความคลาดเคลื่อน ทำให้เราต้องหาแนวทางอื่นในการหาคำตอบที่ถูกต้องของระบบสมการ

## กิจกรรม : ดูกราฟหาคำตอบ

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่ต้องการให้นักเรียนพิจารณากราฟของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร และสังเกตเกี่ยวกับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจากกราฟ แล้วสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับจำนวนคำตอบว่าเป็นไปได้กี่แบบ โดยมีขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



สื่อ/อุปกรณ์



ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนทำ “กิจกรรม : ดูกราฟหาคำตอบ” ข้อ 1–3 ในหนังสือเรียน หน้า 14–16 แล้วระบุพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการที่กำหนดให้
2. ครูนำนักเรียนอภิปรายเกี่ยวกับพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ได้จากการทำกิจกรรมในแต่ละข้อว่าได้คำตอบเหมือนกันหรือไม่ อย่างไร จากนั้นให้นักเรียนตอบคำถามท้ายกิจกรรมในหนังสือเรียน หน้า 16 โดยสังเกตลักษณะคำตอบที่ได้จากการทำกิจกรรมแต่ละข้อ และอภิปรายร่วมกันเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างกราฟของชุดสมการกับคำตอบของชุดสมการ
3. ครูนำอภิปรายเพิ่มเติมเกี่ยวกับคำตอบของระบบสมการที่มีจำนวนมากมายซึ่งสามารถเขียนคำตอบในรูปพิกัดของคู่อันดับ  $(x, y)$  ให้เหมือนกันได้ เช่น เขียนพิกัดในรูป  $(5 - 2y, y)$  หรือ  $\left(x, \frac{5 - x}{2}\right)$





## เฉลยกิจกรรม : ดูกราฟทราบคำตอบ

1. 1) ตัวอย่างคำตอบ  $(-2, 10), (-1, 9), (0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0), (9, -1), (10, -2)$   
 2) ตัวอย่างคำตอบ  $(-2, -11), (-1, -9), (0, -7), (1, -5), (2, -3), (3, -1), (4, 1), (5, 3), (6, 5), (7, 7), (8, 9)$   
 3)  $(5, 3)$
2. 1) ตัวอย่างคำตอบ  $(-3, 4), (-1, 3), \left(0, 2\frac{1}{2}\right), (1, 2), (3, 1), (5, 0), (7, -1)$   
 2) ตัวอย่างคำตอบ  $(-3, 4), (-1, 3), \left(0, 2\frac{1}{2}\right), (1, 2), (3, 1), (5, 0), (7, -1)$   
 3) คำตอบมีได้หลากหลาย เช่น
  - ❖ มีคำตอบมากมาย เช่น  $(-3, 4), (-1, 3), \left(0, 2\frac{1}{2}\right), (1, 2), (3, 1), (5, 0), (7, -1)$
  - ❖ คำตอบของทั้งสองสมการเหมือนกัน เช่น  $(-3, 4), (-1, 3), \left(0, 2\frac{1}{2}\right), (1, 2), (3, 1), (5, 0), (7, -1)$
3. 1) ตัวอย่างคำตอบ  $(-4, -1), (-2, 2), (0, 5), (2, 8)$   
 2) ตัวอย่างคำตอบ  $(-6, -7), (-4, -4), (-2, -1), (0, 2), (2, 5), (4, 8)$   
 3) ไม่มี

## เฉลยคำถามท้ายกิจกรรม : ดูกราฟทราบคำตอบ

### ตัวอย่างคำตอบ

จากกิจกรรมในแต่ละข้อ เมื่อสังเกตกราฟเกี่ยวกับคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรทั้งสองสมการ พบว่า

- ❖ ข้อ 1 กราฟของสมการทั้งสองตัดกันจุดเดียว แสดงว่าคำตอบของสมการทั้งสองมีเพียงคำตอบเดียว คือ พิกัดของจุดตัดนั้น
- ❖ ข้อ 2 กราฟของสมการทั้งสองทับกันสนิท และคำตอบทุกคำตอบของสมการ  $x + 2y = 5$  เป็นคำตอบของสมการ  $3x + 6y = 15$  ด้วย แสดงว่าคำตอบของสมการทั้งสองมีมากมายไม่จำกัด
- ❖ ข้อ 3 กราฟของสมการทั้งสองขนานกัน ไม่มีจุดตัด และไม่ทับกัน แสดงว่าไม่มีพิกัดของจุดที่เป็นคำตอบร่วมของสมการทั้งสอง

## กิจกรรมเสนอแนะ 1.1 : คำตอบของเธอกับฉัน

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่เน้นย้ำความเข้าใจเกี่ยวกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจากกราฟ โดยฝึกการสร้างระบบสมการ เขียนกราฟ สังเกตจุดตัดของกราฟ และหาคำตอบของระบบสมการจากกราฟ โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

ใบกิจกรรมเสนอแนะ 1.1 : คำตอบของเธอกับฉัน



### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำใบกิจกรรมเสนอแนะ 1.1 : คำตอบของเธอกับฉัน ข้อ 1 แล้วให้นักเรียนเฉลยคำตอบในข้อ 1 ข้อย่อย 1) และ 2) เกี่ยวกับตัวอย่างของจำนวนสองจำนวนที่รวมกันได้ 10 และจำนวนสองจำนวนที่มีค่าต่างกันอยู่ 2 จากนั้นร่วมกันอภิปรายว่าคำตอบที่ได้ของนักเรียนแต่ละคนนั้นเหมือนกันหรือแตกต่างกัน และเป็นคำตอบที่ถูกต้องหรือไม่ เพราะเหตุใด สำหรับข้อย่อย 3) นักเรียนทุกคนควรได้คำตอบเหมือนกัน
2. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมข้อ 2 โดยเขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปรแทนประโยค “จำนวนสองจำนวนที่รวมกันได้ 10” และ “จำนวนสองจำนวนที่มีค่าต่างกันอยู่ 2” เมื่อกำหนดให้  $x$  แทนจำนวนแรก และ  $y$  แทนจำนวนที่สอง แล้วให้นักเรียนนำเสนอคำตอบ และให้นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมกันพิจารณาความถูกต้อง
3. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมข้อ 3–5 แล้วอภิปรายคำตอบที่ได้ร่วมกัน สำหรับข้อ 5 นักเรียนควรตอบได้ว่าเราสามารถเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรเพื่อหาคำตอบของจำนวนสองจำนวนที่มีเงื่อนไขตามที่กำหนดให้ได้ เพราะคำตอบที่ได้เหมือนกัน และมีความสะดวกมากกว่าที่จะยกตัวอย่างจำนวนตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ แล้วพิจารณาว่ามีคำตอบเหมือนกันหรือไม่



## ใบกิจกรรมเสนอแนะ 1.1 : คำตอบของเธอกับฉัน

1. ให้นักเรียนเติมคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จงยกตัวอย่างจำนวนสองจำนวนที่รวมกันได้ 10 มา 6 คู่

.....

2) จงยกตัวอย่างจำนวนสองจำนวนที่มีค่าต่างกันอยู่ 2 มา 6 คู่

.....

3) จงหาจำนวนสองจำนวนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในข้อ 1) และ 2)

.....

2. ถ้าให้  $x$  แทนจำนวนแรก และ  $y$  แทนจำนวนที่สอง ให้นักเรียนเติมคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

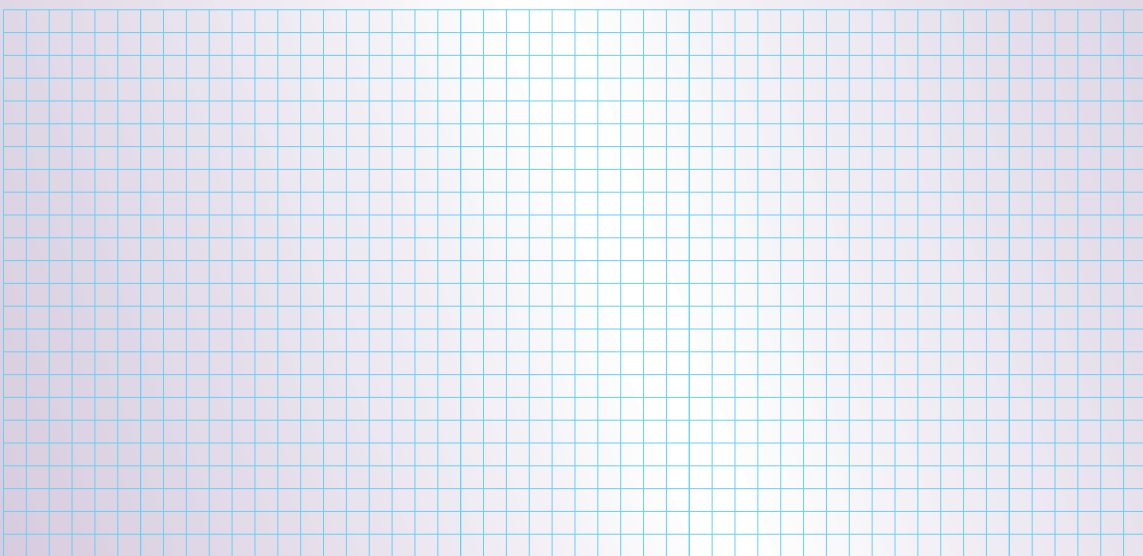
1) จงเขียนสมการแทนประโยค “จำนวนสองจำนวนที่รวมกันได้ 10”

.....

2) จงเขียนสมการแทนประโยค “จำนวนสองจำนวนที่มีค่าต่างกันอยู่ 2”

.....

3. ให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องการเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในการเขียนกราฟของสมการที่ได้ในข้อ 2 โดยใช้แกนคู่เดียวกัน



4. จากกราฟในข้อ 3 จงเติมคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จงระบุพิกัดของจุดตัดของกราฟที่ได้ในข้อ 3

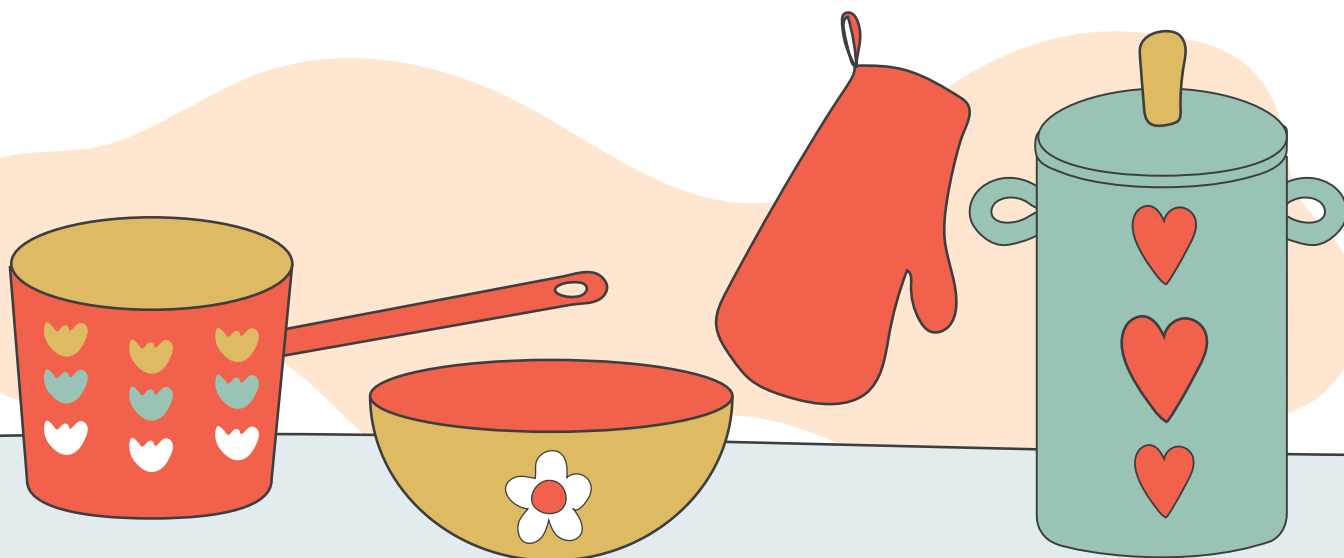
.....

2) พิกัดของจุดตัดที่ได้กับคำตอบในข้อ 1 ข้อย่อย 3) สัมพันธ์กันอย่างไร

.....

5. นักเรียนคิดว่าเราสามารถใช้การเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในการหาคำตอบของจำนวนสองจำนวนที่มีเงื่อนไขตามที่กำหนดไว้ในข้อ 1 ข้อย่อย 1) และ 2) ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

.....



## เฉลยใบกิจกรรมเสนอแนะ 1.1 : คำตอบของเธอกับฉัน

1. ให้นักเรียนเติมคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จงยกตัวอย่างจำนวนสองจำนวนที่รวมกันได้ 10 มา 6 คู่

ตัวอย่างคำตอบ

9 กับ 1 8 กับ 2 7 กับ 3 6 กับ 4 5 กับ 5 -4 กับ 14

2) จงยกตัวอย่างจำนวนสองจำนวนที่มีค่าต่างกันอยู่ 2 มา 6 คู่

ตัวอย่างคำตอบ

3 กับ 1 4 กับ 2 5 กับ 3 6 กับ 4 7 กับ 5 8 กับ 6

3) จงหาจำนวนสองจำนวนที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในข้อ 1) และ 2)

6 กับ 4 (สำหรับข้อนี้ นักเรียนอาจตอบ 4 กับ 6 ก็ได้ ขึ้นอยู่กับคำตอบของนักเรียนในข้อ 1) และ 2))

2. ถ้าให้  $x$  แทนจำนวนแรก และ  $y$  แทนจำนวนที่สอง ให้นักเรียนเติมคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จงเขียนสมการแทนประโยค “จำนวนสองจำนวนที่รวมกันได้ 10”

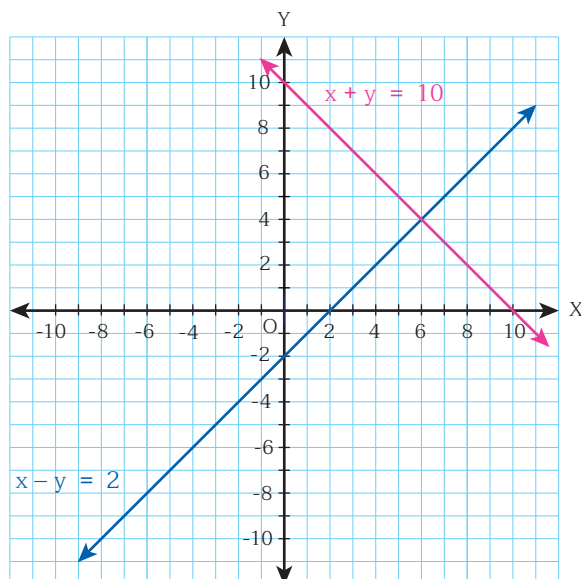
$x + y = 10$

2) จงเขียนสมการแทนประโยค “จำนวนสองจำนวนที่มีค่าต่างกันอยู่ 2”

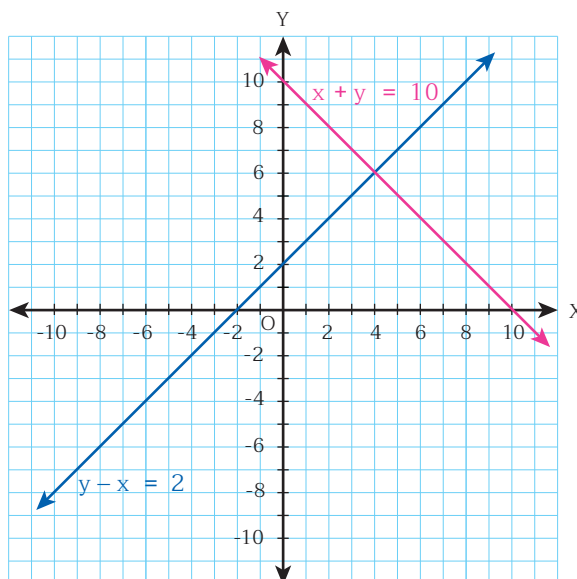
$x - y = 2$  หรือ  $y - x = 2$

3. ให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องการเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในการเขียนกราฟของสมการที่ได้ในข้อ 2 โดยใช้แกนคู่เดียวกัน

กรณี  $x + y = 10$  และ  $x - y = 2$



กรณี  $x + y = 10$  และ  $y - x = 2$



4. จากกราฟในข้อ 3 จงเติมคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) จงระบุพิกัดของจุดตัดของกราฟที่ได้ในข้อ 3

กรณี  $x + y = 10$  และ  $x - y = 2$  จะได้พิกัดของจุดตัด คือ  $(6, 4)$  หรือ

กรณี  $x + y = 10$  และ  $y - x = 2$  จะได้พิกัดของจุดตัด คือ  $(4, 6)$

2) พิกัดของจุดตัดที่ได้กับคำตอบในข้อ 1 ข้อย่อย 3) สัมพันธ์กันอย่างไร

มีคำตอบเหมือนกัน คือ 6 กับ 4

5. นักเรียนคิดว่าเราสามารถใช้ในการเขียนกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในการหาคำตอบของจำนวนสองจำนวนที่มีเงื่อนไขตามที่กำหนดไว้ในข้อ 1 ข้อย่อย 1) และ 2) ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

ได้ เพราะได้คำตอบเหมือนกัน



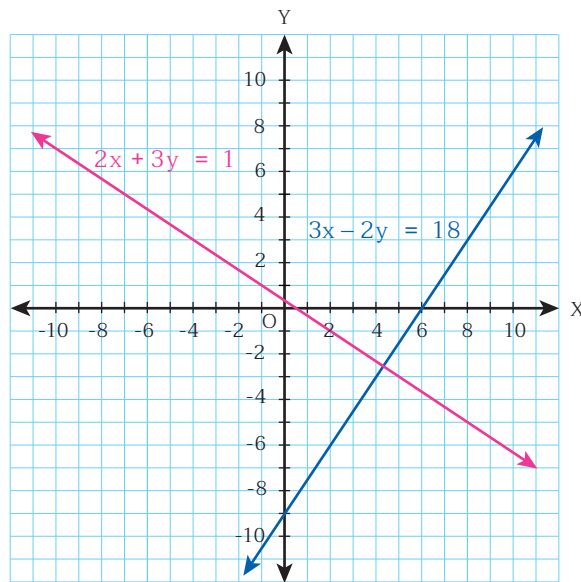
## เฉลยชวนคิด



ipst.me/11417

### ชวนคิด 1.1

เขียนกราฟของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยสมการ  $2x + 3y = 1$  และ  $3x - 2y = 18$  ได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่าพิกัดที่หนึ่งและพิกัดที่สองของจุดตัดของกราฟไม่เป็นจำนวนเต็ม ทำให้อ่านได้เพียงค่าประมาณเท่านั้น คำตอบที่อ่านได้จากกราฟจึงอาจไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้องของระบบสมการที่กำหนดให้

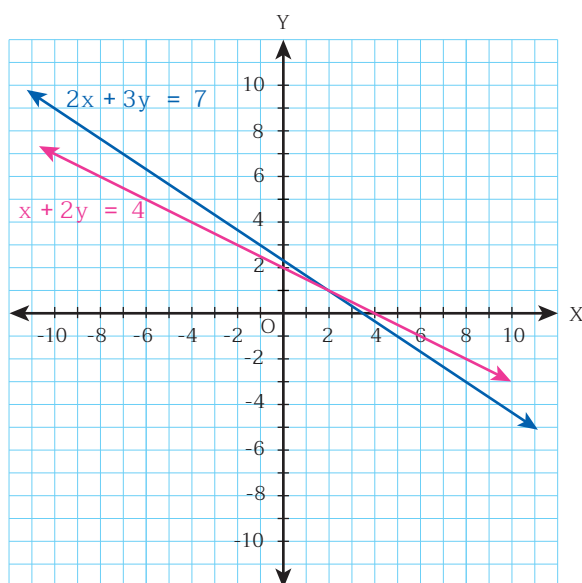
## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 1.1

1. 1) แนวคิด กำหนดให้  $x + 2y = 4$  \_\_\_\_\_ ①

$2x + 3y = 7$  \_\_\_\_\_ ②

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



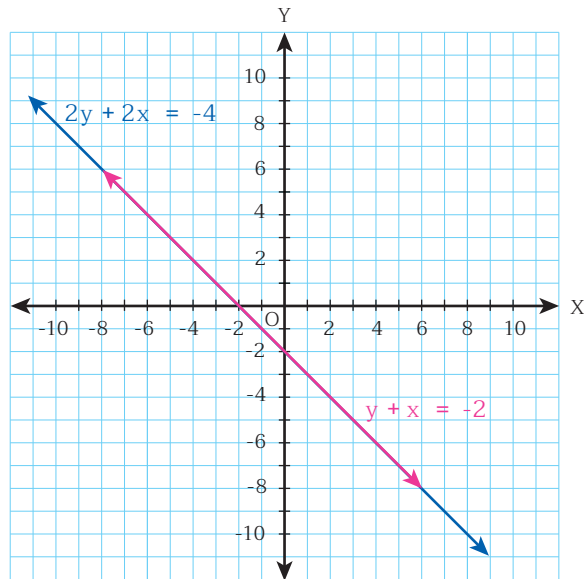
จากกราฟ ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว คือ (2, 1)

2) แนวคิด กำหนดให้  $y + x = -2$  \_\_\_\_\_ ①

$2y + 2x = -4$  \_\_\_\_\_ ②

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้

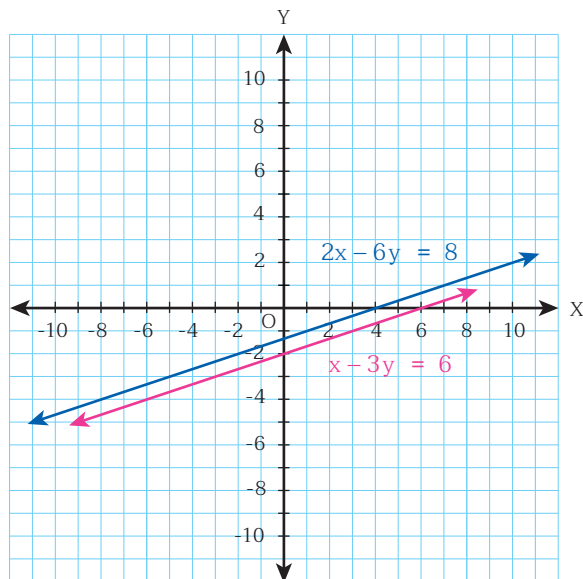




จากกราฟ ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัด

- 3) แนวคิด กำหนดให้  $x - 3y = 6$  \_\_\_\_\_ ①  
 $2x - 6y = 8$  \_\_\_\_\_ ②

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้

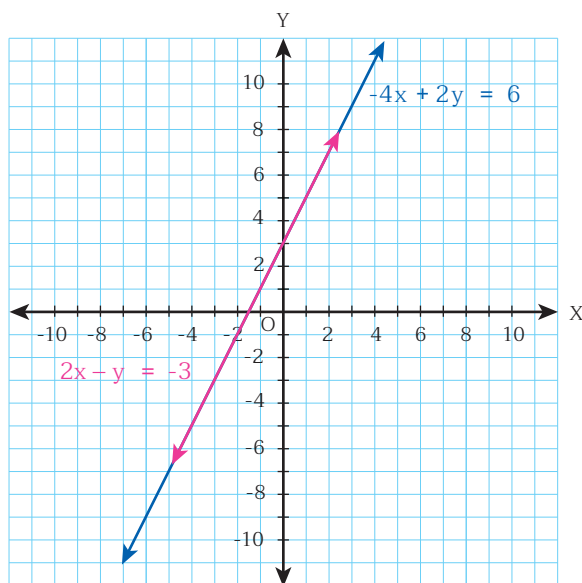


จากกราฟ ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้ไม่มีคำตอบ

4) แนวคิด กำหนดให้  $2x - y = -3$  \_\_\_\_\_ ①

$-4x + 2y = 6$  \_\_\_\_\_ ②

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้

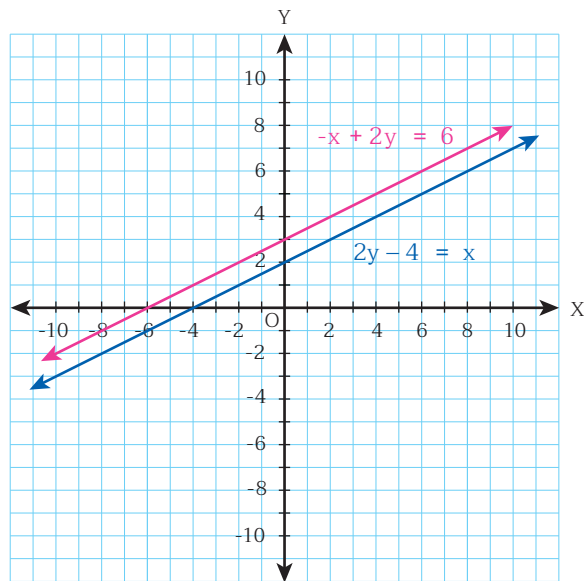


จากกราฟ ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัด

5) แนวคิด กำหนดให้  $-x + 2y = 6$  \_\_\_\_\_ ①

$2y - 4 = x$  \_\_\_\_\_ ②

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้

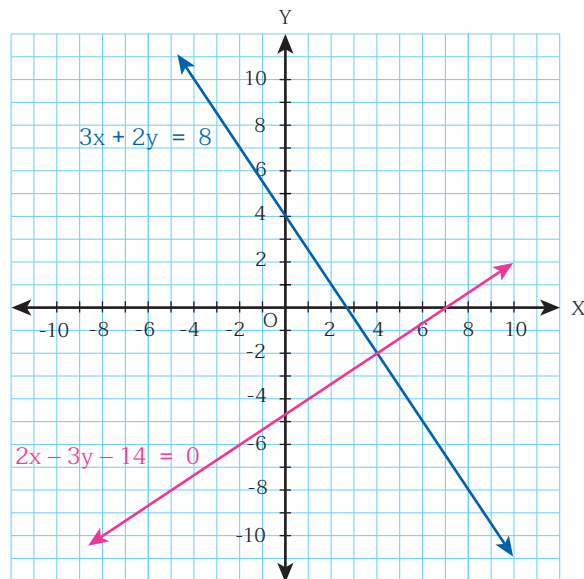


จากกราฟ ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้ไม่มีคำตอบ

6) แนวคิด กำหนดให้  $2x - 3y - 14 = 0$  \_\_\_\_\_ ①

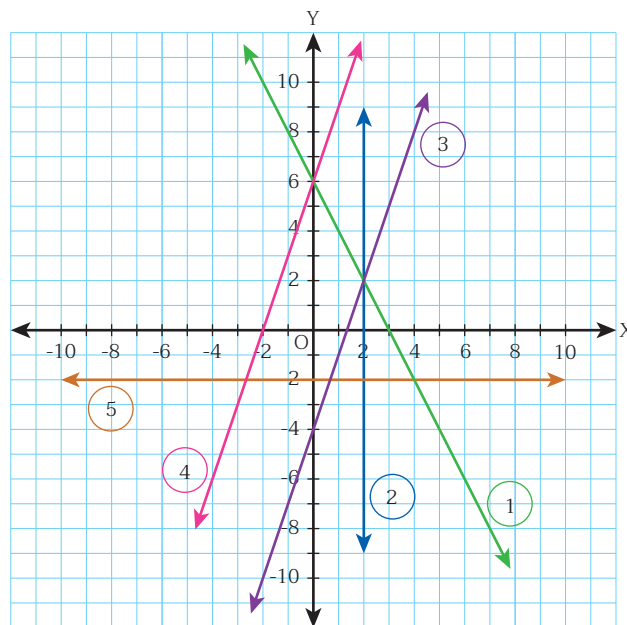
$3x + 2y = 8$  \_\_\_\_\_ ②

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



จากกราฟ ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนี้มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว คือ  $(4, -2)$

2. 1) มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว คือ  $(2, 1)$   
 2) มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว คือ  $(3, -3)$   
 3) มีคำตอบมากมายไม่จำกัด  
 4) ไม่มีคำตอบ  
 5) มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว คือ  $(-2, 3)$   
 6) มีคำตอบมากมายไม่จำกัด
3. 1) เติมหมายเลขของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรลงใน  $\bigcirc$  ได้ดังนี้



จาก ข้อ 1) สามารถตอบคำถามข้อ 2)–6) ได้ดังนี้

- 2) มีคำตอบเดียว คือ  $(0, 6)$   
 3) ไม่มีคำตอบ  
 4) มีคำตอบเดียว คือ  $(2, -2)$   
 5) มีคำตอบเดียว คือ  $(4, -2)$   
 6) มีคำตอบเดียว คือ  $(2, 2)$

## 1.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร (5 ชั่วโมง)



### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน



### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

-



### สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

-

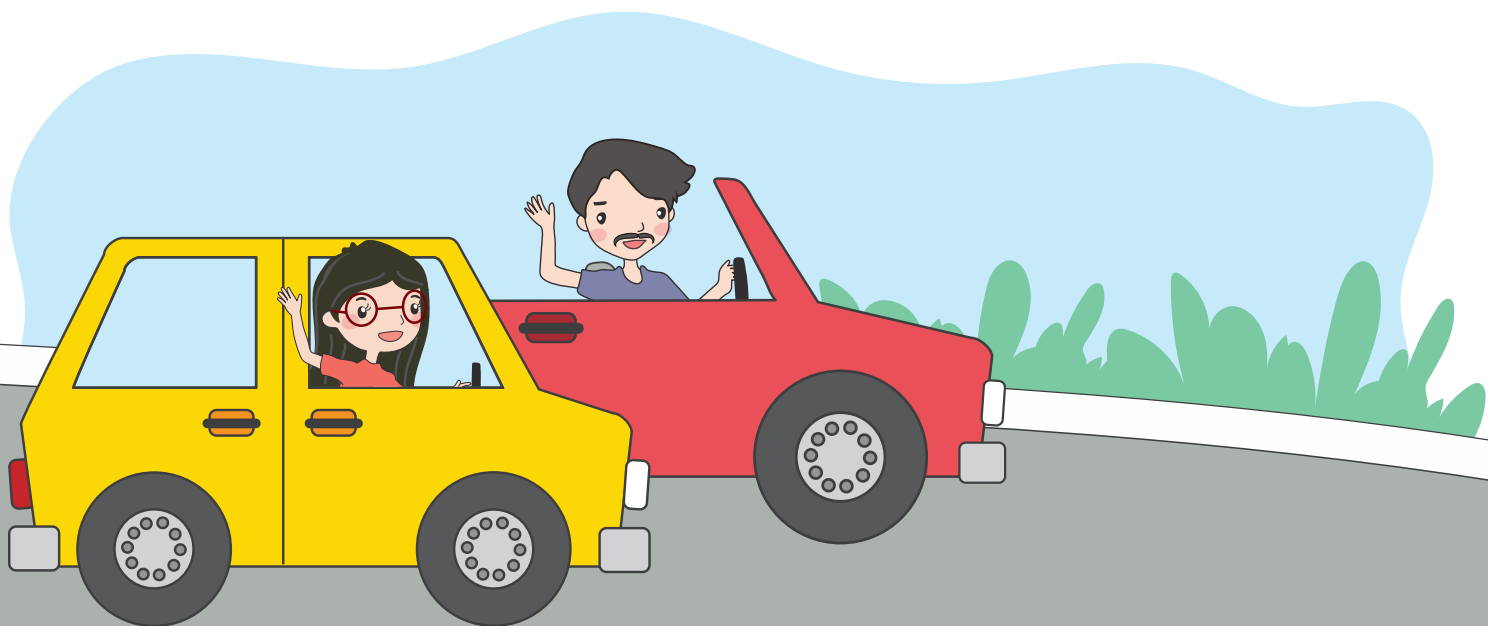


### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้เป็นเรื่องการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยเน้นให้นักเรียนสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน เช่น สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก และสมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการคูณ มาช่วยในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรชุดใหม่จะสมมูลกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่กำหนดให้ ดังนั้น จึงไม่เน้นการตรวจสอบคำตอบ แต่ควรเน้นความรอบคอบในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรของนักเรียน แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

1. ครูยกตัวอย่างกราฟของระบบสมการ เช่น  $x + 6y = 10$  และ  $2x + 3y = 12$  ซึ่งมีคำตอบเป็น  $\left(\frac{14}{3}, \frac{8}{9}\right)$  เพื่อชี้ให้นักเรียนเห็นว่า การเขียนและอ่านพิกัดของคู่อันดับที่เป็นคำตอบจากกราฟ อาจมีโอกาสดคลาดเคลื่อนจากค่าที่แท้จริงได้ จากนั้น ครูแนะนำการแก้สมการโดยใช้สมบัติการเท่ากัน มาช่วยในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
2. ครูอาจใช้ตัวอย่างที่ 1–6 ในหนังสือเรียน หน้า 24–27 เพื่ออภิปรายร่วมกันถึงวิธีแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ซึ่งอาจใช้วิธีการกำจัดตัวแปรหรือวิธีการแทนค่า ซึ่งหลังจากแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรแล้ว ครูควรให้นักเรียนสังเกตลักษณะคำตอบของระบบสมการที่อาจมีคำตอบเดียว มีคำตอบมากมายไม่จำกัด หรือไม่มีคำตอบ นอกจากนี้ ครูควรเน้นย้ำเพิ่มเติมในประเด็นต่อไปนี้
  - ❖ เมื่อแก้ระบบสมการแล้วได้สมการที่ไม่เป็นจริง แสดงว่าไม่มีคำตอบที่สอดคล้องกับสมการทั้งสอง ดังนั้น ระบบสมการไม่มีคำตอบ ดังในตัวอย่างที่ 4
  - ❖ ถ้าจัดรูปสมการเชิงเส้นสองตัวแปร แล้วพบว่าสมการทั้งสองเป็นสมการเดียวกัน หรือถ้าแก้สมการแล้วได้สมการที่เป็นจริง แสดงว่าระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัด ดังในตัวอย่างที่ 5 และสำหรับตัวอย่างที่ 5 นี้ ถ้าเราใช้วิธีกำจัดตัวแปร จะได้  $0 = 0$  ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง

- ✿ ในกรณีที่ระบบสมการมีคำตอบมากมาย ครูควรย้าให้นักเรียนระบุคำตอบในรูปทั่วไป ซึ่งในขั้นนี้นักเรียนสามารถเขียนคำตอบให้อยู่ในรูปคู่อันดับของตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง ดังในตัวอย่างที่ 5
3. ครูอาจให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงการเลือกใช้วิธีแก้ระบบสมการด้วยวิธีการกำจัดตัวแปรและวิธีการแทนค่า โดยชี้ให้เห็นว่า การจะเลือกใช้วิธีการใด มักพิจารณาจากลักษณะของแต่ละสมการในระบบสมการนั้น ทั้งนี้ครูอาจยกตัวอย่างระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรเพิ่มเติมเพื่อให้นักเรียนพิจารณาและเลือกวิธีแก้ระบบสมการ โดยยังไม่ลงมือแก้ระบบสมการ
  4. ครูอาจตั้งประเด็นเพิ่มเติมให้นักเรียนใช้ความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงเส้นที่เรียนมาแล้ว มาช่วยในการนิภาพเพื่อหาคำตอบของระบบสมการ ที่แต่ละสมการมีลักษณะเฉพาะ เช่น  $x = 4$ ,  $y = 6$  ซึ่งจะมีคำตอบของระบบสมการคือ  $(4, 6)$  ทำให้นักเรียนขยายความคิดเกี่ยวกับการใช้กราฟช่วยในการหาคำตอบของระบบสมการ



## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 1.2

1. 1) แนวคิด

$$3x - 4y = 0 \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

$$3x + 4y = -24 \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}; \quad 6x = -24$$

$$x = -4$$

แทน  $x$  ด้วย  $-4$  ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$3(-4) - 4y = 0$$

$$-4y = 12$$

$$y = -3$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(-4, -3)$

2) แนวคิด

$$3x - y = 7 \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

$$4x - 3y - 11 = 0 \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{จากสมการ } \textcircled{2} \quad 4x - 3y = 11 \quad \text{_____} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \times 3; \quad 9x - 3y = 21 \quad \text{_____} \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{3}; \quad 5x = 10 \quad \text{_____} \quad \textcircled{5}$$

$$x = 2$$

แทน  $x$  ด้วย  $2$  ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$3(2) - y = 7$$

$$-y = 1$$

$$y = -1$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(2, -1)$

3) แนวคิด 1

$$x + 7y = 8 \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

$$3x + 2y = 5 \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{จากสมการ } \textcircled{1} \quad x = 8 - 7y \quad \text{_____} \quad \textcircled{3}$$

แทน  $x$  ด้วย  $8 - 7y$  ในสมการ  $\textcircled{2}$  จะได้

$$3(8 - 7y) + 2y = 5$$

$$24 - 21y + 2y = 5$$

$$-19y = -19$$

$$y = 1$$

แทน  $y$  ด้วย 1 ในสมการ ① จะได้

$$x + 7(1) = 8$$

$$x = 1$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ (1, 1)

แนวคิด 2

$$x + 7y = 8 \quad \text{_____} \quad \text{①}$$

$$3x + 2y = 5 \quad \text{_____} \quad \text{②}$$

$$\text{①} \times 3 ; \quad 3x + 21y = 24 \quad \text{_____} \quad \text{③}$$

$$\text{③} - \text{②}; \quad 19y = 19$$

$$y = 1$$

แทน  $y$  ด้วย 1 ในสมการ ① จะได้

$$x + 7(1) = 8$$

$$x = 1$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ (1, 1)

4) แนวคิด

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \text{_____} \quad \text{①}$$

$$2x + 4y - 5 = 0 \quad \text{_____} \quad \text{②}$$

$$\text{①} \times 2 ; \quad 2x + 4y - 2 = 0 \quad \text{_____} \quad \text{③}$$

$$\text{②} - \text{③}; \quad -3 = 0 \quad \text{ซึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นจริง}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

5) แนวคิด 1

$$4x = 3y + 12 \quad \text{_____} \quad \text{①}$$

$$x = \frac{3}{4}y + 3 \quad \text{_____} \quad \text{②}$$

$$\text{②} \times 4 ; \quad 4x = 3y + 12 \quad \text{_____} \quad \text{③}$$

จะเห็นว่า สมการ ③ ที่ได้จากสมการ ② เป็นสมการเดียวกันกับสมการ ①

แสดงว่าสมการ ① และสมการ ② มีคำตอบเหมือนกัน และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัดอยู่ในรูป  $\left(\frac{3}{4}y + 3, y\right)$  เมื่อ  $y$  แทนจำนวนจริงใด ๆ

แนวคิด 2

$$4x = 3y + 12 \quad \text{_____} \quad \text{①}$$

$$x = \frac{3}{4}y + 3 \quad \text{_____} \quad \text{②}$$

แทน  $x$  ด้วย  $\frac{3}{4}y + 3$  ในสมการ ① จะได้

$$4\left(\frac{3}{4}y + 3\right) = 3y + 12$$

$$3y + 12 = 3y + 12$$

$$12 = 12$$

ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง



แสดงว่า สมการ ① และสมการ ② มีคำตอบเหมือนกัน และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัดอยู่ในรูป  $\left(\frac{3}{4}y + 3, y\right)$  เมื่อ  $y$  แทนจำนวนจริงใด ๆ

6) แนวคิด  $x + y = \frac{1}{2}$  \_\_\_\_\_ ①

$x - 3y = \frac{1}{6}$  \_\_\_\_\_ ②

① - ② ;  $4y = \frac{1}{3}$   
 $y = \frac{1}{12}$

แทน  $y$  ด้วย  $\frac{1}{12}$  ในสมการ ① จะได้

$x + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$   
 $x = \frac{5}{12}$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{12}\right)$

7) แนวคิด  $5x + 3y = 10$  \_\_\_\_\_ ①

$4x - 2y = 8$  \_\_\_\_\_ ②

①  $\times 2$  ;  $10x + 6y = 20$  \_\_\_\_\_ ③

②  $\times 3$  ;  $12x - 6y = 24$  \_\_\_\_\_ ④

③ + ④ ;  $22x = 44$   
 $x = 2$

แทน  $x$  ด้วย 2 ในสมการ ① จะได้

$5(2) + 3y = 10$   
 $3y = 0$   
 $y = 0$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(2, 0)$

8) แนวคิด  $-2x - 5y = 5$  \_\_\_\_\_ ①

$2y = 4 - 2x$  \_\_\_\_\_ ②

จากสมการ ② ;  $2x + 2y = 4$  \_\_\_\_\_ ③

① + ③ ;  $-3y = 9$   
 $y = -3$

แทน  $y$  ด้วย  $-3$  ในสมการ ① จะได้

$$\begin{aligned} -2x - 5(-3) &= 5 \\ -2x &= -10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(5, -3)$

9) แนวคิด

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3y & = & 5 \quad \text{_____ ①} \\ -6x + 9y & = & -12 \quad \text{_____ ②} \\ \text{①} \times (-3); & -6x + 9y & = -15 \quad \text{_____ ③} \\ \text{②} - \text{③}; & 0 & = 3 \quad \text{ซึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นจริง} \end{array}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

10) แนวคิด 1

$$\begin{array}{rcl} x - \frac{1}{2}y & = & 2 \quad \text{_____ ①} \\ y - 2x & = & -4 \quad \text{_____ ②} \\ \text{①} \times 2; & 2x - y & = 4 \quad \text{_____ ③} \\ \text{②} + \text{③}; & 0 & = 0 \quad \text{ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง} \end{array}$$

แสดงว่า สมการ ① และสมการ ② มีคำตอบเหมือนกัน และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

หาคู่อันดับที่เป็นคำตอบของระบบสมการนี้ได้จากสมการใดสมการหนึ่ง ดังนี้

จากสมการ ② จะได้  $y = 2x - 4$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัดอยู่ในรูป  $(x, 2x - 4)$  เมื่อ  $x$  แทนจำนวนจริงใด ๆ

แนวคิด 2

$$\begin{array}{rcl} x - \frac{1}{2}y & = & 2 \quad \text{_____ ①} \\ y - 2x & = & -4 \quad \text{_____ ②} \\ \text{①} \times (-2); & -2x + y & = -4 \quad \text{_____ ③} \end{array}$$

จะเห็นว่า สมการ ③ ที่ได้จากสมการ ② เป็นสมการเดียวกันกับสมการ ①

แสดงว่า สมการ ① และสมการ ② มีคำตอบเหมือนกัน และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

หาคู่อันดับที่เป็นคำตอบของระบบสมการนี้ได้จากสมการใดสมการหนึ่ง ดังนี้

จากสมการ ② จะได้  $y = 2x - 4$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัดอยู่ในรูป  $(x, 2x - 4)$  เมื่อ  $x$  แทนจำนวนจริงใด ๆ

2. 1) แนวคิด  $5x - 4y = 1$  \_\_\_\_\_ ①

$x - y = -7$  \_\_\_\_\_ ②

②  $\times 5$  ;  $5x - 5y = -35$  \_\_\_\_\_ ③

① - ③ ;  $y = 36$

แทน  $y$  ด้วย 36 ในสมการ ② จะได้

$x - 36 = -7$

$x = 29$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ (29, 36)

2) แนวคิด  $x = \frac{3}{2}y - 5$  \_\_\_\_\_ ①

$12y - 8x = -12$  \_\_\_\_\_ ②

แทน  $x$  ด้วย  $\frac{3}{2}y - 5$  ในสมการ ② จะได้

$12y - 8\left(\frac{3}{2}y - 5\right) = -12$

$12y - 12y + 40 = -12$

$40 = -12$

ซึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

3) แนวคิด  $-2x = 2(y - 2)$  \_\_\_\_\_ ①

$2x + 2y = 4$  \_\_\_\_\_ ②

จากสมการ ① ;  $-2x - 2y = -4$  \_\_\_\_\_ ③

② + ③ ;  $0 = 0$  ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง

แสดงว่า สมการ ① และสมการ ② มีคำตอบเหมือนกัน และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

หาคู่อันดับที่เป็นคำตอบของระบบสมการนี้ได้จากสมการใดสมการหนึ่ง ดังนี้

จากสมการ ② จะได้  $y = 2 - x$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัดอยู่ในรูป  $(x, 2 - x)$  เมื่อ  $x$  แทนจำนวนจริงใด ๆ

4) แนวคิด

$$\begin{array}{rcl} 11x + 8y & = & 31 \quad \text{_____} \text{ ①} \\ 13x - 6y & = & 83 \quad \text{_____} \text{ ②} \\ \text{①} \times 3 & ; & 33x + 24y = 93 \quad \text{_____} \text{ ③} \\ \text{②} \times 4 & ; & 52x - 24y = 332 \quad \text{_____} \text{ ④} \\ \text{③} + \text{④} & ; & 85x = 425 \end{array}$$

$$x = 5$$

แทน  $x$  ด้วย 5 ในสมการ ① จะได้

$$\begin{array}{rcl} 11(5) + 8y & = & 31 \\ 8y & = & -24 \\ y & = & -3 \end{array}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(5, -3)$

5) แนวคิด

$$\begin{array}{rcl} 4x - 3y & = & 12 \quad \text{_____} \text{ ①} \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y & = & 1 \quad \text{_____} \text{ ②} \\ \text{②} \times 12 & ; & 4x - 3y = 12 \quad \text{_____} \text{ ③} \end{array}$$

จะเห็นว่า สมการ ③ ที่ได้จากสมการ ② เป็นสมการเดียวกันกับสมการ ①

แสดงว่า สมการ ① และสมการ ② มีคำตอบเหมือนกัน และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

หาคู่อันดับที่เป็นคำตอบของระบบสมการนี้ได้จากสมการใดสมการหนึ่ง ดังนี้

จากสมการ ① ;  $4x - 3y = 12$

$$y = \frac{4x - 12}{3}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัดอยู่ในรูป  $\left(x, \frac{4x - 12}{3}\right)$  เมื่อ  $x$  แทนจำนวนจริงใด ๆ

6) แนวคิด

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1.6 \quad \text{_____} \text{ ①} \\ 3x - 4y & = & 4.1 \quad \text{_____} \text{ ②} \\ \text{①} \times 4 & ; & 8x + 12y = 6.4 \quad \text{_____} \text{ ③} \\ \text{②} \times 3 & ; & 9x - 12y = 12.3 \quad \text{_____} \text{ ④} \\ \text{③} + \text{④} & ; & 17x = 18.7 \end{array}$$

$$x = 1.1$$

แทน  $x$  ด้วย 1.1 ในสมการ ① จะได้

$$2(1.1) + 3y = 1.6$$

$$3y = -0.6$$

$$y = -0.2$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(1.1, -0.2)$

7) แนวคิด

$$\begin{array}{rcl} 0.2x + 0.3y & = & 0.7 \quad \text{_____ ①} \\ 0.5x - 0.2y & = & 0.8 \quad \text{_____ ②} \\ \text{①} \times 10 ; & 2x + 3y & = 7 \quad \text{_____ ③} \\ \text{②} \times 10 ; & 5x - 2y & = 8 \quad \text{_____ ④} \\ \text{③} \times 2 ; & 4x + 6y & = 14 \quad \text{_____ ⑤} \\ \text{④} \times 3 ; & 15x - 6y & = 24 \quad \text{_____ ⑥} \\ \text{⑤} + \text{⑥} ; & 19x & = 38 \\ & x & = 2 \end{array}$$

แทน  $x$  ด้วย 2 ในสมการ ③ จะได้

$$2(2) + 3y = 7$$

$$3y = 3$$

$$y = 1$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(2, 1)$

8) แนวคิด

$$\begin{array}{rcl} 3x + 3 & = & 23 - 4y \quad \text{_____ ①} \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} & = & 4 \quad \text{_____ ②} \\ \text{จากสมการ ① ; } & 3x + 4y & = 20 \quad \text{_____ ③} \\ \text{②} \times 12 ; & 3x + 4y & = 48 \quad \text{_____ ④} \\ \text{③} - \text{④} ; & 0 & = -28 \end{array}$$

ซึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

9) แนวคิด

$$\begin{array}{rcl} 4x + 9y - 7 & = & 0 \quad \text{_____ ①} \\ 12x - 27y + 21 & = & 0 \quad \text{_____ ②} \\ \text{①} \times 3 ; & 12x + 27y - 21 & = 0 \quad \text{_____ ③} \\ \text{②} + \text{③} ; & 24x & = 0 \\ & x & = 0 \end{array}$$

แทน  $x$  ด้วย 0 ในสมการ ① จะได้

$$4(0) + 9y - 7 = 0$$

$$9y = 7$$

$$y = \frac{7}{9}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(0, \frac{7}{9})$

10) แนวคิด

$$26x + 3y + 4 = 0 \quad \text{_____ ①}$$

$$\frac{1}{5}(x - 2) = \frac{1}{4}(1 - y) \quad \text{_____ ②}$$

$$\text{②} \times 20 ; \quad 4(x - 2) = 5(1 - y)$$

$$4x - 8 = 5 - 5y$$

$$4x + 5y - 13 = 0 \quad \text{_____ ③}$$

$$\text{①} \times 5 ; \quad 130x + 15y + 20 = 0 \quad \text{_____ ④}$$

$$\text{③} \times 3 ; \quad 12x + 15y - 39 = 0 \quad \text{_____ ⑤}$$

$$\text{④} - \text{⑤} ; \quad 118x + 59 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

แทน  $x$  ด้วย  $-\frac{1}{2}$  ในสมการ ① จะได้

$$26\left(-\frac{1}{2}\right) + 3y + 4 = 0$$

$$-13 + 3y + 4 = 0$$

$$3y = 9$$

$$y = 3$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(-\frac{1}{2}, 3)$

11) แนวคิด

$$2x - 3y = -9 \quad \text{_____ ①}$$

$$3(x - 1) = 5(y - 4) + 2 \quad \text{_____ ②}$$

$$\text{จากสมการ ② ;} \quad 3x - 3 = 5y - 20 + 2$$

$$3x - 5y = -15 \quad \text{_____ ③}$$

$$\text{①} \times 3 ; \quad 6x - 9y = -27 \quad \text{_____ ④}$$

$$\text{③} \times 2 ; \quad 6x - 10y = -30 \quad \text{_____ ⑤}$$

$$\text{④} - \text{⑤} ; \quad y = 3$$

แทน  $y$  ด้วย 3 ในสมการ ① จะได้

$$2x - 3(3) = -9$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(0, 3)$

12) แนวคิด 1

$$5(y - 2) - 6x = 7 \quad \text{_____} \quad \text{①}$$

$$2(x + 5) - (y - 1) = 4 \quad \text{_____} \quad \text{②}$$

จากสมการ ② ;  $2x + 10 - y + 1 = 4$

$$2x - y = -7$$

$$y = 2x + 7 \quad \text{_____} \quad \text{③}$$

แทน  $y$  ด้วย  $2x + 7$  ในสมการ ① จะได้

$$5[(2x + 7) - 2] - 6x = 7$$

$$5(2x + 5) - 6x = 7$$

$$10x + 25 - 6x = 7$$

$$4x = -18$$

$$x = -\frac{9}{2}$$

แทน  $x$  ด้วย  $-\frac{9}{2}$  ในสมการ ③ จะได้

$$y = 2\left(-\frac{9}{2}\right) + 7$$

$$y = -2$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $\left(-\frac{9}{2}, -2\right)$

แนวคิด 2

$$5(y - 2) - 6x = 7 \quad \text{_____} \quad \text{①}$$

$$2(x + 5) - (y - 1) = 4 \quad \text{_____} \quad \text{②}$$

จากสมการ ① ;  $5y - 10 - 6x = 7$

$$-6x + 5y = 17 \quad \text{_____} \quad \text{③}$$

จากสมการ ② ;  $2x + 10 - y + 1 = 4$

$$2x - y = -7 \quad \text{_____} \quad \text{④}$$

$$\text{④} \times 3 ; \quad 6x - 3y = -21 \quad \text{_____} \quad \text{⑤}$$

$$\text{③} + \text{⑤} ; \quad 2y = -4$$

$$y = -2$$

แทน  $y$  ด้วย  $-2$  ในสมการ ① จะได้

$$5[(-2) - 2] - 6x = 7$$

$$-20 - 6x = 7$$

$$-6x = 27$$

$$x = -\frac{9}{2}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $\left(-\frac{9}{2}, -2\right)$





## 1.3 การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร (5 ชั่วโมง)



### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

1. เขียนระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรแทนโจทย์ปัญหา
2. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบและความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้



### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

-



### สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

-



### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยเน้นให้นักเรียนฝึกวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของข้อมูลในโจทย์ปัญหา แล้วเขียนแทนความสัมพันธ์นั้นด้วยสมการ เพื่อนำมาสร้างเป็นระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ซึ่งจะนำไปสู่การแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

1. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยเชื่อมโยงกับกระบวนการแก้ปัญหาที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว คือ การวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา วางแผนและสร้างระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรแทนปัญหา แก้ระบบสมการหาคำตอบ และตรวจสอบคำตอบกับเงื่อนไข รวมถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบ นอกจากนี้ นักเรียนอาจเลือกใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา เช่น การวาดรูป การสร้างตาราง การสร้างผังความคิด มาช่วยในการทำความเข้าใจปัญหาและเขียนระบบสมการแทนความสัมพันธ์ได้
2. ครูควรชี้ให้นักเรียนเห็นว่า การแก้โจทย์ปัญหาบางปัญหาอาจใช้ความรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรก็ได้ โดยใช้ “ชวนคิด 1.2” ในหนังสือเรียน หน้า 31 ซึ่งการจะเลือกใช้ความรู้เรื่องใดในการแก้ปัญหาขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย เช่น ความซับซ้อนของเงื่อนไขในปัญหา ความยากง่ายของการแก้สมการหรือระบบสมการที่สร้างขึ้น รวมถึงความถนัดและประสบการณ์ในการแก้ปัญหาของนักเรียน
3. ครูอาจใช้ “ชวนคิด 1.3” ในหนังสือเรียน หน้า 36 เป็นตัวอย่างให้นักเรียนฝึกคิดแก้ปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีที่หลากหลาย และใช้ “ชวนคิด 1.4” ในหนังสือเรียน หน้า 38 ให้นักเรียนฝึกสร้างระบบสมการที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหา

## เฉลยชวนคิด



ipst.me/11418

### ชวนคิด 1.2

ตัวอย่างคำตอบ

- ❖ เห็นด้วยกับแนวคิดของข้าวปั้น เพราะใช้เพียงสมการเดียวในการหาคำตอบ ซึ่งง่ายกว่า
- ❖ เห็นด้วยกับแนวคิดของข้าวหอม เพราะกำหนดสมการที่ใช้ในการหาคำตอบได้ง่ายกว่า
- ❖ เห็นด้วยกับแนวคิดของทั้งข้าวปั้นและข้าวหอม เพราะสามารถหาคำตอบได้เหมือนกัน และความยากง่ายในการหาคำตอบของทั้งสองคนไม่ต่างกัน เนื่องจากโจทย์ไม่ได้ซับซ้อน

### แนวคิดของข้าวปั้น

ข้าวปั้นใช้ความรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในการแก้โจทย์ปัญหา “ครอบครัวหนึ่งมีลูกสาวสองคน พี่สาวและน้องสาวอายุรวมกันเท่ากับ 20 ปี ถ้าพี่สาวอายุมากกว่าน้องสาว 6 ปี แต่ละคนจะมีอายุเท่าไร” ได้ดังนี้

ให้  $m$  แทนอายุของน้องสาว

เนื่องจาก พี่สาวอายุมากกว่าน้องสาว 6 ปี

ดังนั้น พี่สาวอายุ  $m + 6$  ปี

เนื่องจาก พี่สาวและน้องสาวอายุรวมกันเท่ากับ 20 ปี

จะได้สมการเป็น  $(m + 6) + m = 20$

$$2m + 6 = 20$$

$$2m = 14$$

$$m = 7$$

ดังนั้น น้องสาวอายุ 7 ปี และพี่สาวอายุ  $7 + 6 = 13$  ปี

### แนวคิดของข้าวหอม

ข้าวหอมใช้ความรู้เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในการแก้โจทย์ปัญหา “ครอบครัวหนึ่งมีลูกสาวสองคน พี่สาวและน้องสาวอายุรวมกันเท่ากับ 20 ปี ถ้าพี่สาวอายุมากกว่าน้องสาว 6 ปี แต่ละคนจะมีอายุเท่าไร” ได้ดังนี้

ให้  $x$  และ  $y$  แทนอายุของพี่สาวและน้องสาวตามลำดับ

เนื่องจาก พี่สาวอายุมากกว่าน้องสาว 6 ปี

จะได้สมการเป็น  $x - y = 6$  \_\_\_\_\_ ①

เนื่องจาก พี่สาวและน้องสาวอายุรวมกันเท่ากับ 20 ปี

จะได้สมการเป็น  $x + y = 20$  \_\_\_\_\_ ②

$$① + ② ; \quad 2x = 26$$

$$x = 13$$

แทน  $x$  ด้วย 13 ในสมการ ② จะได้

$$13 + y = 20$$

$$y = 7$$

ดังนั้น น้องสาวอายุ 7 ปี และพี่สาวอายุ 13 ปี



ipst.me/11419

### ชวนคิด 1.3

**แนวคิด 1** ใช้ตารางแจกแจงกรณีในการหาคำตอบ โดยให้จำนวนยีราฟและนกกระจอกเทศรวมกันได้ 35 ตัวเสมอ แล้วพิจารณาจำนวนขาของสัตว์ทั้งสองว่ารวมกันได้ 90 ขา หรือไม่ ดังนี้

- ❖ ถ้าจำนวนขา รวมกันมากกว่า 90 ขา ให้ลดจำนวนยีราฟและเพิ่มจำนวนนกกระจอกเทศ
- ❖ ถ้าจำนวนขา รวมกันน้อยกว่า 90 ขา ให้เพิ่มจำนวนยีราฟและลดจำนวนนกกระจอกเทศ

| กรณีที่ | จำนวนตัว |             | รวม (ตัว) | จำนวนขา |             | รวม (ขา) | หมายเหตุ       |
|---------|----------|-------------|-----------|---------|-------------|----------|----------------|
|         | ยีราฟ    | นกกระจอกเทศ |           | ยีราฟ   | นกกระจอกเทศ |          |                |
| 1       | 15       | 20          | 35        | 60      | 40          | 100      | มากกว่า 90 ขา  |
| 2       | 12       | 23          | 35        | 48      | 46          | 94       | มากกว่า 90 ขา  |
| 3       | 9        | 26          | 35        | 36      | 52          | 88       | น้อยกว่า 90 ขา |
| 4       | 10       | 25          | 35        | 40      | 50          | 90       | 90 ขาพอดี      |

ดังนั้น มียีราฟ 10 ตัว และนกกระจอกเทศ 25 ตัว

**แนวคิด 2** ใช้ความรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ให้  $k$  แทนจำนวนยีราฟ จะได้จำนวนขาของยีราฟทั้งหมด  $4k$  ขา

เนื่องจาก มียีราฟและนกกระจอกเทศรวมกัน 35 ตัว

ดังนั้น มีนกกระจอกเทศ  $35 - k$  ตัว และมีจำนวนขาของนกกระจอกเทศทั้งหมด

$$2(35 - k) \text{ ขา}$$

เนื่องจาก นับจำนวนขาของยีราฟและนกกระจอกเทศรวมกันได้ 90 ขา

$$\text{จะได้สมการเป็น } 4k + 2(35 - k) = 90$$

$$4k + 70 - 2k = 90$$

$$2k = 20$$

$$k = 10$$

ดังนั้น มียีราฟ 10 ตัว และมีนกกระจอกเทศ  $35 - 10 = 25$  ตัว

**แนวคิด 3** ใช้ความรู้เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ให้  $x$  แทนจำนวนยี่ราฟ จะได้จำนวนขาของยี่ราฟทั้งหมด  $4x$  ขา

และ  $y$  แทนจำนวนนกกระจอกเทศ จะได้จำนวนขาของนกกระจอกเทศทั้งหมด  $2y$  ขา

เนื่องจาก มียี่ราฟและนกกระจอกเทศรวมกัน 35 ตัว

จะได้สมการเป็น  $x + y = 35$  ①

เนื่องจาก นับจำนวนขาของยี่ราฟและนกกระจอกเทศรวมกันได้ 90 ขา

จะได้สมการเป็น  $4x + 2y = 90$  ②

①  $\times 2$  ;  $2x + 2y = 70$  ③

②  $-$  ③ ;  $2x = 20$

$$x = 10$$

แทน  $x$  ด้วย 10 ในสมการ ① จะได้

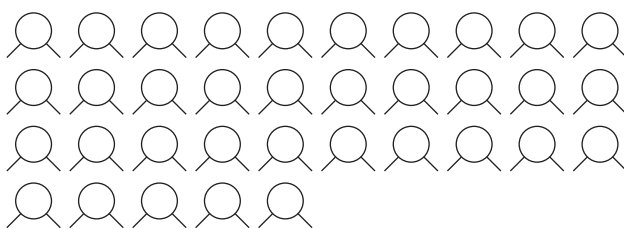
$$10 + y = 35$$

$$y = 25$$

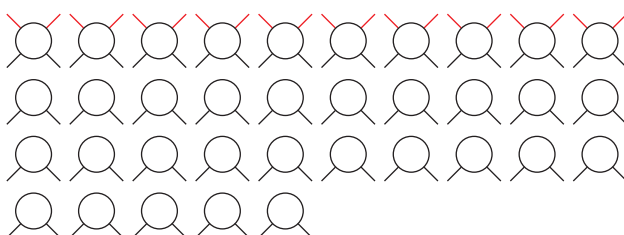
ดังนั้น มียี่ราฟ 10 ตัว และมีนกกระจอกเทศ 25 ตัว

**แนวคิด 4** ใช้รูปภาพ โดยให้  แทนยี่ราฟ 1 ตัว มีขา 4 ขา และ  แทนนกกระจอกเทศ 1 ตัว มีขา 2 ขา ดังนี้

1. วาด  จำนวน 35 รูป จะได้นกกระจอกเทศ 35 ตัว และได้จำนวนขาทั้งหมด 70 ขา



2. เพิ่มจำนวนขาสีแดงรูปละ 2 ขา จะได้เป็นยี่ราฟ โดยเพิ่มจำนวนขาจนครบ 90 ขา



จากรูป จะมียี่ราฟ 10 ตัว และมีนกกระจอกเทศ 25 ตัว



ipst.me/11420

### ชวนคิด 1.4

**แนวคิด 1** เนื่องจาก พนักงานขายมีรายได้แต่ละเดือนเป็นผลรวมของเงินเดือนกับเปอร์เซ็นต์จากยอดขายตลอดเดือนของตนเอง

ให้พนักงานขายคนนี้มีเงินเดือนเดือนละ  $x$  บาท

และ ได้เปอร์เซ็นต์จากยอดขายแต่ละเดือนอีก  $y\%$  ของยอดขายแต่ละเดือน

ดังนั้น พนักงานขายคนนี้มีรายได้แต่ละเดือนเท่ากับ  $x + \left(\frac{y}{100}\right)$  ของยอดขายแต่ละเดือน) บาท

เนื่องจาก เดือนแรกมีรายได้ 15,000 บาท จากยอดขายตลอดเดือน 156,000 บาท

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad x + \frac{y}{100}(156,000) = 15,000 \quad \text{_____} \text{ ①}$$

เนื่องจาก เดือนที่สองมีรายได้ 17,200 บาท จากยอดขายตลอดเดือน 200,000 บาท

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad x + \frac{y}{100}(200,000) = 17,200 \quad \text{_____} \text{ ②}$$

$$\begin{aligned} \text{②} - \text{①} ; \quad & 440y = 2,200 \\ & y = 5 \end{aligned}$$

แทน  $y$  ด้วย 5 ในสมการ ① จะได้

$$\begin{aligned} x + \frac{5}{100}(156,000) &= 15,000 \\ x &= 7,200 \end{aligned}$$

ดังนั้น พนักงานขายคนนี้มีเงินเดือนเดือนละ 7,200 บาท และได้เปอร์เซ็นต์จากยอดขายตลอดเดือนของตนเองอีกเดือนละ 5%

จะได้ สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรายได้แต่ละเดือนกับยอดขายตลอดเดือนของพนักงานขาย

$$\text{คนนี้คือ รายได้แต่ละเดือน} = 7,200 + \left(\frac{5}{100} \text{ ของยอดขายตลอดเดือน}\right)$$

ถ้าคาดว่ายอดขายตลอดเดือนนี้เป็น 250,500 บาท

$$\text{ในเดือนนี้เขาจะมีรายได้} \quad 7,200 + \frac{5}{100}(250,500) = 19,725 \text{ บาท}$$

**แนวคิด 2** ให้  $x$  แทนยอดขายตลอดเดือน

$y$  แทนรายได้แต่ละเดือน

$a$  แทนเปอร์เซ็นต์จากยอดขายตลอดเดือน

$b$  แทนเงินเดือนที่ได้รับ

จากสิ่งที่กำหนดให้ข้างต้น เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรายได้แต่ละเดือนกับยอดขายตลอดเดือนของพนักงานขายคนนี้ได้เป็น  $y = ax + b$

เนื่องจาก เดือนแรกมีรายได้ 15,000 บาท จากยอดขายตลอดเดือน 156,000 บาท

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 15,000 = 156,000a + b \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

เนื่องจาก เดือนที่สองมีรายได้ 17,200 บาท จากยอดขายตลอดเดือน 200,000 บาท

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 17,200 = 200,000a + b \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}; \quad 2,200 = 44,000a$$

$$a = 0.05$$

แทน a ด้วย 0.05 ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$15,000 = 156,000(0.05) + b$$

$$b = 7,200$$

แทน a ด้วย 0.05 และแทน b ด้วย 7,200 ในสมการ  $y = ax + b$

$$\text{จะได้} \quad y = 0.05x + 7,200$$

ดังนั้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรายได้แต่ละเดือนกับยอดขายตลอดเดือนของพนักงานขาย

$$\text{คนนั้นคือ} \quad y = 0.05x + 7,200$$

ถ้าคาดว่ายอดขายตลอดเดือนนี้เป็น 250,500 บาท

$$\text{แทน } x \text{ ด้วย } 250,500 \text{ ในสมการ } y = 0.05x + 7,200$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad y &= 0.05(250,500) + 7,200 \\ &= 19,725 \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าคาดว่ายอดขายตลอดเดือนนี้เป็น 250,500 บาท ในเดือนนี้เขาจะมีรายได้ 19,725 บาท

## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 1.3

**คำชี้แจง** เฉลยแบบฝึกหัดชุดนี้ไม่ได้แสดงการแก้ระบบสมการโดยละเอียดและไม่ได้แสดงการตรวจสอบคำตอบ แต่ครูควรย้ำให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบและความสมเหตุสมผลของคำตอบจากเงื่อนไขในโจทย์ทุกครั้ง

1. **แนวคิด** ให้  $x$  แทนจำนวนจำนวนหนึ่ง

$y$  แทนจำนวนอีกจำนวนหนึ่ง

ครึ่งหนึ่งของจำนวนหนึ่งเป็นสามเท่าของจำนวนอีกจำนวนหนึ่ง

จะได้สมการเป็น  $\frac{1}{2}(x) = 3y$  \_\_\_\_\_ ①

สี่เท่าของผลต่างของสองจำนวนนั้นเป็น 50

จะได้สมการเป็น 2 กรณี คือ ก.  $4(x - y) = 50$

หรือ ข.  $4(y - x) = 50$

**กรณี ก.** ให้  $4(x - y) = 50$  \_\_\_\_\_ ②

จากสมการ ①  $x = 6y$  \_\_\_\_\_ ③

แทน  $x$  ด้วย  $6y$  ในสมการ ② จะได้

$$4(6y - y) = 50$$

$$4(5y) = 50$$

$$y = \frac{5}{2}$$

แทน  $y$  ด้วย  $\frac{5}{2}$  ในสมการ ③ จะได้

$$x = 6\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$x = 15$$

**กรณี ข.** ให้  $4(y - x) = 50$  \_\_\_\_\_ ②

จากสมการ ①  $x = 6y$  \_\_\_\_\_ ③

แทน  $x$  ด้วย  $6y$  ในสมการ ② จะได้

$$4(y - 6y) = 50$$

$$4(-5y) = 50$$

$$y = -\frac{5}{2}$$

แทน  $y$  ด้วย  $-\frac{5}{2}$  ในสมการ ② จะได้

$$x = 6\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$x = -15$$

นั่นคือ จำนวนสองจำนวนนั้นเป็น 15 และ  $\frac{5}{2}$  หรือ -15 และ  $-\frac{5}{2}$

## 2. แนวคิด

ให้  $x$  แทนเลขโดดในหลักสิบ

$y$  แทนเลขโดดในหลักหน่วย

เลขโดดในหลักสิบมากกว่าเลขโดดในหลักหน่วยอยู่ 4

จะได้สมการเป็น  $x - y = 4$  \_\_\_\_\_ ①

จำนวนที่มีสองหลักที่กล่าวถึงคือ  $10x + y$

เมื่อสลับที่เลขโดดทั้งสองจะได้จำนวนใหม่เป็น  $10y + x$

ผลบวกของจำนวนนี้กับจำนวนที่ได้จากการสลับที่เลขโดดเป็น 154

จะได้สมการเป็น  $(10x + y) + (10y + x) = 154$

$$11x + 11y = 154$$

$$x + y = 14$$
 \_\_\_\_\_ ②

① + ② ;

$$2x = 18$$

$$x = 9$$

แทน  $x$  ด้วย 9 ในสมการ ② จะได้

$$9 + y = 14$$

$$y = 5$$

ดังนั้น จำนวนนั้น คือ 95

## 3. แนวคิด

ให้  $x$  แทนขนาดของมุมภายในมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม

$y$  แทนขนาดของมุมภายในอีกมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมที่เล็กกว่า

ผลบวกของขนาดของมุมภายในสองมุมของรูปสามเหลี่ยมเป็น 137 องศา

จะได้สมการเป็น  $x + y = 137$  \_\_\_\_\_ ①

และผลต่างของขนาดของมุมสองมุมนี้เป็น 73 องศา

จะได้สมการเป็น  $x - y = 73$  \_\_\_\_\_ ②

① + ② ;

$$2x = 210$$

$$x = 105$$

แทน  $x$  ด้วย 105 ในสมการ ① จะได้

$$105 + y = 137$$

$$y = 32$$

ดังนั้น มุมภายในที่เหลืออีกหนึ่งมุมมีขนาด  $180 - (105 + 32) = 43$  องศา



4. **แนวคิด** ให้  $x$  แทนจำนวนเหรียญชนิดสิบบาท คิดเป็นเงิน  $10x$  บาท  
 $y$  แทนจำนวนเหรียญชนิดหนึ่งบาท คิดเป็นเงิน  $y$  บาท  
 ตีกระสมเหรียญชนิดสิบบาทและหนึ่งบาท รวมกันได้ 200 เหรียญ  
 จะได้สมการเป็น  $x + y = 200$  \_\_\_\_\_ ①  
 เหรียญชนิดสิบบาท และหนึ่งบาท คิดเป็นเงินรวมกัน 920 บาท  
 จะได้สมการเป็น  $10x + y = 920$  \_\_\_\_\_ ②  
 ② - ① ;  $9x = 720$   
 $x = 80$   
 แทน  $x$  ด้วย 80 ในสมการ ① จะได้  
 $80 + y = 200$   
 $y = 120$   
 ดังนั้น ตีก็มีเหรียญชนิดสิบบาท 80 เหรียญ และมีเหรียญชนิดหนึ่งบาท 120 เหรียญ

5. **แนวคิด** ให้  $x$  แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  
 $y$  แทนความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  
 ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวกว่าด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าอยู่ 4 เซนติเมตร  
 จะได้สมการเป็น  $x - y = 4$  \_\_\_\_\_ ①  
 ความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมากกว่าความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  
 อยู่ 24 เซนติเมตร  
 จะได้สมการเป็น  $4x - 3y = 24$  \_\_\_\_\_ ②  
 จากสมการ ①  $x = 4 + y$  \_\_\_\_\_ ③  
 แทน  $x$  ด้วย  $4 + y$  ในสมการ ② จะได้  
 $4(4 + y) - 3y = 24$   
 $16 + 4y - 3y = 24$   
 $y = 8$   
 แทน  $y$  ด้วย 8 ในสมการ ③ จะได้  
 $x = 4 + 8$   
 $x = 12$

ดังนั้น ความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น  $4(12) = 48$  เซนติเมตร

และความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็น  $3y = 3(8) = 24$  เซนติเมตร

นั่นคือ ด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว 12 เซนติเมตร และด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ายาว 8 เซนติเมตร

6. แนวคิด ให้  $x$  แทนจำนวนนกกระจาบทั้งหมด

$y$  แทนจำนวนดอกบัวทั้งหมด

ถ้านกจับดอกบัวดอกละ 1 ตัว จะต้องมีนกที่จับดอกบัวอยู่  $y$  ตัว

แต่โจทย์กำหนดว่า เหลือนก 1 ตัว ที่ไม่มีดอกบัวให้จับ

จะได้สมการเป็น  $x - y = 1$  \_\_\_\_\_ ①

ถ้านกจับดอกบัวดอกละ 2 ตัว จะมีดอกบัวที่นกจับอยู่  $\frac{x}{2}$  ดอก

แต่โจทย์กำหนดว่า เหลือดอกบัว 1 ดอก ที่ไม่มีนกจับ

จะได้สมการเป็น  $y - \frac{x}{2} = 1$  \_\_\_\_\_ ②

②  $\times 2$  ;  $2y - x = 2$  \_\_\_\_\_ ③

① + ③ ;  $y = 3$

แทน  $y$  ด้วย 3 ในสมการ ① จะได้

$$x - 3 = 1$$

$$x = 4$$

ดังนั้น ในสระนี้มีดอกบัว 3 ดอก และนกกระจาบ 4 ตัว

7. แนวคิด ให้  $x$  แทนเงินที่หนูนิดออมไว้ได้

$y$  แทนเงินที่หนูนานออมไว้ได้

$\frac{2}{3}$  ของเงินที่หนูนานออมได้มากกว่าครึ่งหนึ่งของเงินที่หนูนิดออมได้อยู่ 10 บาท

จะได้สมการเป็น  $\frac{2}{3}y - \frac{1}{2}x = 10$  \_\_\_\_\_ ①

หนูนิดนำเงินรางวัล 1,000 บาท มารวมกับเงินที่ออมไว้ ทำให้เธอมีเงินเป็นสามเท่าของเงินของหนูนาน

จะได้สมการเป็น  $x + 1,000 = 3y$  \_\_\_\_\_ ②

①  $\times 6$  ;  $4y - 3x = 60$  \_\_\_\_\_ ③

จากสมการ ② ;  $x - 3y = -1,000$  \_\_\_\_\_ ④

④  $\times 3$  ;  $3x - 9y = -3,000$  \_\_\_\_\_ ⑤

③ + ⑤ ;  $-5y = -2,940$

$$y = 588$$

แทน  $y$  ด้วย 588 ในสมการ ② จะได้

$$x + 1,000 = 3(588)$$

$$x = 764$$

นั่นคือ หนูนิดออมเงินได้ 764 บาท และหนูนานออมเงินได้ 588 บาท

8. แนวคิด ให้  $x$  แทนเงินที่วิมลนำไปฝากธนาคาร

$y$  แทนเงินที่วิมลนำไปลงทุนเพื่อรับเงินปันผล

วิมลมีเงินเก็บอยู่ 120,000 บาท

จะได้สมการเป็น  $x + y = 120,000$  \_\_\_\_\_ ①

ส่วนที่ฝากธนาคารได้รับดอกเบี้ย 2% และส่วนที่ลงทุนได้รับเงินปันผล 4%

สิ้นปีมีรายได้รวมกัน 4,000 บาท

จะได้สมการเป็น  $\frac{2}{100}x + \frac{4}{100}y = 4,000$

หรือ  $x + 2y = 200,000$  \_\_\_\_\_ ②

② - ① ;  $y = 80,000$

แทน  $y$  ด้วย 80,000 ในสมการ ① จะได้

$$x + 80,000 = 120,000$$

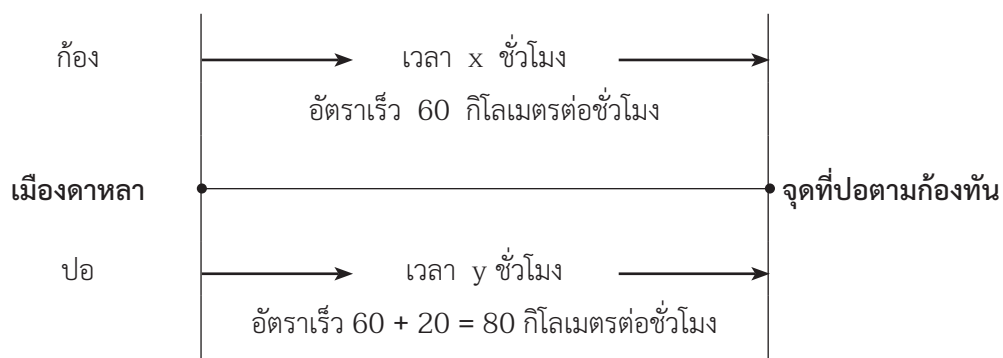
$$x = 40,000$$

ดังนั้น วิมลนำเงินไปฝากธนาคาร 40,000 บาท และนำเงินไปลงทุนเพื่อรับเงินปันผล 80,000 บาท

9. แนวคิด ให้ก้องขับรถยนต์จากเมืองดาลาไปถึงจุดที่ปอตามก้องทันใช้เวลา  $x$  ชั่วโมง

และปอขับรถยนต์จากเมืองดาลาไปถึงจุดที่ปอตามก้องทันใช้เวลา  $y$  ชั่วโมง

เขียนแผนภาพประกอบแสดงรายละเอียดของโจทย์ปัญหาได้ดังนี้



ใช้ความสัมพันธ์ ระยะทาง = อัตราเร็ว  $\times$  เวลา และสร้างตารางวิเคราะห์โจทย์ดังนี้

| สถานการณ์ | เวลา (ชั่วโมง) | อัตราเร็ว (กิโลเมตรต่อชั่วโมง) | ระยะทาง (กิโลเมตร) |
|-----------|----------------|--------------------------------|--------------------|
| ก้องขับรถ | $x$            | 60                             | $60x$              |
| ปอขับรถ   | $y$            | 80                             | $80y$              |

เนื่องจาก ก้องใช้เวลาในการเดินทางมากกว่าปอ 1 ชั่วโมง

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad x - y = 1 \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

และเนื่องจาก ระยะทางที่ทั้งสองคนขับรถยนต์ได้เท่ากัน

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 60x = 80y \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{จากสมการ } \textcircled{2}; \quad 60x - 80y = 0 \quad \text{_____} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \times 60; \quad 60x - 60y = 60 \quad \text{_____} \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{3}; \quad 20y = 60$$

$$y = 3$$

แทน  $y$  ด้วย 3 ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$x - 3 = 1$$

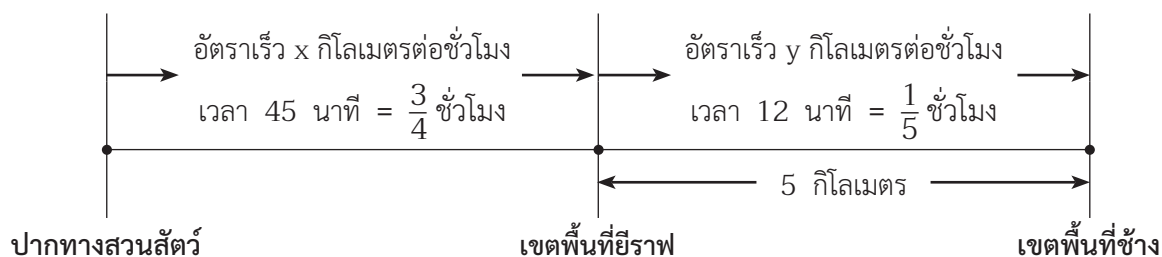
$$x = 4$$

นั่นคือ ก้องขับรถ 4 ชั่วโมง และปอขับรถ 3 ชั่วโมง

เนื่องจาก ปอเริ่มขับรถเมื่อเวลา 09:30 น.

ดังนั้น ปอจะขับรถทันก้องเมื่อเวลา 12:30 น.

10. แนวคิด ให้สมนึกขับรถจากปากทางสวนสัตว์ไปเขตพื้นที่ฮิราฟด้วยอัตราเร็ว  $x$  กิโลเมตรต่อชั่วโมง และสมนึกขับรถจากเขตพื้นที่ฮิราฟไปเขตพื้นที่ช้างด้วยอัตราเร็ว  $y$  กิโลเมตรต่อชั่วโมง เขียนแผนภาพประกอบแสดงรายละเอียดของโจทย์ปัญหาได้ดังนี้



ใช้ความสัมพันธ์ ระยะทาง = อัตราเร็ว × เวลา และสร้างตารางวิเคราะห์โจทย์ได้ดังนี้

| สถานการณ์                                     | เวลา<br>(ชั่วโมง) | อัตราเร็ว<br>(กิโลเมตรต่อชั่วโมง) | ระยะทาง<br>(กิโลเมตร) |
|-----------------------------------------------|-------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| สมนึกขับรถจากปากทางสวนสัตว์ไปเขตพื้นที่ยี่ราฟ | $\frac{3}{4}$     | x                                 | $\frac{3}{4}x$        |
| สมนึกขับรถจากเขตพื้นที่ยี่ราฟไปเขตพื้นที่ช้าง | $\frac{1}{5}$     | y                                 | $\frac{1}{5}y$        |

เนื่องจาก สมนึกขับรถจากเขตพื้นที่ยี่ราฟไปเขตพื้นที่ช้างโดยใช้อัตราเร็วลดลง 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง  
จะได้สมการเป็น  $x - y = 10$  \_\_\_\_\_ ①

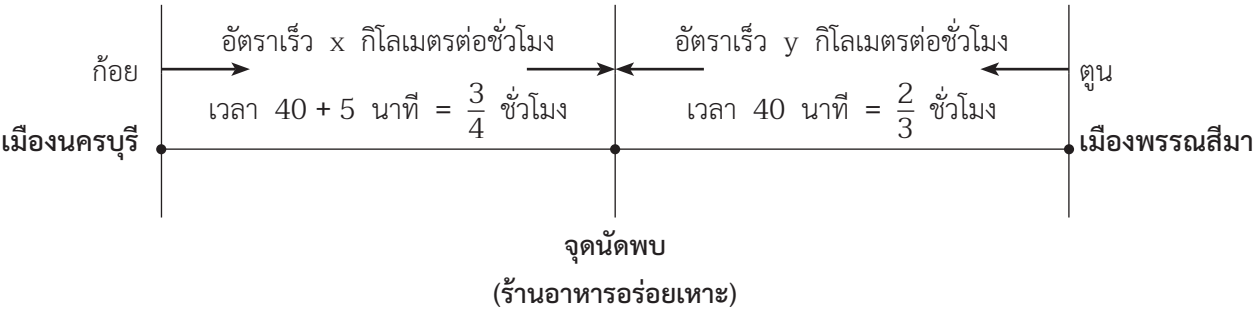
และเนื่องจาก เขตพื้นที่ช้างอยู่ไกลกว่าเขตพื้นที่ยี่ราฟ 5 กิโลเมตร  
จะได้สมการเป็น  $\frac{1}{5}y = 5$  \_\_\_\_\_ ②  
จากสมการ ② ;  $y = 25$

แทน y ด้วย 25 ในสมการ ① จะได้  
 $x - 25 = 10$   
 $x = 35$

- ดังนั้น 1) สมนึกขับรถจากปากทางสวนสัตว์ไปเขตพื้นที่ยี่ราฟด้วยอัตราเร็ว 35 กิโลเมตรต่อชั่วโมง  
2) เนื่องจาก สมนึกขับรถจากปากทางสวนสัตว์ไปเขตพื้นที่ยี่ราฟโดยใช้เวลา 45 นาที  
จะได้ ระยะทางระหว่างปากทางสวนสัตว์กับเขตพื้นที่ยี่ราฟเป็น

$\frac{45}{60}(35) = 26.25$  กิโลเมตร

11. แนวคิด ให้ก้อยขับรถยนต์ด้วยอัตราเร็ว x กิโลเมตรต่อชั่วโมง  
และตูนขับรถยนต์ด้วยอัตราเร็ว y กิโลเมตรต่อชั่วโมง  
เขียนแผนภาพประกอบแสดงรายละเอียดของโจทย์ปัญหาได้ดังนี้



ใช้ความสัมพันธ์ ระยะทาง = อัตราเร็ว  $\times$  เวลา และสร้างตารางวิเคราะห์โจทย์ได้ดังนี้

| สถานการณ์     | เวลา (ชั่วโมง) | อัตราเร็ว (กิโลเมตรต่อชั่วโมง) | ระยะทาง (กิโลเมตร) |
|---------------|----------------|--------------------------------|--------------------|
| ก้อยขับรถยนต์ | $\frac{3}{4}$  | $x$                            | $\frac{3}{4}x$     |
| ตูนขับรถยนต์  | $\frac{2}{3}$  | $y$                            | $\frac{2}{3}y$     |

เนื่องจาก ตูนขับรถยนต์ด้วยอัตราเร็วกว่าก้อย 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะได้สมการเป็น  $y - x = 10$  \_\_\_\_\_ ①

เนื่องจาก ร้านอาหาร “อร่อยเหาะ” อยู่กึ่งกลางของระยะทางระหว่างเมืองนครบุรี  
และเมืองพรรณสีมา แสดงว่าระยะทางที่แต่ละคนขับรถเท่ากัน

จะได้สมการเป็น  $\frac{3}{4}x = \frac{2}{3}y$  \_\_\_\_\_ ②

จากสมการ ① ;  $y = x + 10$  \_\_\_\_\_ ③

แทน  $y$  ด้วย  $x + 10$  ในสมการ ② จะได้

$$\frac{3}{4}x = \frac{2}{3}(x + 10) \quad \text{_____ ④}$$

$$\text{④} \times 12 ; \quad 9x = 8x + 80$$

$$x = 80$$

แทน  $x$  ด้วย 80 ในสมการ ③ จะได้

$$y = 80 + 10$$

$$y = 90$$

ดังนั้น 1) อัตราเร็วของรถยนต์ของก้อยและตูน คือ 80 และ 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ตามลำดับ

2) ระยะทางระหว่างเมืองนครบุรีและเมืองพรรณสีมาเท่ากับ  $60 + 60 = 120$  กิโลเมตร

12. แนวคิด ให้ ใช้เครื่องดื่มที่มีชาวม 80% จำนวน  $x$  ลิตร ผสมกับเครื่องดื่มที่มีชาวม 50% จำนวน  $y$  ลิตร  
ต้องการเครื่องดื่มผสมเป็นสูตรพิเศษประจำสัปดาห์ 5 ลิตร

จะได้สมการเป็น  $x + y = 5$  \_\_\_\_\_ ①

เครื่องดื่มที่มีชาวม 80% จำนวน  $x$  ลิตร จะมีชาวมอยู่  $\frac{80}{100}x = 0.8x$  ลิตร

เครื่องดื่มที่มีชาวม 50% จำนวน  $y$  ลิตร จะมีชาวมอยู่  $\frac{50}{100}y = 0.5y$  ลิตร

จะได้ เครื่องดื่มผสมที่มีชาวมทั้งหมด  $0.8x + 0.5y$  ลิตร

ต้องการเครื่องดื่มผสมจำนวน 5 ลิตร ที่มีชาวม 60% จะมีชาวม  $\frac{60}{100} \times 5 = 3$  ลิตร

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 0.8x + 0.5y = 3 \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \times 10; \quad 8x + 5y = 30 \quad \text{_____} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \times 5; \quad 5x + 5y = 25 \quad \text{_____} \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4}; \quad 3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

แทน  $x$  ด้วย  $\frac{5}{3}$  ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$\frac{5}{3} + y = 5$$

$$y = \frac{10}{3}$$

ดังนั้น กรกัณฑ์ต้องใช้เครื่องดื่มที่มีชาวม 80% ผสมกับเครื่องดื่มที่มีชาวม 50% จำนวน  $\frac{5}{3}$  ลิตร และ  $\frac{10}{3}$  ลิตร ตามลำดับ

13. **แนวคิด 1** ให้ชาวบ้านซื้ออาหารนกสำเร็จรูป  $x$  กิโลกรัม ราคา กิโลกรัมละ 50 บาท คิดเป็นเงิน  $50x$  บาท และซื้อเมล็ดทานตะวัน  $y$  กิโลกรัม ราคา กิโลกรัมละ 65 บาท คิดเป็นเงิน  $65y$  บาท ดังนั้น อาหารนกสูตรใหม่  $x + y$  กิโลกรัม คิดเป็นต้นทุน  $50x + 65y$  บาท ขายอาหารนกสูตรใหม่  $x + y$  กิโลกรัม ในราคา กิโลกรัมละ 70 บาท ได้เงิน  $70(x + y)$  บาท จะได้กำไร  $70(x + y) - (50x + 65y)$  บาท

แต่ได้กำไร 10% คิดเป็นเงิน  $\frac{10}{100} (50x + 65y)$  บาท

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 70(x + y) - (50x + 65y) = \frac{10}{100} (50x + 65y)$$

$$70x + 70y - 50x - 65y = 5x + 6.5y$$

$$15x = 1.5y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{10}$$

**แนวคิด 2** ให้ข้าวปั้นซื้ออาหารนกสำเร็จรูป  $x$  กิโลกรัม ราคา กิโลกรัมละ 50 บาท คิดเป็นเงิน  $50x$  บาท และซื้อเมล็ดทานตะวัน  $y$  กิโลกรัม ราคา กิโลกรัมละ 65 บาท คิดเป็นเงิน  $65y$  บาท  
 ดังนั้น อาหารนกสูตรใหม่  $x + y$  กิโลกรัม คิดเป็นต้นทุน  $50x + 65y$  บาท  
 ขายอาหารนกสูตรใหม่ กิโลกรัมละ 70 บาท จำนวน  $x + y$  กิโลกรัม ได้เงิน  $70(x + y)$  บาท  
 ดังนั้น อัตราส่วนของราคาขายต่อต้นทุนเป็น  $70(x + y) : 50x + 65y$   
 ต้องการกำไร 10% หมายความว่า ขายได้เงิน 110 บาท จากต้นทุน 100 บาท  
 ดังนั้น อัตราส่วนของราคาขายต่อต้นทุนเป็น  $110 : 100$   
 เขียนสัดส่วนได้ดังนี้

$$\frac{70(x + y)}{50x + 65y} = \frac{110}{100}$$

$$100[70(x + y)] = 110(50x + 65y)$$

$$7,000x + 7,000y = 5,500x + 7,150y$$

$$1,500x = 150y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{10}$$

ดังนั้น อัตราส่วนของอาหารนกสำเร็จรูปต่อเมล็ดทานตะวันเป็น  $1 : 10$  โดยน้ำหนัก

**14. แนวคิด** ให้  $x$  แทนจำนวนถุงของขนมชนิดที่หนึ่งที่ซื้อมา

$y$  แทนจำนวนถุงของขนมชนิดที่สองที่ซื้อมา

ฐานการจัดขนมทั้งสองชนิดนี้แบ่งใส่ถุงในอัตราส่วนโดยน้ำหนัก  $1 : 4$

เนื่องจาก ขนมที่ซื้อมาและขนมที่ขายไปหนักเท่ากันทุกถุง

แสดงว่า ซื้อมา  $x + y$  ถุง ต้องมีขนมวางขาย  $x + y$  ถุง

แต่ละถุงจะมีขนมสองชนิดในอัตราส่วนโดยน้ำหนัก  $1 : 4$

แสดงว่า  $x : y = 1 : 4$  หรือ  $y : x = 1 : 4$

**กรณีที่ 1**  $x : y = 1 : 4$

จะได้สมการเป็น

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$$

$$4x = y \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

ขนมชนิดที่หนึ่งราคาถุงละ 30 บาท ขนมชนิดที่สองราคาถุงละ 20 บาท

ฐานการจัดขนมสองชนิดแบ่งใส่ถุงขายราคาถุงละ 40 บาท เมื่อขายหมดได้กำไร 360 บาท

จะได้สมการเป็น  $40(x + y) - (30x + 20y) = 360$  \_\_\_\_\_  $\textcircled{2}$

หรือ  $40x + 40y - 30x - 20y = 360$

$$10x + 20y = 360 \quad \text{_____} \quad \textcircled{3}$$



แทน  $y$  ด้วย  $4x$  ในสมการ ③ จะได้

$$10x + 20(4x) = 360$$

$$90x = 360$$

$$x = 4$$

แทน  $x$  ด้วย 4 ในสมการ ① จะได้

$$4(4) = y$$

$$y = 16$$

กรณีที่ 2  $y : x = 1 : 4$

จะได้สมการเป็น

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{4}$$

$$x = 4y \quad \text{_____} \quad \text{①}$$

ขนมชนิดที่หนึ่งราคาถุงละ 30 บาท ขนมชนิดที่สองราคาถุงละ 20 บาท

ถ้าผู้จัดขนมสองชนิดแบ่งใส่ถุงขายราคาถุงละ 40 บาท เมื่อขายหมดได้กำไร 360 บาท

จะได้สมการเป็น  $40(x + y) - (30x + 20y) = 360$  \_\_\_\_\_ ②

หรือ  $40x + 40y - 30x - 20y = 360$

$$10x + 20y = 360 \quad \text{_____} \quad \text{③}$$

แทน  $x$  ด้วย  $4y$  ในสมการ ③ จะได้

$$10(4y) + 20y = 360$$

$$60y = 360$$

$$y = 6$$

แทน  $y$  ด้วย 6 ในสมการ ① จะได้

$$x = 4(6)$$

$$x = 24$$

ดังนั้น ถ้าผู้ซื้อขนมชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองมาอย่างละ 4 และ 16 ถุง ตามลำดับ หรือ 24 และ 6 ถุง ตามลำดับ

## กิจกรรมท้ายบท : ระบบสมการสร้างรูปตามจินตนาการ

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่เน้นให้นักเรียนฝึกแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร โดยการหาคำตอบของระบบสมการ แล้วสร้างจุดให้สอดคล้องกับพิกัดที่เป็นคำตอบของระบบสมการที่กำหนด ครูอาจให้นักเรียนทำกิจกรรมนี้นอกเวลาเรียน โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

1. กระดาษกราฟ 1 แผ่น
2. ชุดโจทย์ระบบสมการ (ชุดละ 6 ระบบสมการ)



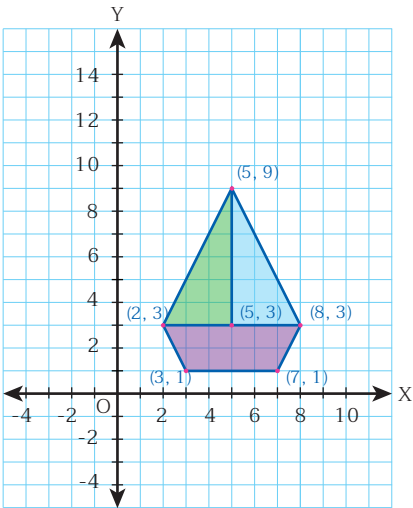
### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแจกกระดาษกราฟ แล้วให้นักเรียนทำกิจกรรมท้ายบทตามขั้นตอนในหนังสือเรียน หน้า 43 ทั้งนี้ครูอาจให้นักเรียนดาวน์โหลดชุดของโจทย์ระบบสมการเพิ่มเติมจาก QR Code ในหนังสือเรียน หน้า 43
2. ครูให้นักเรียนเปรียบเทียบพิกัดที่เป็นคำตอบของระบบสมการที่ได้กับเพื่อนที่ทำโจทย์ชุดเดียวกัน เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

เฉลยกิจกรรมท้ายบท : ระบบสมการสร้างรูปตามจินตนาการ

| โจทย์ระบบสมการ |                                  | คำตอบของระบบสมการ |
|----------------|----------------------------------|-------------------|
| ระบบสมการที่ 1 | $2x + y = 7$<br>$-2x + y = -1$   | ( 2, 3 )          |
| ระบบสมการที่ 2 | $2x + y = 19$<br>$-2x + y = -1$  | ( 5, 9 )          |
| ระบบสมการที่ 3 | $-2x + y = -13$<br>$2x + y = 19$ | ( 8, 3 )          |
| ระบบสมการที่ 4 | $2x + y = 15$<br>$y = 1$         | ( 7, 1 )          |
| ระบบสมการที่ 5 | $2x + y = 7$<br>$y = 1$          | ( 3, 1 )          |
| ระบบสมการที่ 6 | $x = 5$<br>$y = 3$               | ( 5, 3 )          |

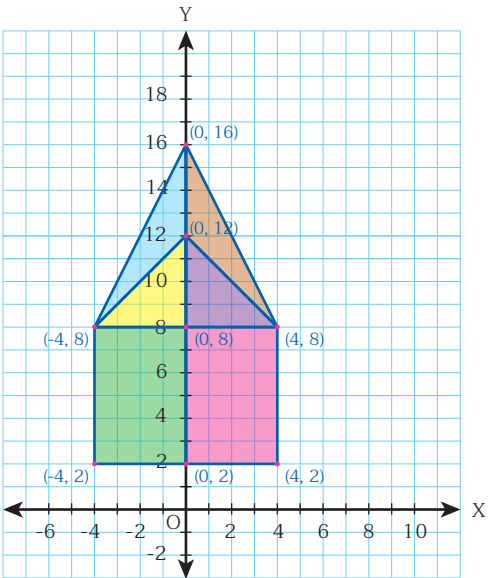
เรือใบแฟนซี



ชุดของโจทย์ระบบสมการสร้างรูปตามจินตนาการเพิ่มเติมจาก QR Code

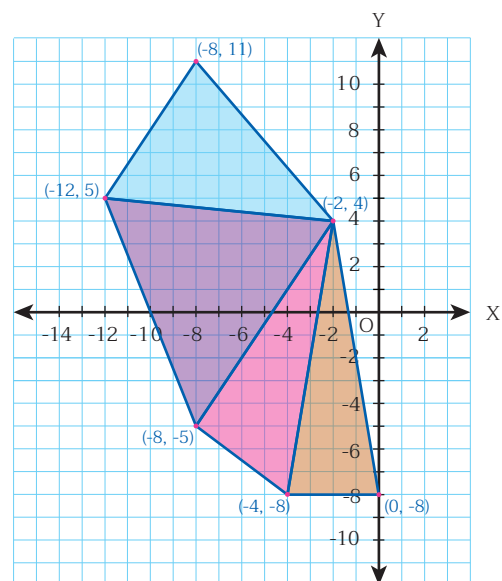
| โจทย์ระบบสมการ ชุดที่ 1 | คำตอบของระบบสมการ                        |           |
|-------------------------|------------------------------------------|-----------|
| ระบบสมการที่ 1          | $y = 2$<br>$x = -4$                      | ( -4, 2 ) |
| ระบบสมการที่ 2          | $-3x - 4y = -20$<br>$y = 2$              | ( 4, 2 )  |
| ระบบสมการที่ 3          | $-x + y = 12$<br>$-2x + y = 16$          | ( -4, 8 ) |
| ระบบสมการที่ 4          | $2x + y = 16$<br>$x + y = 12$            | ( 4, 8 )  |
| ระบบสมการที่ 5          | $x + y = 12$<br>$-x + y = 12$            | ( 0, 12 ) |
| ระบบสมการที่ 6          | $y = \frac{3}{4}x + 16$<br>$2x + y = 16$ | ( 0, 16 ) |

บ้านหน้าจั่ว



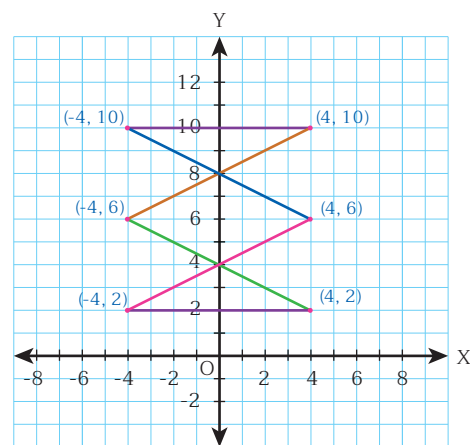
| โจทย์ระบบสมการ ชุดที่ 2                               | คำตอบของระบบสมการ |
|-------------------------------------------------------|-------------------|
| ระบบสมการที่ 1<br>$3x + 4y = -44$<br>$3x - 4y = -4$   | $(-8, -5)$        |
| ระบบสมการที่ 2<br>$-2x - 8y = -16$<br>$x = -12$       | $(-12, 5)$        |
| ระบบสมการที่ 3<br>$3x + 4y = -44$<br>$-2x + 3y = -16$ | $(-4, -8)$        |
| ระบบสมการที่ 4<br>$x = -2$<br>$-2x + y = 8$           | $(-2, 4)$         |
| ระบบสมการที่ 5<br>$-y + x = 8$<br>$-4x = 16 + 2y$     | $(0, -8)$         |
| ระบบสมการที่ 6<br>$2x + 2y = 6$<br>$x + 4y = 36$      | $(-8, 11)$        |

## ปีกผีเสื้อหลากหลาย



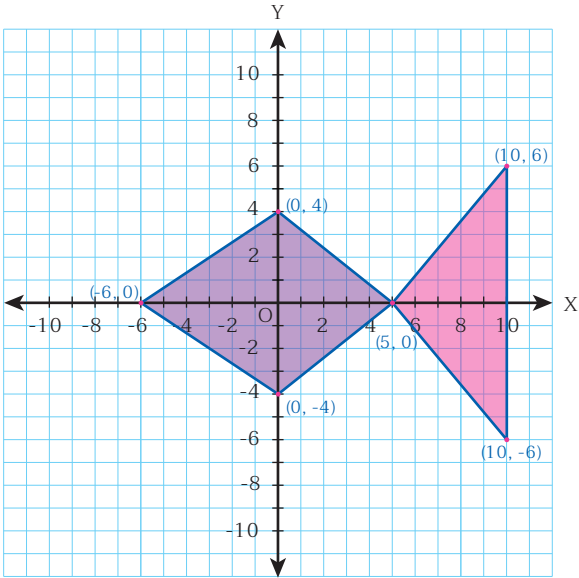
| โจทย์ระบบสมการ ชุดที่ 3                                    | คำตอบของระบบสมการ |
|------------------------------------------------------------|-------------------|
| ระบบสมการที่ 1<br>$y = x + 14$<br>$\frac{3}{4}x + y = 7$   | $(-4, 10)$        |
| ระบบสมการที่ 2<br>$y - 6x - 30 = 0$<br>$2y + 3x = 0$       | $(-4, 6)$         |
| ระบบสมการที่ 3<br>$-3x + 2y = 0$<br>$y = 6$                | $(4, 6)$          |
| ระบบสมการที่ 4<br>$2x + y = 18$<br>$-\frac{3}{2}x + y = 4$ | $(4, 10)$         |
| ระบบสมการที่ 5<br>$2y = x + 8$<br>$4y = -2x$               | $(-4, 2)$         |
| ระบบสมการที่ 6<br>$x + 2y = 8$<br>$2y - x = 0$             | $(4, 2)$          |

## สปริง...สปริง



| โจทย์ระบบสมการ ชุดที่ 4 |                                                   | คำตอบของระบบสมการ |
|-------------------------|---------------------------------------------------|-------------------|
| ระบบสมการที่ 1          | $y + \frac{2}{3}x = -4$<br>$y - \frac{2}{3}x = 4$ | ( -6, 0 )         |
| ระบบสมการที่ 2          | $4x + 5y = 20$<br>$2x + 3y = 12$                  | ( 0, 4 )          |
| ระบบสมการที่ 3          | $y - 0.8x = -4$<br>$2x + 3y = -12$                | ( 0, -4 )         |
| ระบบสมการที่ 4          | $1.2x + y - 6 = 0$<br>$-4x + 5y + 20 = 0$         | ( 5, 0 )          |
| ระบบสมการที่ 5          | $5y = 6x - 30$<br>$y = 2x - 14$                   | ( 10, 6 )         |
| ระบบสมการที่ 6          | $y + 1.2x = 6$<br>$y + 0.2x = -4$                 | ( 10, -6 )        |

ป.ปลา



## เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

1.

| ระบบสมการ                                | มีคำตอบเดียว  | มีคำตอบมากมาย<br>ไม่จำกัด | ไม่มีคำตอบ |
|------------------------------------------|---------------|---------------------------|------------|
| 1) $3x - y = 3$<br>$2x + y = 2$          | ✓<br>(1, 0)   |                           |            |
| 2) $2y + 4x = 8$<br>$2x = 10 - y$        |               |                           | ✓          |
| 3) $3x + y = 4$<br>$-5x - 3y = 12$       | ✓<br>(6, -14) |                           |            |
| 4) $5y - 3x - 6 = 0$<br>$-6x = 12 - 10y$ |               | ✓                         |            |

1) แนวคิด

$3x - y = 3$

\_\_\_\_\_ ①

$2x + y = 2$

\_\_\_\_\_ ②

① + ② ;

$5x = 5$

$x = 1$

แทน x ด้วย 1 ในสมการ ① จะได้

$3(1) - y = 3$

$y = 0$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ (1, 0)

2) แนวคิด

$2y + 4x = 8$

\_\_\_\_\_ ①

$2x = 10 - y$

\_\_\_\_\_ ②

② × 2 ;

$4x = 20 - 2y$

\_\_\_\_\_ ③

① - ③ ;

$2y = -12 + 2y$

$0 = -12$

ซึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

3) แนวคิด

$$3x + y = 4 \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

$$-5x - 3y = 12 \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 3 ; \quad 9x + 3y = 12 \quad \text{_____} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} ; \quad 4x = 24$$

$$x = 6$$

แทน  $x$  ด้วย 6 ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$3(6) + y = 4$$

$$18 + y = 4$$

$$y = -14$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(6, -14)$ 

4) แนวคิด

$$5y - 3x - 6 = 0 \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

$$-6x = 12 - 10y \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 2 ; \quad 10y - 6x - 12 = 0 \quad \text{_____} \quad \textcircled{3}$$

$$\text{จากสมการ } \textcircled{2} ; \quad 10y - 6x - 12 = 0 \quad \text{_____} \quad \textcircled{4}$$

จะเห็นว่าสมการ  $\textcircled{3}$  ที่ได้จากสมการ  $\textcircled{1}$  เป็นสมการเดียวกันกับสมการ  $\textcircled{4}$  ที่ได้จากสมการ  $\textcircled{2}$   
แสดงว่าสมการ  $\textcircled{1}$  และ สมการ  $\textcircled{2}$  มีคำตอบเหมือนกัน และมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

2. แนวคิด ถ้า  $(3, -1)$  เป็นคำตอบของระบบสมการ

$$\text{จาก} \quad ax + by = 5 \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

$$-bx + ay = -15 \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

แทน  $x$  และ  $y$  ด้วย 3 และ -1 ตามลำดับ ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$3a - b = 5 \quad \text{_____} \quad \textcircled{3}$$

แทน  $x$  และ  $y$  ด้วย 3 และ -1 ตามลำดับ ในสมการ  $\textcircled{2}$  จะได้

$$-3b - a = -15 \quad \text{_____} \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \times 3 ; \quad -9b - 3a = -45 \quad \text{_____} \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{5} ; \quad -10b = -40$$

$$b = 4$$

แทน  $b$  ด้วย 4 ในสมการ  $\textcircled{3}$  จะได้

$$3a - 4 = 5$$

$$3a = 9$$

$$a = 3$$

นั่นคือ  $a = 3$  และ  $b = 4$ ดังนั้น  $a + b = 3 + 4 = 7$

**คำชี้แจง** เฉลยแบบฝึกหัดชุดนี้ไม่ได้แสดงการแก้ระบบสมการโดยละเอียดและไม่ได้แสดงการตรวจสอบคำตอบ แต่ครูควรย้าให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบและความสมเหตุสมผลของคำตอบจากเงื่อนไขในโจทย์ทุกครั้ง

3. **แนวคิด** ให้  $x$  แทนจำนวนที่มีค่ามาก

$y$  แทนจำนวนที่มีค่าน้อย

ผลต่างของจำนวนสองจำนวนเป็น 70

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad x - y = 70 \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

สองเท่าของจำนวนที่มีค่ามากเป็นสี่เท่าของจำนวนที่มีค่าน้อย

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 2x = 4y \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{จากสมการ } \textcircled{2} \quad x = 2y$$

แทน  $x$  ด้วย  $2y$  ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$2y - y = 70$$

$$y = 70$$

แทน  $y$  ด้วย 70 ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$x - 70 = 70$$

$$x = 140$$

ดังนั้น จำนวนที่มีค่ามาก คือ 140 และจำนวนที่มีค่าน้อย คือ 70

4. **แนวคิด** ให้นมสดราคาขวดละ  $x$  บาท

และไข่ไก่ราคากล่องละ  $y$  บาท

ออมซื้อนมสด 1 ขวด และไข่ไก่ 3 กล่อง จ่ายเงิน 65 บาท

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad x + 3y = 65 \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

อ้อยซื้อนมสด 3 ขวด และไข่ไก่ 2 กล่อง จ่ายเงิน 90 บาท

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 3x + 2y = 90 \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 3 ; \quad 3x + 9y = 195 \quad \text{_____} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{2} ; \quad 7y = 105 \quad \text{_____} \quad \textcircled{4}$$

$$y = 15$$

แทน  $y$  ด้วย 15 ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$x + 3(15) = 65$$

$$x = 20$$

ดังนั้น นมราคาขวดละ 20 บาท และไข่ไก่ราคากล่องละ 15 บาท



5. แนวคิด 1 ให้  $x$  แทนจำนวนเด็กที่มามงานเลี้ยง

$y$  แทนจำนวนลูกชิ้นที่ซื้อ (ไม้)

ถ้าแจกลูกชิ้นให้เด็กคนละ 4 ไม้ จะเหลือลูกชิ้น 3 ไม้

จะได้สมการเป็น  $y - 4x = 3$  \_\_\_\_\_ ①

ถ้าแจกให้คนละ 5 ไม้ จะแจกได้  $\frac{y}{5}$  คน และจะมีเด็กที่ไม่ได้ลูกชิ้น 2 คน

จะได้สมการเป็น  $x - \frac{y}{5} = 2$  \_\_\_\_\_ ②

จากสมการ ② ;  $5x - y = 10$  \_\_\_\_\_ ③

① + ③ ;  $-4x = -5x + 13$

$$x = 13$$

แทน  $x$  ด้วย 13 ในสมการ ① จะได้

$$y - 4(13) = 3$$

$$y = 55$$

ดังนั้น เด็กมามงานเลี้ยง 13 คน และคุณแม่ซื้อลูกชิ้นมาทั้งหมด 55 ไม้

แนวคิด 2 ให้  $x$  แทนจำนวนเด็กที่มามงานเลี้ยง

$y$  แทนจำนวนลูกชิ้นที่ซื้อ (ไม้)

ถ้าแจกลูกชิ้นให้เด็กคนละ 4 ไม้ จะเหลือลูกชิ้น 3 ไม้

จะได้สมการเป็น  $y - 4x = 3$  \_\_\_\_\_ ①

ถ้าแจกลูกชิ้นให้เด็กคนละ 5 ไม้ จะมีเด็กที่ไม่ได้ลูกชิ้น 2 คน

จะได้สมการเป็น  $y = 5(x - 2)$  \_\_\_\_\_ ②

จากสมการ ②  $y - 5x = -10$  \_\_\_\_\_ ③

① - ③ ;  $x = 13$

แทน  $x$  ด้วย 13 ในสมการ ① จะได้

$$y - 4(13) = 3$$

$$y = 55$$

ดังนั้น มีเด็กมามงานเลี้ยง 13 คน และคุณแม่ซื้อลูกชิ้นมาทั้งหมด 55 ไม้

6. **แนวคิด** ให้  $x$  แทนจำนวนปากกาที่มีอยู่เดิม

$y$  แทนจำนวนดินสอที่มีอยู่เดิม

ร้านขายปากกาด้ามละ 40 บาท และดินสอแท่งละ 25 บาท ถ้าขายได้หมด จะได้เงิน 1,200 บาท

จะได้สมการเป็น  $40x + 25y = 1,200$  \_\_\_\_\_ ①

เมื่อเวลาผ่านไป ร้านค้าขายปากกาได้หมด แต่ขายดินสอได้เพียงครึ่งหนึ่ง และได้เงินรวม 900 บาท

จะได้สมการเป็น  $40x + 25\left(\frac{y}{2}\right) = 900$  \_\_\_\_\_ ②

① - ② ;  $\frac{25}{2}y = 300$

$$y = 24$$

แทน  $y$  ด้วย 24 ในสมการ ① จะได้

$$40x + 25(24) = 1,200$$

$$40x = 600$$

$$x = 15$$

ดังนั้น เดิมร้านค้ามีปากกา 15 ด้าม และดินสอ 24 แท่ง

7. **แนวคิด** ให้พ่อค้าซื้อกาแฟชนิด A ราคา กิโลกรัมละ 170 บาท จำนวน  $x$  กิโลกรัม คิดเป็นเงิน  $170x$  บาท

ซื้อกาแฟชนิด B ราคา กิโลกรัมละ 150 บาท จำนวน  $y$  กิโลกรัม คิดเป็นเงิน  $150y$  บาท

จะได้ว่าพ่อค้าลงทุนทั้งหมด  $170x + 150y$  บาท

พ่อค้านำกาแฟมาผสมขาย ได้กาแฟผสม 30 กิโลกรัม

จะได้สมการเป็น  $x + y = 30$  \_\_\_\_\_ ①

พ่อค้าขายกาแฟผสม กิโลกรัมละ 200 บาท ได้เงิน  $200(x + y)$  บาท จะได้กำไร

$$200(x + y) - (170x + 150y) = 30x + 50y$$

ถ้าพ่อค้าขายกาแฟผสมได้กำไร 20%

จะได้สมการเป็น

$$\frac{20}{100}(170x + 150y) = 30x + 50y$$
 \_\_\_\_\_ ②

จากสมการ ② ;  $34x + 30y = 30x + 50y$

$$4x = 20y$$

$$x = 5y$$
 \_\_\_\_\_ ③

แทน  $x$  ด้วย  $5y$  ในสมการ ① จะได้

$$5y + y = 30$$

$$y = 5$$

แทน  $y$  ด้วย 5 ในสมการ ③ จะได้

$$x = 5(5)$$

$$x = 25$$

ดังนั้น พ่อค้าใช้กาแฟชนิด A และชนิด B จำนวน 25 กิโลกรัม และ 5 กิโลกรัม ตามลำดับ

8. แนวคิด ให้  $x$  แทนค่าแรงของช่างปูกระเบื้อง

$y$  แทนค่าแรงของผู้ช่วยปูกระเบื้อง

นิกรจ้างผู้รับเหมาปูกระเบื้องในราคา 24,000 บาท โดยคิดเป็นค่ากระเบื้อง 9,000 บาท ที่เหลือเป็นค่าแรงของช่างปูกระเบื้องและค่าแรงของผู้ช่วย

จะได้สมการเป็น  $x + y + 9,000 = 24,000$

หรือ  $x + y = 15,000$  \_\_\_\_\_ ①

ถ้าค่าแรงของผู้ช่วยคิดเป็นครึ่งหนึ่งของค่าแรงของช่าง

จะได้สมการเป็น  $y = \frac{x}{2}$

หรือ  $x = 2y$  \_\_\_\_\_ ②

แทน  $x$  ด้วย  $2y$  ในสมการ ① จะได้

$$2y + y = 15,000$$

$$y = 5,000$$

แทน  $y$  ด้วย 5,000 ในสมการ ① จะได้

$$x + 5,000 = 15,000$$

$$x = 10,000$$

ดังนั้น ช่างปูกระเบื้องได้ค่าแรง 10,000 บาท และผู้ช่วยปูกระเบื้องได้ค่าแรง 5,000 บาท

9. แนวคิด ให้  $x$  แทนจำนวนลำไยพันธุ์กะโหลกที่ขายไป

$y$  แทนจำนวนลำไยพันธุ์สีชมพูที่ขายไป

ถ้าแม่ค้าขายลำไยทั้งสองพันธุ์ไป 70 กิโลกรัม

จะได้สมการเป็น  $x + y = 70$  \_\_\_\_\_ ①

ถ้าขายลำไยพันธุ์กะโหลกกิโลกรัมละ 25 บาท และลำไยพันธุ์สีชมพูกิโลกรัมละ 30 บาท ได้เงิน 1,780 บาท

จะได้สมการเป็น  $25x + 30y = 1,780$  \_\_\_\_\_ ②

①  $\times 25$  ;  $25x + 25y = 1,750$  \_\_\_\_\_ ③

②  $-$  ③ ;  $5y = 30$

$$y = 6$$

แทน  $y$  ด้วย 6 ในสมการ ① จะได้

$$x + 6 = 70$$

$$x = 64$$

ดังนั้น แม่ค้าขายลำไยพันธุ์กะโหลก 64 กิโลกรัม และลำไยพันธุ์ชมพู 6 กิโลกรัม

10. แนวคิด ให้ใช้สารละลายตั้งต้นชนิดที่ 1 ที่มีแอลกอฮอล์ 30% จำนวน  $x$  ลิตร

จะมีแอลกอฮอล์  $\frac{30}{100}x = 0.3x$  ลิตร

ใช้สารละลายตั้งต้นชนิดที่ 2 ที่มีแอลกอฮอล์ 80% จำนวน  $y$  ลิตร

จะมีแอลกอฮอล์  $\frac{80}{100}y = 0.8y$  ลิตร

ถ้าต้องการสารละลายตั้งต้นที่มีแอลกอฮอล์ 50% จำนวน 100 ลิตร

จะมีแอลกอฮอล์  $\frac{50}{100} = 50$  ลิตร

แอลกอฮอล์ 30% ในสารละลายตั้งต้นชนิดที่ 1 รวมกับแอลกอฮอล์ 80% ในสารละลายตั้งต้นชนิดที่ 2 จะเท่ากับแอลกอฮอล์ในสารละลายเคมีภัณฑ์ที่บริษัทต้องการ

จะได้สมการเป็น  $0.3x + 0.8y = 50$  \_\_\_\_\_ ①

เมื่อนำสารละลายตั้งต้นชนิดที่ 1 ที่มีแอลกอฮอล์ 30% รวมกับสารละลายตั้งต้นชนิดที่ 2 ที่มีแอลกอฮอล์ 80% มาผสมกัน จะได้แอลกอฮอล์ในสารละลายเคมีภัณฑ์ที่บริษัทต้องการ 100 ลิตร

จะได้สมการเป็น  $x + y = 100$  \_\_\_\_\_ ②

①  $\times 10$  ;  $3x + 8y = 500$  \_\_\_\_\_ ③

②  $\times 3$  ;  $3x + 3y = 300$  \_\_\_\_\_ ④

③  $-$  ④ ;  $5y = 200$

$$y = 40$$

แทน  $y$  ด้วย 40 ในสมการ ② จะได้

$$x + 40 = 100$$

$$x = 60$$

ดังนั้น สารละลายที่มีแอลกอฮอล์ 50% ที่บริษัทเคมีภัณฑ์ต้องการ ต้องใช้สารละลายตั้งต้นชนิดที่ 1 ที่มีแอลกอฮอล์ 30% รวมกับสารละลายตั้งต้นชนิดที่ 2 ที่มีแอลกอฮอล์ 80% มาผสมกัน 60 ลิตร และ 40 ลิตร ตามลำดับ

11. แนวคิด ให้คนงานชายหนึ่งคนทำงานได้วันละ  $x$  หน่วย

คนงานหญิงหนึ่งคนทำงานได้วันละ  $y$  หน่วย

ในเวลา 1 วัน คนงานชาย 3 คน และคนงานหญิง 4 คน ทำงานได้  $3x + 4y$  หน่วย

ในเวลา 14 วัน คนงานชาย 3 คน และคนงานหญิง 4 คน ทำงานได้  $14(3x + 4y)$  หน่วย

จะได้ว่าจำนวนงานทั้งหมดเท่ากับ  $14(3x + 4y) = 42x + 56y$  หน่วย ①

ในเวลา 1 วัน คนงานชาย 10 คน และคนงานหญิง 15 คน ทำงานได้  $10x + 15y$  หน่วย

ในเวลา 4 วัน คนงานชาย 10 คน และคนงานหญิง 15 คน ทำงานได้  $4(10x + 15y)$  หน่วย

จะได้ว่าจำนวนงานทั้งหมดเท่ากับ  $4(10x + 15y) = 40x + 60y$  หน่วย ②

เนื่องจากจำนวนงานทั้งหมดเท่ากัน

ดังนั้น จากสมการ ① และสมการ ② จะได้  $42x + 56y = 40x + 60y$

$$x = 2y$$

แทน  $x$  ด้วย  $2y$  ในสมการ ① จะได้จำนวนงานทั้งหมดเท่ากับ  $42(2y) + 56y = 140y$

เนื่องจาก ในเวลา 1 วัน คนงานชาย 7 คน และคนงานหญิง 6 คน ทำงานได้  $7x + 6y$  หน่วย

แทน  $x$  ด้วย  $2y$  จะได้  $7x + 6y = 7(2y) + 6y = 20y$  หน่วย

นั่นคือ ในเวลา 1 วัน คนงานชาย 7 คน และคนงานหญิง 6 คน ทำงานได้  $20y$  หน่วย

เนื่องจาก จำนวนงานทั้งหมดเป็น  $140y$  หน่วย จะได้ จำนวนวันที่ใช้ทำงานจึงเท่ากับ  $\frac{140y}{20y} = 7$  วัน

ดังนั้น คนงานชาย 7 คน และคนงานหญิง 6 คน ช่วยกันตัดหญ้าจะตัดเสร็จภายใน 7 วัน

12. แนวคิด ให้  $x$  แทนอัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง (กิโลเมตรต่อชั่วโมง)

$y$  แทนอัตราเร็วของกระแสน้ำ (กิโลเมตรต่อชั่วโมง)

เนื่องจาก

อัตราเร็วของการพายเรือตามน้ำ = อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง + อัตราเร็วของกระแสน้ำ =  $x + y$

อัตราเร็วของการพายเรือทวนน้ำ = อัตราเร็วของการพายเรือในน้ำนิ่ง - อัตราเร็วของกระแสน้ำ =  $x - y$

และจากความสัมพันธ์ ระยะทาง = อัตราเร็ว  $\times$  เวลา

วิษณุพายเรือตามน้ำในระยะทาง 1 กิโลเมตร ใช้เวลา 30 นาที

จาก ระยะทาง = อัตราเร็ว  $\times$  เวลา

จะได้  $1 = (x + y) \times \frac{30}{60}$

$$x + y = 2 \quad \text{①}$$

วิชญ์พายเรือทวนน้ำในระยะทาง 1 กิโลเมตร ใช้เวลา 50 นาที

จาก ระยะทาง = อัตราเร็ว  $\times$  เวลา

จะได้  $1 = (x - y) \times \frac{50}{60}$

$$x - y = \frac{60}{50}$$

$$5x - 5y = 6 \quad \text{_____} \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 5 ; \quad 5x + 5y = 10 \quad \text{_____} \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} ; \quad 10x = 16 \quad \text{_____} \textcircled{4}$$

$$x = \frac{8}{5}$$

แทน  $x$  ด้วย  $\frac{8}{5}$  ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$\frac{8}{5} + y = 2$$

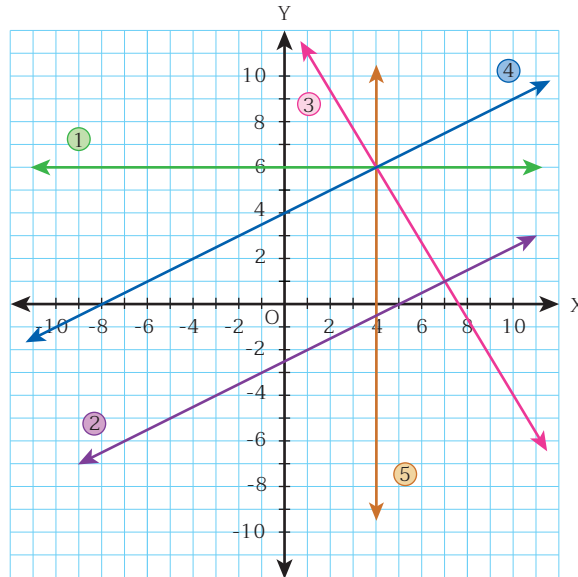
$$y = \frac{2}{5}$$

ดังนั้น วิชญ์พายเรือในน้ำนิ่งด้วยอัตราเร็ว  $\frac{8}{5}$  หรือ  $1\frac{3}{5}$  กิโลเมตรต่อชั่วโมง และกระแสน้ำมีอัตราเร็ว  $\frac{2}{5}$  กิโลเมตรต่อชั่วโมง

## ตัวอย่างแบบทดสอบ

1. กำหนดกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ดังนี้

(5 คะแนน)



จากกราฟ จงตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้

1) กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรใดที่มี  $(-3, 2.5)$  เป็นคำตอบของสมการ

ตอบ .....

2) กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรใดบ้างที่มี  $(4, 6)$  เป็นคำตอบของสมการ

ตอบ .....

3) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยกราฟ ② และ ③ มีคำตอบหรือไม่ ถ้ามีให้ระบุคำตอบนั้น

ตอบ .....

4) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยกราฟ ② และ ⑤ มีคำตอบหรือไม่ ถ้ามีให้ระบุคำตอบนั้น

ตอบ .....

5) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรใดไม่มีคำตอบ

ตอบ .....

2. จงพิจารณาว่าระบบสมการที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีคำตอบเดียว หรือมีคำตอบมากมายไม่จำกัด หรือไม่มีคำตอบ (4 คะแนน)

1)  $10x + 5y = 20$

$3x + 6y = 15$

2)  $-9x + 6y = 15$

$6x - 4y = -10$

3)  $6x - 9y = 12$

$4x - 6y = -8$

4)  $-4x + 6y = 26$

$9x - 6y = -36$

3. กำหนดระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

$$5x + 1 = y - 12$$

$$3(2y - 3x) = 45$$

จงหาค่าของ  $(2x + y)^2$

(3 คะแนน)



4. หัทยะสมเหรียญสิบบาทและเหรียญห้าบาทไว้จำนวนหนึ่ง เมื่อนำมานับดูพบว่ามีเหรียญสิบบาทมากกว่าเหรียญห้าบาทอยู่ 49 เหรียญ คิดเป็นเงินรวม 1,600 บาท อยากทราบว่าหัตยมีเหรียญสิบบาทและเหรียญห้าบาทอย่างละกี่เหรียญ (5 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ในช่วงเปิดภาคเรียนของปีการศึกษาใหม่ นักเรียนทุกคนจะซื้อสมุดซึ่งมีตราสัญลักษณ์ของโรงเรียนที่จำหน่ายในสหกรณ์ร้านค้าของโรงเรียน โดยมีสมุดให้เลือกซื้อสองแบบ คือ สมุดปกอ่อน 40 หน้า และสมุดปกแข็ง 80 หน้า บัวเป็นนักเรียนใหม่จึงซื้อสมุดปกอ่อน 8 เล่ม และสมุดปกแข็ง 4 เล่ม รวมเป็นเงิน 184 บาท ส่วนมะลิเป็นนักเรียนเก่ายังมีสมุดเหลือใช้จากปีการศึกษาที่แล้วอยู่จำนวนหนึ่ง จึงซื้อสมุดปกอ่อน 5 เล่ม และสมุดปกแข็ง 3 เล่ม รวมเป็นเงิน 126 บาท
- ถ้านักเรียนอีกสองคน คือ ดาวเรืองและเบญจมาศ ต้องการซื้อสมุด โดยดาวเรืองต้องการซื้อสมุดปกอ่อน 3 เล่ม และสมุดปกแข็ง 2 เล่ม ส่วนเบญจมาศต้องการซื้อสมุดปกอ่อน 2 เล่ม และสมุดปกแข็ง 3 เล่ม แล้วใครจ่ายเงินมากกว่ากันและมากกว่ากันอยู่กี่บาท (6 คะแนน)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



8. แก้วและไหมขับรถพาครอบครัวไปเที่ยวต่างจังหวัดด้วยกันโดยใช้รถยนต์คนละคันและออกเดินทางจากบ้านแก้วพร้อมกันโดยไม่แวะพักระหว่างทาง ไหมใช้เวลาในการขับรถทั้งหมด 2 ชั่วโมง แต่แก้วขับรถช้ากว่าไหม 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ทำให้แก้วใช้เวลาในการขับรถมากกว่าไหม 15 นาที จงหาว่า

1) แก้วและไหมขับรถด้วยอัตราเร็วเท่าไร (4 คะแนน)

---

---

---

---

---

2) ระยะทางในการเดินทางทั้งหมดเป็นกิโลเมตร (1 คะแนน)

---

---

9. แม่ค้าซื้อข้าวสารชนิดที่ 1 ราคา กิโลกรัมละ 40 บาท และข้าวสารชนิดที่ 2 ราคา กิโลกรัมละ 50 บาท รวมเป็นเงิน 2,500 บาท จากนั้น แม่ค้านำข้าวสารทั้งสองชนิดมาผสมกันแล้วขายในราคา กิโลกรัมละ 50 บาท ซึ่งทำให้ได้กำไร 20% จงหา

1) แม่ค้าซื้อข้าวสารแต่ละชนิดมาอย่างละกิโลกรัม (4 คะแนน)

---

---

---

---

---

2) อัตราส่วนของจำนวนข้าวสารชนิดที่ 1 ต่อจำนวนข้าวสารชนิดที่ 2 ที่แม่ค้าใช้ในการผสมข้าวสารทั้งสองชนิดเพื่อนำไปขาย (1 คะแนน)

---

---

---

---

---

---

---

---

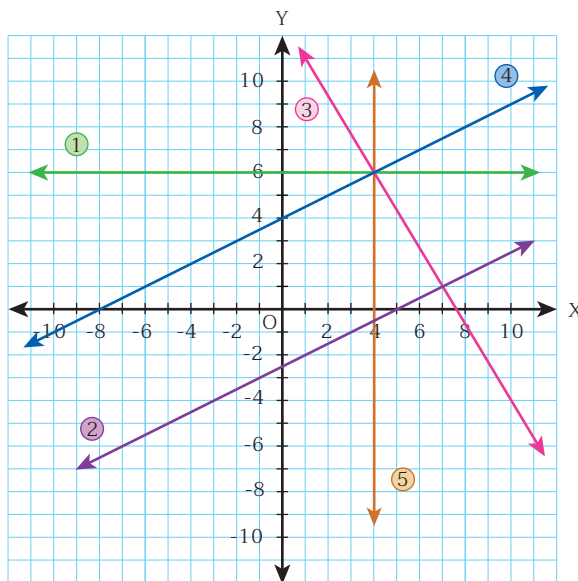
---

---

## เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบ

1. กำหนดกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ดังนี้

(5 คะแนน)



จากกราฟ จงตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้

1) กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรใดที่มี  $(-3, 2.5)$  เป็นคำตอบของสมการ

ตอบ ..... กราฟ ④

2) กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรใดบ้างที่มี  $(4, 6)$  เป็นคำตอบของสมการ

ตอบ ..... กราฟ ①, ③, ④ และ ⑤

3) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยกราฟ ② และ ③ มีคำตอบหรือไม่ ถ้ามีให้ระบุคำตอบนั้น

ตอบ ..... มี คือ  $(7, 1)$

4) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ประกอบด้วยกราฟ ② และ ⑤ มีคำตอบหรือไม่ ถ้ามีให้ระบุคำตอบนั้น

ตอบ ..... มี คือ  $(4, -0.5)$

5) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรใดไม่มีคำตอบ

ตอบ ..... กราฟ ② และ ④

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 1 นักเรียนสามารถใช้กราฟเพื่อวิเคราะห์เกี่ยวกับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

เกณฑ์การให้คะแนน

คะแนนเต็ม 5 คะแนน ข้อละ 1 คะแนน

ตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ

ได้ 0 คะแนน

2. จงพิจารณาว่าระบบสมการที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีคำตอบเดียว หรือมีคำตอบมากมายไม่จำกัด หรือไม่มีคำตอบ (4 คะแนน)

1)  $10x + 5y = 20$

$3x + 6y = 15$

มีคำตอบเดียว

2)  $-9x + 6y = 15$

$6x - 4y = -10$

มีคำตอบมากมายไม่จำกัด

3)  $6x - 9y = 12$

$4x - 6y = -8$

ไม่มีคำตอบ

4)  $-4x + 6y = 26$

$9x - 6y = -36$

มีคำตอบเดียว

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 4 คะแนน ข้อละ 1 คะแนน

ตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ

ได้ 0 คะแนน

3. กำหนดระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

$$5x + 1 = y - 12$$

$$3(2y - 3x) = 45$$

จงหาค่าของ  $(2x + y)^2$

(3 คะแนน)

แนวคิด 1

$$5x + 1 = y - 12$$

①

$$3(2y - 3x) = 45$$

②

จากสมการ ① ;

$$y = 5x + 13$$

③

จากสมการ ② ;

$$2y - 3x = 15$$

④

แทน  $y$  ด้วย  $5x + 13$  ในสมการ ④ จะได้

$$2(5x + 13) - 3x = 15$$

$$10x + 26 - 3x = 15$$

$$7x = -11$$

$$x = -\frac{11}{7}$$

แทน  $x$  ด้วย  $-\frac{11}{7}$  ในสมการ ③ จะได้

$$y = 5\left(-\frac{11}{7}\right) + 13$$

$$y = \frac{36}{7}$$

$$\text{ดังนั้น } (2x + y)^2 = \left[2\left(-\frac{11}{7}\right) + \frac{36}{7}\right]^2 = 2^2 = 4$$

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 3 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

ส่วนที่ 1 การหาค่า  $x$  และค่า  $y$

- ❖ แสดงการหาค่า  $x$  และค่า  $y$  ถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ❖ แสดงการหาค่า  $x$  หรือค่า  $y$  ถูกต้องเพียงค่าใดค่าหนึ่ง ได้ 1 คะแนน
- ❖ แสดงการหาค่า  $x$  และค่า  $y$  ไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดง ได้ 0 คะแนน

ส่วนที่ 2 การสรุปคำตอบ

- ❖ สรุปคำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ❖ สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่สรุป ได้ 0 คะแนน

แนวคิด 2

$$5x + 1 = y - 12 \quad \text{①}$$

$$3(2y - 3x) = 45 \quad \text{②}$$

$$\text{จากสมการ ① ; } 5x - y = -13 \quad \text{③}$$

$$\text{จากสมการ ② ; } 2y - 3x = 15 \quad \text{④}$$

$$\text{③} + \text{④ ; } 2x + y = 2$$

$$\text{ดังนั้น } (2x + y)^2 = 2^2 = 4$$

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 3 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

ส่วนที่ 1 การเขียนแสดงวิธีการหาคำตอบ

- ❖ แสดงวิธีการหาคำตอบได้ถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ❖ แสดงวิธีการหาคำตอบได้ถูกต้องบางส่วน ได้ 1 คะแนน
- ❖ แสดงวิธีการหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดง ได้ 0 คะแนน

ส่วนที่ 2 การสรุปคำตอบ

- ❖ สรุปคำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ❖ สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่สรุป ได้ 0 คะแนน

4. หัทยะสมเหรียญสิบบาทและเหรียญห้าบาทไว้จำนวนหนึ่ง เมื่อนำมานับดูพบว่าเหรียญสิบบาทมากกว่าเหรียญห้าบาทอยู่ 49 เหรียญ คิดเป็นเงินรวม 1,600 บาท อยากทราบว่าหัตถ์มีเหรียญสิบบาทและเหรียญห้าบาทอย่างละกี่เหรียญ (5 คะแนน)

**แนวคิด** ให้หัตถ์มีเหรียญสิบบาท  $x$  เหรียญ และมีเหรียญห้าบาท  $y$  เหรียญ

เนื่องจากมีเหรียญสิบบาทมากกว่าเหรียญห้าบาทอยู่ 49 เหรียญ

จะได้สมการเป็น  $x - y = 49$  ①

หัตถ์มีเหรียญสิบบาท  $x$  เหรียญ คิดเป็นเงิน  $10x$  บาท

และมีเหรียญห้าบาท  $y$  เหรียญ คิดเป็นเงิน  $5y$  บาท

ดังนั้น หัตถ์มีเงินทั้งหมด  $10x + 5y$  บาท

เนื่องจากหัตถ์มีเงินรวมกัน 1,600 บาท

จะได้สมการเป็น  $10x + 5y = 1,600$

หรือ  $2x + y = 320$  ②

① + ② ;  $3x = 369$

$x = 123$

แทน  $x$  ด้วย 123 ในสมการ ① จะได้

$123 - y = 49$

$y = 74$

ดังนั้น หัตถ์มีเหรียญสิบบาท 123 เหรียญ และมีเหรียญห้าบาท 74 เหรียญ

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 3 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการแก้ปัญหา

**เกณฑ์การให้คะแนน** คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

ส่วนที่ 1 การเขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

- ✦ เขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปรถูกต้องทั้งสองสมการ ได้ 2 คะแนน
- ✦ เขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปรถูกต้องเพียงสมการเดียว ได้ 1 คะแนน
- ✦ เขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน ได้ 0 คะแนน

ส่วนที่ 2 การหาค่า  $x$  และค่า  $y$

- ✦ แสดงการหาค่าตัวแปรทั้งสองถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ✦ แสดงการหาค่าตัวแปรถูกต้องเพียงค่าใดค่าหนึ่ง ได้ 1 คะแนน
- ✦ แสดงวิธีการหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดง ได้ 0 คะแนน

ส่วนที่ 3 การสรุปคำตอบ

- ✦ สรุปคำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ✦ สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่สรุป ได้ 0 คะแนน

5. ในช่วงเปิดภาคเรียนของปีการศึกษาใหม่ นักเรียนทุกคนจะซื้อสมุดซึ่งมีตราสัญลักษณ์ของโรงเรียนที่จำหน่ายในสหกรณ์ร้านค้าของโรงเรียน โดยมีสมุดให้เลือกซื้อสองแบบ คือ สมุดปกอ่อน 40 หน้า และสมุดปกแข็ง 80 หน้า บัวเป็นนักเรียนใหม่จึงซื้อสมุดปกอ่อน 8 เล่ม และสมุดปกแข็ง 4 เล่ม รวมเป็นเงิน 184 บาท ส่วนมะลิเป็นนักเรียนเก่ายังมีสมุดเหลือใช้จากปีการศึกษาที่แล้วอยู่จำนวนหนึ่ง จึงซื้อสมุดปกอ่อน 5 เล่ม และสมุดปกแข็ง 3 เล่ม รวมเป็นเงิน 126 บาท
- ถ้านักเรียนอีกสองคน คือ ดาวเรืองและเบญจมาศ ต้องการซื้อสมุด โดยดาวเรืองต้องการซื้อสมุดปกอ่อน 3 เล่ม และสมุดปกแข็ง 2 เล่ม ส่วนเบญจมาศต้องการซื้อสมุดปกอ่อน 2 เล่ม และสมุดปกแข็ง 3 เล่ม แล้วใครจ่ายเงินมากกว่ากันและมากกว่ากันอยู่กี่บาท (6 คะแนน)

**แนวคิด** ให้สมุดปกอ่อนราคาเล่มละ  $x$  บาท

และสมุดปกแข็งราคาเล่มละ  $y$  บาท

บัวซื้อสมุดปกอ่อน 8 เล่ม และสมุดปกแข็ง 4 เล่ม รวมเป็นเงิน 184 บาท

จะได้สมการเป็น  $8x + 4y = 184$  ①

มะลิซื้อสมุดปกอ่อน 5 เล่ม และสมุดปกแข็ง 3 เล่ม รวมเป็นเงิน 126 บาท

จะได้สมการเป็น  $5x + 3y = 126$  ②

①  $\times 3$  ;  $24x + 12y = 552$  ③

②  $\times 4$  ;  $20x + 12y = 504$  ④

③  $-$  ④ ;  $4x = 48$

$$x = 12$$

แทน  $x$  ด้วย 12 ในสมการ ② จะได้

$$5(12) + 3y = 126$$

$$3y = 66$$

$$y = 22$$

ดังนั้น สมุดปกอ่อนราคาเล่มละ 12 บาท และสมุดปกแข็งราคาเล่มละ 22 บาท

ถ้าวดาวเรืองต้องการซื้อสมุดปกอ่อน 3 เล่ม และสมุดปกแข็ง 2 เล่ม

จะต้องจ่ายเงิน  $3(12) + 2(22) = 36 + 44 = 80$  บาท

ถ้าเบญจมาศต้องการซื้อสมุดปกอ่อน 2 เล่ม และสมุดปกแข็ง 3 เล่ม

จะต้องจ่ายเงิน  $2(12) + 3(22) = 24 + 66 = 90$  บาท

ดังนั้น เบญจมาศจ่ายเงินมากกว่าดาวเรือง และมากกว่ากันอยู่  $90 - 80 = 10$  บาท



6. เมื่อ 4 ปีที่แล้ว พ่อมีอายุเป็นสามเท่าของอายุของกบ และอีก 3 ปีข้างหน้า พ่อและกบจะมีอายุรวมกันได้ 66 ปี จงหาว่าอีกกี่ปีข้างหน้าพ่อจึงมีอายุเป็นสองเท่าของกบ (6 คะแนน)

แนวคิด ใช้ตารางประกอบการวิเคราะห์โจทย์ ดังนี้

|     | อายุ (ปี) |                   |                  |
|-----|-----------|-------------------|------------------|
|     | ปัจจุบัน  | เมื่อ 4 ปีที่แล้ว | อีก 3 ปีข้างหน้า |
| พ่อ | x         | x - 4             | x + 3            |
| กบ  | y         | y - 4             | y + 3            |

เมื่อ 4 ปีที่แล้ว พ่อมีอายุเป็นสามเท่าของอายุของกบ

จะได้สมการเป็น  $x - 4 = 3(y - 4)$  ①

อีก 3 ปีข้างหน้า พ่อและกบจะมีอายุรวมกันได้ 66 ปี

จะได้สมการเป็น  $(x + 3) + (y + 3) = 66$  ②

จากสมการ ① ;  $x - 4 = 3y - 12$

$$x - 3y = -8 \quad \text{③}$$

จากสมการ ② ;  $x + y = 60$  ④

④ - ③ ;  $4y = 68$

$$y = 17$$

แทน y ด้วย 17 ในสมการ ④ จะได้

$$x + 17 = 60$$

$$x = 43$$

ดังนั้น ในปัจจุบันพ่อมีอายุ 43 ปี และกบมีอายุ 17 ปี

ให้พ่อมีอายุเป็นสองเท่าของกบในอีก n ปีข้างหน้า

อีก n ปีข้างหน้าพ่อมีอายุ 43 + n ปี และกบมีอายุ 17 + n ปี

เนื่องจาก อีก n ปีข้างหน้า พ่อจึงมีอายุเป็นสองเท่าของกบ

จะได้สมการเป็น  $43 + n = 2(17 + n)$

$$43 + n = 34 + 2n$$

$$n = 9$$

ดังนั้น อีก 9 ปีข้างหน้า พ่อจึงจะมีอายุเป็นสองเท่าของกบ

7. ถ้าจำนวนที่มีสองหลักจำนวนหนึ่งมีเลขโดดในหลักหน่วยมากกว่าเลขโดดในหลักสิบอยู่ 3 และผลต่างของสามเท่าของจำนวนนี้กับจำนวนที่ได้จากการสลับที่ของเลขโดดเป็น 111 แล้ว 1 ใน 5 ของผลบวกของจำนวนนั้นกับจำนวนที่ได้จากการสลับที่ของเลขโดดมีค่าเท่าใด (6 คะแนน)

**แนวคิด** ให้  $x$  แทนเลขโดดในหลักสิบ

$y$  แทนเลขโดดในหลักหน่วย

เลขโดดในหลักหน่วยมากกว่าเลขโดดในหลักสิบอยู่ 3

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad y - x = 3 \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

ผลต่างของสามเท่าของจำนวนนี้กับจำนวนที่ได้จากการสลับที่ของเลขโดดเป็น 111

$$\text{จะได้สมการเป็น} \quad 3(10x + y) - (10y + x) = 111 \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{จากสมการ } \textcircled{2}; \quad 30x + 3y - 10y - x = 111$$

$$29x - 7y = 111 \quad \text{_____} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \times 7; \quad 7y - 7x = 21 \quad \text{_____} \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4}; \quad 22x = 132$$

$$x = 6$$

แทน  $x$  ด้วย 6 ในสมการ  $\textcircled{1}$  จะได้

$$y - 6 = 3$$

$$y = 9$$

จะได้ จำนวนที่มีสองหลักจำนวนนั้น คือ 69

และ จำนวนที่ได้จากการสลับที่ของเลขโดด คือ 96

ดังนั้น 1 ใน 5 ของผลบวกของจำนวนนั้นกับจำนวนที่ได้จากการสลับที่ของเลขโดดมีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{1}{5}\right)(96+69) = 33$$

สำหรับ ข้อ 5–7

ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 3 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 6 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

|           |                                                      |             |
|-----------|------------------------------------------------------|-------------|
| ส่วนที่ 1 | การเขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปร                       |             |
|           | ✦ เขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปรถูกต้องทั้งสองสมการ     | ได้ 2 คะแนน |
|           | ✦ เขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปรถูกต้องเพียงสมการเดียว  | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✦ เขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน | ได้ 0 คะแนน |
| ส่วนที่ 2 | การหาค่าตัวแปร                                       |             |
|           | ✦ แสดงการหาค่าตัวแปรทั้งสองถูกต้อง                   | ได้ 2 คะแนน |
|           | ✦ แสดงการหาค่าตัวแปรถูกต้องเพียงค่าใดค่าหนึ่ง        | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✦ แสดงการหาค่าตัวแปรไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดง           | ได้ 0 คะแนน |
| ส่วนที่ 3 | การหาคำตอบ                                           |             |
|           | ✦ แสดงการหาคำตอบถูกต้อง                              | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✦ แสดงการหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดง               | ได้ 0 คะแนน |
| ส่วนที่ 4 | การสรุปคำตอบ                                         |             |
|           | ✦ สรุปคำตอบถูกต้อง                                   | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✦ สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่สรุป                    | ได้ 0 คะแนน |

8. แก้วและไหมขับรถพาครอบครัวไปเที่ยวต่างจังหวัดด้วยกันโดยใช้รถยนต์คันละคันและออกเดินทางจากบ้านแก้วพร้อมกันโดยไม่แวะพักระหว่างทาง ไหมใช้เวลาในการขับรถทั้งหมด 2 ชั่วโมง แต่แก้วขับรถช้ากว่าไหม 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ทำให้แก้วใช้เวลาในการขับรถมากกว่าไหม 15 นาที จงหาว่า

1) แก้วและไหมขับรถด้วยอัตราเร็วเท่าไร (4 คะแนน)

แนวคิด ใช้ความสัมพันธ์ ระยะทาง = อัตราเร็ว × เวลา และสร้างตารางวิเคราะห์โจทย์ได้ดังนี้

| สถานการณ์     | อัตราเร็ว (กิโลเมตร/ชั่วโมง) | ระยะทาง (กิโลเมตร) | เวลา (ชั่วโมง)                    |
|---------------|------------------------------|--------------------|-----------------------------------|
| แก้วขับรถยนต์ | $x$                          | $\frac{9}{4}x$     | $2 + \frac{15}{60} = \frac{9}{4}$ |
| ไหมขับรถยนต์  | $y$                          | $2y$               | $2$                               |

แก้วขับรถด้วยอัตราเร็ว  $x$  กิโลเมตรต่อชั่วโมง และไหมขับรถด้วยอัตราเร็ว  $y$  กิโลเมตรต่อชั่วโมง

แก้วขับรถช้ากว่าไหม 10 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

จะได้สมการเป็น  $y - x = 10$

หรือ  $y = 10 + x$  \_\_\_\_\_ ①

จากตาราง ไหมขับรถได้ระยะทางทั้งหมด  $2y$  กิโลเมตร

และ แก้วขับรถได้ระยะทางทั้งหมด  $\frac{9}{4}x$  กิโลเมตร

เนื่องจาก ระยะทางที่ทั้งสองคนขับรถได้เท่ากัน

จะได้สมการเป็น  $2y = \frac{9}{4}x$

หรือ  $8y = 9x$  \_\_\_\_\_ ②

แทน  $y$  ด้วย  $10 + x$  ในสมการ ② จะได้

$$8(10 + x) = 9x$$

$$80 + 8x = 9x$$

$$x = 80$$

แทน  $x$  ด้วย 80 ในสมการ ① จะได้

$$y = 10 + 80$$

$$y = 90$$

ดังนั้น แก้วขับรถด้วยอัตราเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และไหมขับรถด้วยอัตราเร็ว 90 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

2) ระยะทางในการเดินทางทั้งหมดเป็นกี่กิโลเมตร (1 คะแนน)

ในการเดินทางครั้งนี้ระยะทางทั้งหมดเท่ากับ  $2(90) = 180$  กิโลเมตร

9. แม่ค้าซื้อข้าวสารชนิดที่ 1 ราคา กิโลกรัมละ 40 บาท และข้าวสารชนิดที่ 2 ราคา กิโลกรัมละ 50 บาท รวมเป็นเงิน 2,500 บาท จากนั้น แม่ค้านำข้าวสารทั้งสองชนิดมาผสมกันแล้วขายในราคา กิโลกรัมละ 50 บาท ซึ่งทำให้ได้กำไร 20% จงหา

1) แม่ค้าซื้อข้าวสารแต่ละชนิดมาอย่างละกี่กิโลกรัม (4 คะแนน)

**แนวคิด** ให้แม่ค้าซื้อข้าวสารชนิดที่ 1 มา  $x$  กิโลกรัม ราคา กิโลกรัมละ 40 บาท คิดเป็นเงิน  $40x$  บาท

และ ซื้อข้าวสารชนิดที่ 2 มา  $y$  กิโลกรัม ราคา กิโลกรัมละ 50 บาท คิดเป็นเงิน  $50y$  บาท

ดังนั้น แม่ค้าซื้อข้าวสารมาทั้งหมด  $40x + 50y$  บาท

จากโจทย์ แม่ค้าซื้อข้าวสารคิดเป็นเงิน 2,500 บาท

จะได้สมการเป็น  $40x + 50y = 2,500$  \_\_\_\_\_ ①

เมื่อนำมาผสมกันจะได้ข้าวสารทั้งหมด  $x + y$  กิโลกรัม และขายในราคา กิโลกรัมละ 50 บาท

จะได้เงินทั้งหมด  $50(x + y)$  บาท

แต่แม่ค้าขายได้กำไร 20% ซึ่งคิดเป็นเงิน  $\frac{20}{100}(2,500) = 500$  บาท

จะได้สมการเป็น  $50(x + y) - 2,500 = 500$

หรือ  $50(x + y) = 3,000$

หรือ  $50x + 50y = 3,000$  \_\_\_\_\_ ②

② - ① ;

$$10x = 500$$
$$x = 50$$

แทน x ด้วย 50 ในสมการ ① จะได้

$$40(50) + 50y = 2,500$$
$$50y = 500$$
$$y = 10$$

ดังนั้น แม่ค้าซื้อข้าวสารชนิดที่ 1 มา 50 กิโลกรัม และซื้อข้าวสารชนิดที่ 2 มา 10 กิโลกรัม

2) อัตราส่วนของจำนวนข้าวสารชนิดที่ 1 ต่อจำนวนข้าวสารชนิดที่ 2 ที่แม่ค้าใช้ในการผสมข้าวสารทั้งสองชนิดเพื่อนำไปขาย (1 คะแนน)

อัตราส่วนของจำนวนข้าวสารชนิดที่ 1 ต่อจำนวนข้าวสารชนิดที่ 2 ที่แม่ค้าใช้ในการผสมข้าวสารทั้งสองชนิดเพื่อนำขาย เท่ากับ  $50 : 10 = 5 : 1$

สำหรับ ข้อ 8–9

ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 3 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไปใช้ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 5 คะแนน

ข้อ 1) คะแนนเต็ม 4 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

ส่วนที่ 1 การเขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

- ✦ เขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปรถูกต้องทั้งสองสมการ
  - ✦ เขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปรถูกต้องเพียงสมการเดียว
  - ✦ เขียนสมการเชิงเส้นสองตัวแปรไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน
- ได้ 2 คะแนน

ได้ 1 คะแนน

ได้ 0 คะแนน

ส่วนที่ 2 การหาค่าตัวแปร

- ✦ แสดงการหาค่าตัวแปรทั้งสองถูกต้อง
  - ✦ แสดงการหาค่าตัวแปรถูกต้องเพียงค่าใดค่าหนึ่ง
  - ✦ แสดงการหาค่าตัวแปรไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดง
- ได้ 2 คะแนน

ได้ 1 คะแนน

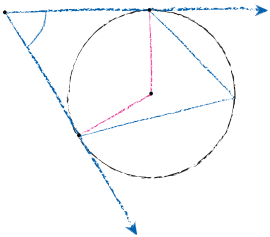
ได้ 0 คะแนน

ข้อ 2) คะแนนเต็ม 1 คะแนน

- ตอบถูกต้อง

ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ
- ได้ 1 คะแนน

ได้ 0 คะแนน

| บทที่                                                                             | 2                                              | วงกลม     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------|
|  | ในบทวงกลมนี้ ประกอบด้วยหัวข้อย่อย ดังต่อไปนี้  |           |
|                                                                                   | 2.1 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม | 6 ชั่วโมง |
|                                                                                   | 2.2 คอร์ดของวงกลม                              | 5 ชั่วโมง |
|                                                                                   | 2.3 เส้นสัมผัสวงกลม                            | 4 ชั่วโมง |



### สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 2

การวัดและเรขาคณิต

มาตรฐาน ค 2.2

เข้าใจและวิเคราะห์รูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต และทฤษฎีบททางเรขาคณิต และนำไปใช้



### ตัวชี้วัด

เข้าใจและใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์



### จุดประสงค์ของบทเรียน

นักเรียนสามารถ

1. บอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม คอร์ดของวงกลม และเส้นสัมผัสวงกลม
2. นำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์



### ความเชื่อมโยงระหว่างตัวชี้วัดกับจุดประสงค์ของบทเรียน

เนื่องจากตัวชี้วัดนี้ กล่าวถึงการเข้าใจและใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนั้น เพื่อให้การเรียนรู้ของนักเรียนในเรื่องวงกลมสอดคล้องกับตัวชี้วัด ครูควรจัดประสบการณ์ให้นักเรียนสามารถเข้าใจทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลม รวมทั้งนำทฤษฎีบทไปใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งสะท้อนได้จากการที่นักเรียนสามารถ

- ❖ อธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม และนำทฤษฎีบทไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

- ❖ อธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลม และนำทฤษฎีบทไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
- ❖ อธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม และนำทฤษฎีบทไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

 **ความคิดรวบยอดของบทเรียน**

วงกลมเป็นรูปเรขาคณิตสองมิติ ส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลมมีมากมาย เช่น คอร์ด เส้นสัมผัสวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่าง ๆ เหล่านี้ของวงกลม ประกอบกับความรู้ทางเรขาคณิตทำให้เกิดสมบัติและทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมที่มีประโยชน์ในการจำลองสถานการณ์ รวมถึงการอธิบายและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และปัญหาในชีวิตจริงอย่างสมเหตุสมผล

 **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์**

| ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์            | หัวข้อ                                                |                      |                        |                                   |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------|----------------------|------------------------|-----------------------------------|
|                                           | 2.1<br>มุมที่จุดศูนย์กลาง<br>และมุมในส่วนโค้งของวงกลม | 2.2<br>คอร์ดของวงกลม | 2.3<br>เส้นสัมผัสวงกลม | กิจกรรมท้ายบท/<br>แบบฝึกหัดท้ายบท |
| การแก้ปัญหา                               | ❖                                                     | ❖                    | ❖                      | ❖                                 |
| การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ |                                                       |                      |                        |                                   |
| การเชื่อมโยง                              | ❖                                                     | ❖                    |                        | ❖                                 |
| การให้เหตุผล                              | ❖                                                     | ❖                    | ❖                      | ❖                                 |
| การคิดสร้างสรรค์                          |                                                       |                      |                        |                                   |



## ความเชื่อมโยงของความรู้

### ความรู้พื้นฐาน

- ❖ ส่วนต่าง ๆ ของวงกลม ได้แก่ เส้นรอบวง เส้นผ่านศูนย์กลาง รัศมี และจุดศูนย์กลาง รวมถึงความเท่ากันทุกประการของวงกลม เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่
- ❖ ผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ  $180^\circ$  และผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมเท่ากับ  $360^\circ$  เพื่อเป็นพื้นฐานในการทำมุมเข้าใจ ทฤษฎีบทใหม่ ๆ และนำไปใช้ในการอ้างเหตุผล
- ❖ ความรู้เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และความคล้ายกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูป เพื่อนำไปใช้ในการอ้างเหตุผล

### ความรู้ ในบทเรียน

#### ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

- ❖ ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นยาวเท่ากัน
- ❖ ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
- ❖ ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมจะมีขนาดเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ ส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นยาวเท่ากัน
- ❖ มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$  หรือหนึ่งมุมฉาก
- ❖ ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม แล้วผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามจะเท่ากับสองมุมฉาก

#### ทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลม

- ❖ ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน คอร์ดทั้งสองยาวจะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ คอร์ดทั้งสองตัดวงกลม แล้วทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน และส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากัน
- ❖ ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม และตัดกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะแบ่งครึ่งคอร์ด ก็ต่อเมื่อ ส่วนของเส้นตรงนั้นตั้งฉากกับคอร์ด
- ❖ เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลม จะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น
- ❖ ในวงกลมวงเดียวกัน คอร์ดสองเส้นจะยาวเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ คอร์ดทั้งสองนั้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน

#### ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม

- ❖ เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส
- ❖ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดจุดหนึ่งบนวงกลม จะเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดนั้น
- ❖ ส่วนของเส้นตรง 2 เส้น ที่ลากจากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลมมาสัมผัสวงกลมวงเดียวกัน จะยาวเท่ากัน
- ❖ มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส จะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

### ความรู้ในอนาคต

การใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทของวงกลมในการเรียนเนื้อหาอื่น ๆ เช่น เรขาคณิตวิเคราะห์ นอกจากนี้ ยังใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาฟิสิกส์ เรื่อง การเคลื่อนที่แบบวงกลม



### ลำดับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของบทเรียน

ทบทวนส่วนต่าง ๆ ของวงกลม ผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รวมถึงรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

แนะนำและให้ความหมายของส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม ได้แก่ ครึ่งวงกลม ส่วนโค้งของวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลาง มุมในส่วนโค้งของวงกลม และมุมในครึ่งวงกลม

แนะนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งได้แก่ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางและความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางและขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมและความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุม ขนาดของมุมในครึ่งวงกลม และรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม โดยใช้การสำรวจจากการทำกิจกรรมที่เน้นให้ลงมือปฏิบัติ รวมทั้งการสำรวจโดยใช้เทคโนโลยี และฝึกการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

แนะนำและให้ความหมายเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลม

แนะนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลม ซึ่งได้แก่ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความยาวของคอร์ดและความยาวของส่วนโค้งของวงกลม คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม และคอร์ดที่ยาวเท่ากัน โดยการพิสูจน์และให้เหตุผลทางเรขาคณิต รวมถึงการสำรวจโดยใช้เทคโนโลยี และฝึกการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

แนะนำความหมายของส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเส้นสัมผัสวงกลม ซึ่งได้แก่ เส้นตัด เส้นสัมผัสวงกลม และจุดสัมผัส

แนะนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม ได้แก่ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี เส้นสัมผัสวงกลมและคอร์ดของวงกลม โดยใช้การสำรวจจากการทำกิจกรรม การสำรวจโดยใช้เทคโนโลยี รวมถึงการให้เหตุผลทางเรขาคณิต และฝึกการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

สรุปบทเรียนเรื่องวงกลม และทำกิจกรรมท้ายบท รวมถึงการทำแบบฝึกหัดท้ายบท เพื่อฝึกการนำความรู้ไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

## 2.1 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม (6 ชั่วโมง)

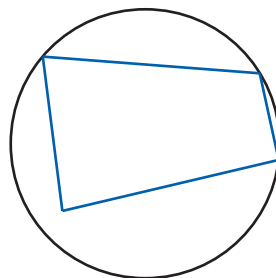
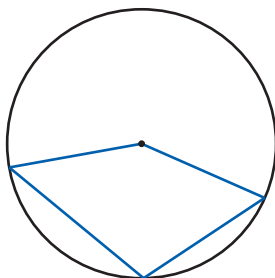
### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

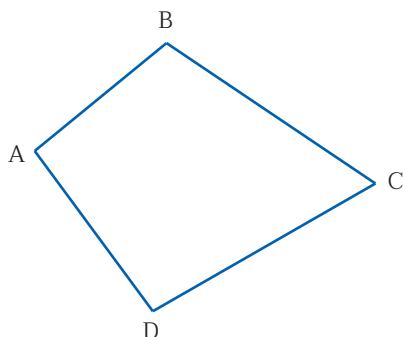
1. อธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม
2. นำทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

1. นักเรียนอาจเข้าใจคลาดเคลื่อนว่า รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่มีจุดยอดบางจุดไม่อยู่บนวงกลม เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม เช่น



2. เมื่อนักเรียนได้เรียนทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมแล้ว อาจทำให้เข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการหาขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม โดยเข้าใจว่าสามารถใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมมาช่วยในการหาได้ โดยไม่ได้คำนึงว่ารูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลมหรือไม่ เช่น



จาก  $\square ABCD$  อาจเข้าใจว่า  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$  และ  $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$  โดยไม่ได้คำนึงว่า  $\square ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมหรือไม่



### สิ่งที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. อุปกรณ์ของกิจกรรม : สำรวมุมที่จุดศูนย์กลาง
2. อุปกรณ์ของกิจกรรม : สำรวมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม
3. อุปกรณ์ของกิจกรรม : สำรวรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม
4. ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP)



### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องทฤษฎีบทของวงกลมที่เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งนักเรียนจะได้ทำกิจกรรมเพื่อสร้างความรู้ใหม่ผ่านการลงมือปฏิบัติ รวมถึงการสำรวจโดยใช้ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) ทั้งนี้ การเรียนเรื่องนี้มุ่งให้นักเรียนเข้าใจทฤษฎีบท และสามารถนำไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทำได้ดังนี้

1. ครูใช้การสนทนาเกี่ยวกับสิ่งต่าง ๆ ในชีวิตจริงที่มีลักษณะคล้ายวงกลม เพื่อเชื่อมโยงไปยังวงกลมในทางคณิตศาสตร์ และบททวนส่วนต่าง ๆ ของวงกลมที่นักเรียนรู้จักมาแล้ว
2. ครูแนะนำให้นักเรียนรู้จักส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลมที่เป็นพื้นฐานในการเรียนหัวข้อนี้ ซึ่งได้แก่ ครึ่งวงกลม ส่วนโค้งใหญ่ ส่วนโค้งน้อย มุมที่จุดศูนย์กลาง มุมในส่วนโค้งของวงกลม และมุมในครึ่งวงกลม ทั้งนี้ ครูอาจใช้ชวนคิด 2.1 ในหนังสือเรียน หน้า 53 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม
3. ครูควรให้นักเรียนได้สำรวจ และสร้างข้อความคาดการณ์ โดยใช้ “กิจกรรม : สำรวมุมที่จุดศูนย์กลาง” ในหนังสือเรียน หน้า 54 และบทสนทนาระหว่างข้าวสวยและข้าวกล้อง รวมทั้งชวนคิด 2.2 และข้อคำถามของข้าวหอม ในหนังสือเรียน หน้า 55 เพื่อนำไปสู่การสรุปความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางกับความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้น ดังนี้
  - 1) ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน
  - 2) ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
  - 3) ในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน
  - 4) ในวงกลมเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน
 ทั้งนี้ การศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมภายหลังจากนี้ จะศึกษาจากวงกลมเพียงวงเดียวเท่านั้น เนื่องจากวงกลมสองวงที่เท่ากันทุกประการจะมีสมบัติต่าง ๆ เหมือนกัน เช่น เส้นรอบวงยาวเท่ากัน พื้นที่เท่ากัน ดังนั้นในการศึกษาสมบัติเกี่ยวกับวงกลมจากวงกลมที่เท่ากันทุกประการสองวง จึงศึกษาจากวงกลมเพียงวงเดียวก็เป็นการเพียงพอ

4. ครูควรให้นักเรียนได้สำรวจ คาคการณ์ และสรุปความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางกับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน โดยใช้ “กิจกรรม : สำรวจมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม” ในหนังสือเรียน หน้า 57 และอาจใช้มุมเทคโนโลยีในหนังสือเรียน หน้า 58 โดยดาวน์โหลดสื่อสำเร็จรูปสำหรับซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) เพื่อยืนยันข้อความคาคการณ์ที่ได้ก่อนที่จะสรุปเป็นทฤษฎีบท

การสอนทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมและส่วนโค้งที่รองรับมุม และทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมในครึ่งวงกลม จะใช้ทฤษฎีบทที่เรียนมาแล้วในการพิสูจน์และให้เหตุผล

สำหรับทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม ครูควรให้นักเรียนได้สำรวจ คาคการณ์ และสรุปความสัมพันธ์ของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม โดยใช้ “กิจกรรม : สำรวจรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม” ในหนังสือเรียน หน้า 66 และอาจใช้มุมเทคโนโลยีในหนังสือเรียน หน้า 67 โดยดาวน์โหลดสื่อสำเร็จรูปสำหรับซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) เพื่อยืนยันข้อความคาคการณ์ที่ได้ก่อนที่จะสรุปเป็นทฤษฎีบท

5. เนื่องจากจุดประสงค์ของบทเรียนเน้นการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหา ดังนั้น แบบฝึกหัดที่ให้นักเรียนหาขนาดของมุมต่าง ๆ นั้น มีเจตนาให้นักเรียนได้ฝึกการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการให้เหตุผลจากการหาขนาดของมุม ดังเช่นตัวอย่างที่ 1 ในหนังสือเรียน หน้า 61

สำหรับแบบฝึกหัด 2.1 ก ข้อ 5 เป็นโจทย์เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม เจตนาให้นักเรียนใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทที่เรียนมาแล้วแก้ปัญหา โดยครูอาจใช้แบบฝึกหัดข้อนี้มาอภิปรายอีกครั้ง หลังจากทีนักเรียนได้เรียนทฤษฎีบทของวงกลมเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมแล้ว เพื่อชี้ให้นักเรียนเห็นว่า ในการแก้ปัญหานี้ อาจทำได้หลายวิธี

6. สำหรับทฤษฎีบทของวงกลมในเรื่องรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม หนังสือเรียนจะไม่แสดงการพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบทที่กล่าวว่า “ถ้าผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม” ไว้ให้ แต่สำหรับนักเรียนที่มีความสนใจ ครูอาจให้นักเรียนศึกษาด้วยตนเอง โดยดาวน์โหลดบทพิสูจน์จาก QR Code ทำยบทสนทนาของข้าวปั้นและข้าวหอม ในหนังสือเรียน หน้า 68 ทั้งนี้แนวคิดในการพิสูจน์จะเป็นการพิสูจน์ทางอ้อม ซึ่งแตกต่างจากการพิสูจน์ที่นักเรียนได้เคยเรียนรู้อยู่มา กล่าวคือในการพิสูจน์บทกลับนี้จะพิสูจน์โดยสมมุติให้ผลที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จ แล้วให้เหตุผลจนเกิดข้อขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดให้หรือสิ่งที่ทราบว่าเป็นจริง จึงสรุปได้ว่า ผลที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง

## กิจกรรม : สสำรวจมุมที่จุดศูนย์กลาง

กิจกรรมนี้เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้สำรวจ คาดการณ์ และสรุปความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางกับความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น โดยลงมือปฏิบัติจริง แล้วนำข้อสรุปที่ได้มาอภิปรายร่วมกัน โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

### สื่อ/อุปกรณ์

1. กระดาษรูปวงกลมที่เท่ากันทุกประการ และกำหนดตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมาให้ 1 แผ่น/คน
2. โพรแทรกเตอร์ หรือวงเวียน
3. กรรไกร

### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 5 คน และแจกกระดาษรูปวงกลมที่เท่ากันทุกประการให้นักเรียนทุกคน จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มกำหนดขนาดของมุมที่น้อยกว่า  $180^\circ$  มาหนึ่งมุม เช่น  $30^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $150^\circ$  หรืออาจใช้การพับกระดาษเพื่อกำหนดขนาดของมุม
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคนใช้โพรแทรกเตอร์ หรือวงเวียน สร้างมุมที่จุดศูนย์กลางลงบนกระดาษรูปวงกลม ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กลุ่มกำหนดขึ้น โดยครูอาจแนะนำให้นักเรียนสร้างรัศมีของวงกลมที่จะใช้เป็นแขนของมุมแขนหนึ่งก่อน แล้วจึงใช้โพรแทรกเตอร์วัดมุมเพื่อสร้างมุมตามขนาดที่กำหนด หรือในกรณีที่นักเรียนใช้การพับกระดาษเพื่อกำหนดขนาดของมุม การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับมุมดังกล่าว จะต้องใช้วงเวียนในการสร้าง
3. ครูให้นักเรียนแต่ละคนตัดมุมที่จุดศูนย์กลางของกระดาษรูปวงกลม โดยใช้กรรไกรตัดตามส่วนของเส้นตรงที่เป็นรัศมีของวงกลม
4. ครูให้นักเรียนในกลุ่มแต่ละคนนำกระดาษชิ้นที่ตัดมาพิจารณาร่วมกัน โดยอาจนำมาวางในลักษณะเดียวกัน หรือวางซ้อนทับกัน เพื่อเปรียบเทียบขนาดของมุม และความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น
5. ครูให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลาง และความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น แล้วตอบคำถามท้ายกิจกรรม จากนั้นครูนำอภิปรายเกี่ยวกับข้อความคาดการณ์ของนักเรียนทั้งชั้นเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางกับความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมเมื่อกำหนดวงกลมที่เท่ากันทุกประการมาให้

## เฉลยคำถามท้ายกิจกรรม : สสำรวจมุมที่จุดศูนย์กลาง

1. ส่วนโค้งของกระดาษทุกชิ้นที่ตัดมาได้ของนักเรียนในกลุ่มเดียวกันยาวเท่ากัน เพราะทับกันได้สนิทพอดี
2. ถ้าววงกลมที่เท่ากันทุกประการ มีขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

## กิจกรรม : สสำรวจมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้สำรวจ คาคการณ์ และสรุปความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางกับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน โดยลงมือปฏิบัติจริง แล้วนำข้อสรุปที่ได้ไปอภิปรายร่วมกัน โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

1. กระดาษรูปวงกลมขนาดแตกต่างกัน ที่กำหนดตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมาให้ 5 แผ่น/กลุ่ม
2. กรรไกร



### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 5 คน และแจกกระดาษรูปวงกลมที่มีขนาดแตกต่างกันให้นักเรียน คนละ 1 แผ่น
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคนสร้างมุมที่จุดศูนย์กลางให้มีขนาดเท่าใดก็ได้ลงบนกระดาษรูปวงกลม และสร้างมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันกับส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น อย่างน้อยคนละ 3 มุม
3. ครูให้นักเรียนแต่ละคนตัดมุมที่จุดศูนย์กลางของกระดาษรูปวงกลมของตนเองออกมา โดยใช้กรรไกรตัดตามส่วนของเส้นตรงที่เป็นรัศมีของวงกลม
4. ครูให้นักเรียนนำกระดาษชิ้นที่ตัดมาซึ่งเป็นเซกเตอร์ของวงกลม มาพับครึ่งมุมของเซกเตอร์นั้น แล้วนำไปวางทับกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่สร้างขึ้นในข้อ 2 ทุกมุม เพื่อเปรียบเทียบขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางกับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมทั้งสามมุม
5. ครูให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางกับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมทั้งสามมุนั้น แล้วตอบคำถามท้ายกิจกรรม จากนั้นครูนำอภิปรายเกี่ยวกับข้อความคาดการณ์ของนักเรียนทั้งชั้นเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางกับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม

## เฉลยคำถามท้ายกิจกรรม : สสำรวจมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

1. ทับกันสนิท
2. เหมือนกัน กล่าวคือ มุมที่จุดศูนย์กลางที่พับครึ่งจะทับกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมสนิทพอดี
3. ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน  
หรือ ในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมจะมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

## กิจกรรม : สำนัรจรูปสี่เหลี่ยนแนบในวงกลม

กิจกรรมนี้เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้สำรจ คาคการณ และสรุปรเกี่ยวกับผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยนแนบในวงกลม โดยลงมือปฏิบัติจริง แล้วนำข้อสรุปรที่ได้ไปอภิปรายร่วมกัน โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมดังนี้

### สื่อ/อุปกรณ์

1. กระดาษรูปวงกลมขนาดแตกต่างกัน ที่กำหนดตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมาให้ 5 แผ่น/กลุ่ม
2. กรรไกร

### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 5 คน และแจกกระดาษรูปวงกลมที่มีขนาดแตกต่างกันให้นักเรียน คนละ 1 แผ่น
2. ครูให้นักเรียนแต่ละคนสร้างรูปสี่เหลี่ยนใด ๆ ลงบนกระดาษรูปวงกลมโดยให้จุดยอดทั้งสี่อยู่บนวงกลม
3. ครูให้นักเรียนแต่ละคนตัดมุมของรูปสี่เหลี่ยนออกมา 1 มุม แล้วนำมุมชิ้นที่ตัดมานั้น ไปต่อกับมุมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่ตัดออกมา แล้วพิจารณาผลรวมของขนาดของมุมที่นำมาต่อกัน
4. ครูให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยนแนบในวงกลม แล้วตอบคำถามท้ายกิจกรรม จากนั้นครูนำอภิปรายเกี่ยวกับข้อความคาคการณของนักเรียนทั้งชั้น เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปรเกี่ยวกับผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยนแนบในวงกลม

## เฉลยคำถามท้ายกิจกรรม : สำนัรจรูปสี่เหลี่ยนแนบในวงกลม

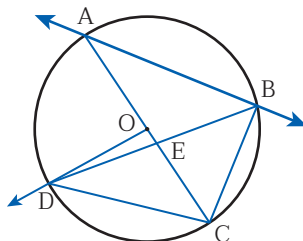
1. ผลรวมของขนาดของมุมที่ได้นำจะเท่ากับ  $180^\circ$  หรือสองมุมฉาก เพราะแขนของมุมทั้งสองที่ไม่ใช่แขนที่ร่วมกันอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
2. เหมือนกัน
3. ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยนแนบในวงกลม เท่ากับ  $180^\circ$  หรือสองมุมฉาก

## เฉลยชวนคิด



ipst.me/11421

## ชวนคิด 2.1



| ข้อ                      | ชื่อของมุม                  | ส่วนโค้งที่รองรับมุม              |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| 1. มุมที่จุดศูนย์กลาง    | $\angle AOC$                | $\widehat{ABC}$ , $\widehat{ADC}$ |
|                          | $\angle AOD$                | $\widehat{AD}$                    |
|                          | มุมกลับ $\angle AOD$        | $\widehat{ABD}$                   |
|                          | $\angle COD$                | $\widehat{CD}$                    |
|                          | มุมกลับ $\angle COD$        | $\widehat{CBD}$                   |
| 2. มุมในส่วนโค้งของวงกลม | $\angle ABC$                | $\widehat{ADC}$                   |
|                          | $\angle ABD$ , $\angle ACD$ | $\widehat{AD}$                    |
|                          | $\angle ACB$                | $\widehat{AB}$                    |
|                          | $\angle BAC$ , $\angle BDC$ | $\widehat{BC}$                    |
|                          | $\angle BCD$                | $\widehat{BAD}$                   |
|                          | $\angle CBD$                | $\widehat{CD}$                    |
| 3. มุมในครึ่งวงกลม       | $\angle ABC$                | $\widehat{ADC}$                   |



ipst.me/11422

## ชวนคิด 2.2

1. ทับกันได้สนิท
2. ยาวเท่ากัน เพราะรูปเรขาคณิตที่ทับกันได้สนิทพอดี จะเท่ากันทุกประการ และเนื่องจากเซกเตอร์ COW สามารถหมุนไปทับกับเซกเตอร์ DOG ได้สนิท จึงทำให้  $\widehat{CW}$  ยาวเท่ากับ  $\widehat{DG}$  ด้วย
3. ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางทั้งสองนั้น จะยาวเท่ากัน

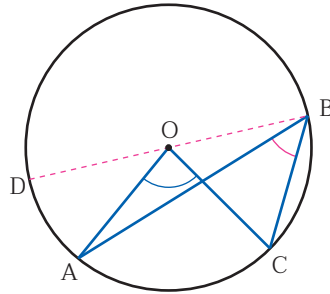




ipst.me/11423

## ชวนคิด 2.3

เป็นจริง และมีวิธีการพิสูจน์ดังนี้



รูป 1

กำหนดให้ วงกลม O มี  $\widehat{ABC}$  และ  $\widehat{AOC}$  รองรับด้วย  $\widehat{AC}$  เดียวกันต้องการพิสูจน์ว่า  $\widehat{AOC} = 2(\widehat{ABC})$ 

พิสูจน์ ลากเส้นผ่านศูนย์กลาง BD

เนื่องจาก  $AO = OB$ จะได้  $\triangle ABO$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วดังนั้น  $\angle OAB = \angle OBA$ เนื่องจาก  $\angle DOA = \angle OAB + \angle OBA$ 

(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

(ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ

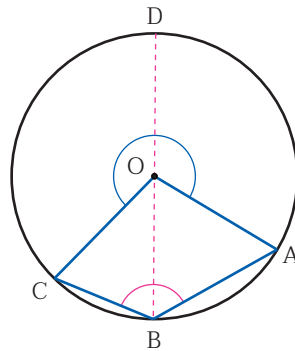
ผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด

ของมุมภายนอกนั้น)

 $(\angle OAB = \angle OBA)$ จะได้  $\angle DOA = 2(\angle OBA)$ ในทำนองเดียวกัน  $\angle DOC = 2(\angle OBC)$ จะได้  $\angle DOC - \angle DOA = 2(\angle OBC) - 2(\angle OBA)$ 

(สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น  $\angle AOC = 2(\angle OBC - \angle OBA) = 2(\widehat{ABC})$



รูป 2

กำหนดให้ วงกลม O มี  $\triangle ABC$  และมุมกลับ  $\angle AOC$  รองรับด้วยส่วนโค้งใหญ่  $AC$  เดียวกัน

ต้องการพิสูจน์ว่า มุมกลับ  $\angle AOC = 2(\angle ABC)$

พิสูจน์ ลากเส้นผ่านศูนย์กลาง  $BD$

เนื่องจาก  $AO = OB$

(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

จะได้  $\triangle ABO$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

ทำให้  $\angle OAB = \angle OBA$

(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

จาก  $\angle DOA = \angle OAB + \angle OBA$

(ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น)

จะได้  $\angle DOA = 2(\angle OBA)$

( $\angle OAB = \angle OBA$ )

ในทำนองเดียวกัน  $\angle DOC = 2(\angle OBC)$

จะได้  $\angle DOC + \angle DOA = 2(\angle OBC) + 2(\angle OBA)$

(สมบัติของการเท่ากัน)

มุมกลับ  $\angle AOC = \angle DOC + \angle DOA$

ดังนั้น มุมกลับ  $\angle AOC = 2(\angle OBC + \angle OBA) = 2(\angle ABC)$



ipst.me/11424

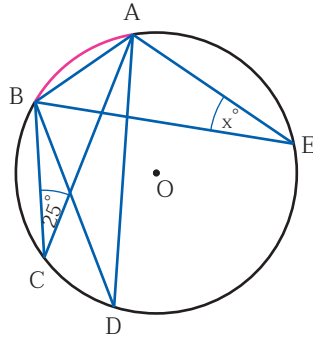
### ชวนคิด 2.4

เป็นจริง

## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 2.1 ก

#### 1. 1) แนวคิด



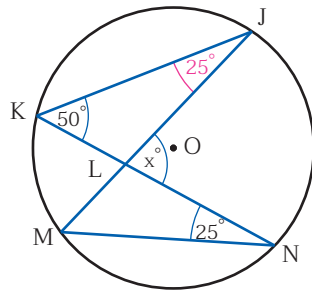
จากทฤษฎีบทที่ว่า ในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จะมีขนาดเท่ากัน

จากรูป จะเห็นว่า  $\widehat{BCA}$  และ  $\widehat{BEA}$  ต่างเป็นมุมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง BA

ดังนั้น  $\widehat{BCA} = \widehat{BEA}$

นั่นคือ  $x = 25$

#### 2) แนวคิด จากทฤษฎีบทที่ว่า ในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน



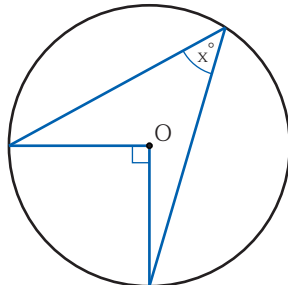
จากรูป จะเห็นว่า  $\widehat{MNL}$  และ  $\widehat{MJK}$  ต่างเป็นมุมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง MK

ดังนั้น  $\widehat{MNL} = \widehat{MJK} = 25^\circ$

และเนื่องจากขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

ดังนั้น  $x = 50 + 25 = 75$

#### 3) แนวคิด

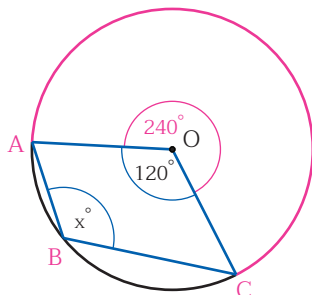


จากทฤษฎีบทที่ว่า ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

จากรูป จะเห็นว่า มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม O มีขนาด  $90^\circ$

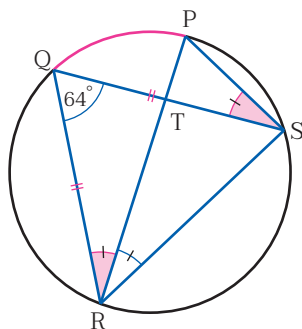
ดังนั้น  $x = 45$

- 4) **แนวคิด** จากทฤษฎีบทที่ว่า ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



จากรูป จะเห็นว่า  $\angle ABC$  รองรับด้วยส่วนโค้งใหญ่  $\widehat{AC}$  เนื่องจากมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งใหญ่  $\widehat{AC}$  คือ มุมกลับ  $\angle AOC$  และจาก มุมกลับ  $\angle AOC = 360 - 120 = 240^\circ$  ดังนั้น  $x = 120$

## 2. แนวคิด



เนื่องจาก  $\triangle RQS$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  
จะได้  $\angle RQS = \angle RSQ$   
เนื่องจาก  $\angle RQS + \angle RSQ + \angle QRS = 180^\circ$

$$\text{ดังนั้น} \quad 2(\angle RQS) + 64 = 180$$

$$\text{จะได้} \quad \angle RQS = 58^\circ$$

เนื่องจาก  $\angle RQS = \angle RQP + \angle PRS$

และ  $\angle RQP = \angle PRS$

$$\text{จะได้} \quad \angle RQP = \frac{\angle RQS}{2} = \frac{58}{2} = 29^\circ$$

และจาก  $\angle RQP = \angle PSQ$

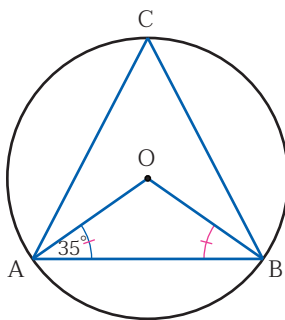
$$\text{ดังนั้น} \quad \angle PSQ = 29^\circ$$

( $QR = QS$  และบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)  
(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)  
(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )

( $\overline{RP}$  แบ่งครึ่ง  $\angle QRS$ )

(มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน)

## 3. แนวคิด



เนื่องจาก  $OA = OB$

จะได้ว่า  $\triangle AOB$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น  $\angle OBA = \angle OAB = 35^\circ$

เนื่องจาก  $\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180^\circ$

จะได้

$$\angle AOB = 180 - (35 + 35)$$

ดังนั้น

$$\angle AOB = 110^\circ$$

นั่นคือ  $\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{110}{2} = 55^\circ$

(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

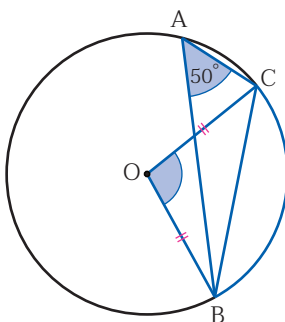
(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )

(มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

## 4. แนวคิด



เนื่องจาก  $\angle BAC = 50^\circ$

ดังนั้น  $\angle BOC = 2(\angle BAC) = 100^\circ$

เนื่องจาก  $OB = OC$

จะได้ว่า  $\triangle BOC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น  $\angle OBC = \angle OCB$

(กำหนดให้)

(มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

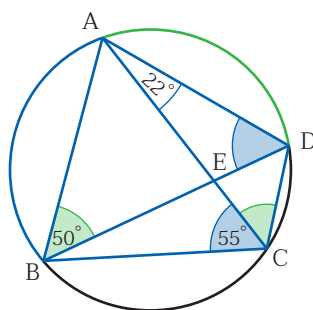
เนื่องจาก  $\widehat{BOC} + \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180^\circ$  (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )

จะได้  $100 + 2(\widehat{OCB}) = 180$

ดังนั้น  $\widehat{OCB} = 40^\circ$

นั่นคือ  $\widehat{BOC} = 100^\circ$  และ  $\widehat{OCB} = 40^\circ$

### 5. แนวคิด



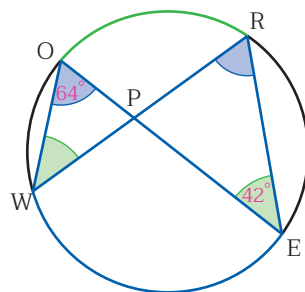
เนื่องจาก  $\widehat{ACD} = \widehat{ABE} = 50^\circ$  } (มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน)  
และ  $\widehat{ADB} = \widehat{BCE} = 55^\circ$  }

เนื่องจาก  $\widehat{CAD} + \widehat{ACD} + (\widehat{ADB} + \widehat{CDE}) = 180^\circ$  (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )

จะได้  $\widehat{CDE} = 180 - (22 + 50 + 55)$

ดังนั้น  $\widehat{CDE} = 53^\circ$

### 6.



1) แนวคิด เนื่องจาก  $\widehat{POW} = 64^\circ$  (กำหนดให้)

ดังนั้น  $\widehat{PRE} = \widehat{POW} = 64^\circ$  (มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน)

และเนื่องจาก  $\widehat{PER} = 42^\circ$  (กำหนดให้)

ดังนั้น  $\widehat{PWO} = \widehat{PER} = 42^\circ$  (มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก  $\widehat{POW} + \widehat{PWO} + \widehat{OPW} = 180^\circ$  (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \widehat{OPW} &= 180 - (64 + 42) \\ \text{ดังนั้น} \quad \widehat{OPW} &= 74^\circ \end{aligned}$$

2) **แนวคิด** เนื่องจาก  $\widehat{RPE}$  เป็นมุมตรงข้ามกับ  $\widehat{OPW}$  และจากข้อ 1)

$$\text{จึงได้ว่า } \widehat{RPE} = \widehat{OPW} = 74^\circ$$

ดังนั้น  $\triangle POW \sim \triangle PRE$  เพราะมีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ 3 คู่

$$\text{จะได้ว่า } \frac{PO}{PR} = \frac{PW}{PE}$$

$$\frac{2.8}{4.2} = \frac{5.6}{PE}$$

$$\text{ดังนั้น } PE = 8.4 \text{ หน่วย}$$

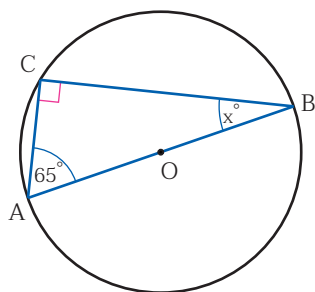
3) **แนวคิด** จากข้อ 2) เราทราบมาแล้วว่า  $\triangle POW \sim \triangle PRE$  และ  $\frac{PO}{PR} = \frac{PW}{PE}$

$$\text{ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า } PR \cdot PW = PO \cdot PE$$

### แบบฝึกหัด 2.1 ข

**คำชี้แจง** สำหรับแนวคิดในการหาคำตอบในบางข้ออาจทำได้หลายวิธี แนวคิดที่นำเสนอไว้เป็นเพียงวิธีหาคำตอบวิธีหนึ่ง ซึ่งครูผู้สอนอาจมีแนวคิดที่แตกต่างไปจากนี้

1. 1) **แนวคิด** จากทฤษฎีบทที่ว่า มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$  หรือหนึ่งมุมฉาก



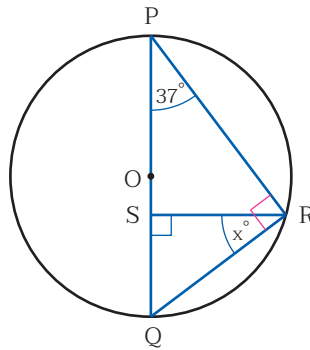
จากรูป จะได้ว่า  $\widehat{ACB} = 90^\circ$

และเนื่องจากขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$

$$\text{จึงได้ว่า } \widehat{ABC} = 180 - (90 + 65) = 25^\circ$$

$$\text{นั่นคือ } x = 25$$

2) **แนวคิด** จากทฤษฎีบทที่ว่า มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$  หรือหนึ่งมุมฉาก



จากรูป จะได้ว่า  $\widehat{PRQ} = 90^\circ$

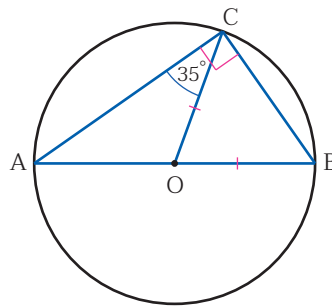
และเนื่องจากขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$

จึงได้ว่า  $\widehat{PQR} = 180 - (37 + 90) = 53^\circ$

และ  $\widehat{SRQ} = 180 - (53 + 90) = 37^\circ$

ดังนั้น  $x = 37$

2. **แนวคิด**



เนื่องจาก  $\widehat{ACO} + \widehat{OCB} = 90^\circ$

และ  $\widehat{ACO} = 35^\circ$

ดังนั้น  $\widehat{OCB} = 90 - 35 = 55^\circ$

และเนื่องจาก  $OC = OB$

จะได้ว่า  $\triangle BOC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น  $\widehat{OBC} = 55^\circ$

(มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$ )

(กำหนดให้)

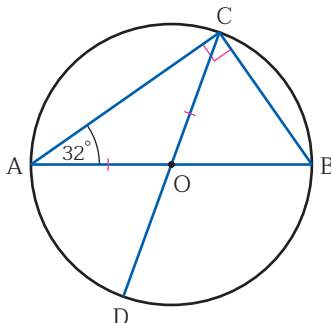
(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)



## 3. แนวคิด



เนื่องจาก  $OC = OA$

จะได้ว่า  $\triangle AOC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

และจาก  $\angle OAC = 32^\circ$

ดังนั้น  $\angle ACO = 32^\circ$

เนื่องจาก  $\angle ACO + \angle BCO = 90^\circ$

ดังนั้น  $\angle BCO = 90 - 32 = 58^\circ$

(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

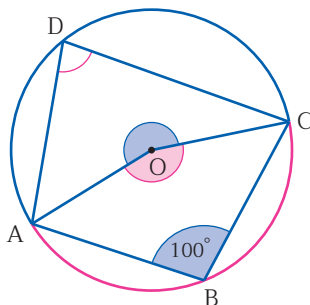
(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

(กำหนดให้)

(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

(มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$ )

## 4. แนวคิด



1) มุมกลับ  $\angle AOC = 2(\angle ABC) = 200^\circ$

2)  $\angle AOC = 360 - \text{มุมกลับ } \angle AOC = 160^\circ$

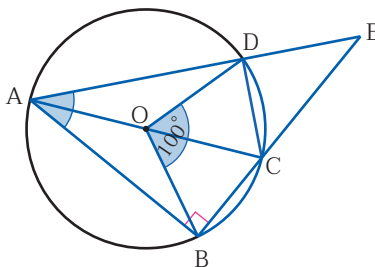
3)  $\angle ADC = \frac{1}{2}(\angle AOC) = 80^\circ$

(มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

(มุมรอบจุดมีขนาด  $360^\circ$ )

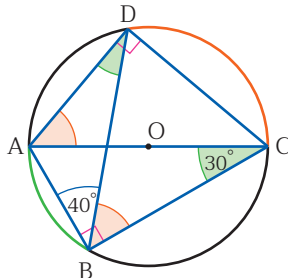
(มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

## 5. แนวคิด



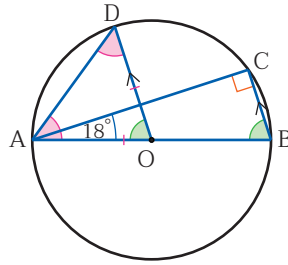
- เนื่องจาก  $\widehat{ABC} = 90^\circ$  (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$ )  
 $\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BOD}}{2} = 50^\circ$  (มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)  
 จะได้  $\widehat{AEB} = 180 - (90 + 50)$  (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )  
 ดังนั้น  $\widehat{AEC} = 40^\circ$

## 6. แนวคิด



- เนื่องจาก  $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 30^\circ$  (มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีขนาดเท่ากัน)  
 และ  $\widehat{ADC} = 90^\circ$  (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$ )  
 ดังนั้น  $\widehat{BDC} = 90 - 30 = 60^\circ$   
 เนื่องจาก  $\widehat{ABC} = 90^\circ$  (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$ )  
 จะได้  $\widehat{DBC} = 90 - 40 = 50^\circ$   
 ดังนั้น  $\widehat{CAD} = \widehat{DBC} = 50^\circ$  (มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีขนาดเท่ากัน)  
 นั่นคือ  $\widehat{BDC} = 60^\circ$  และ  $\widehat{CAD} = 50^\circ$

## 7. แนวคิด



เนื่องจาก  $\angle ACB = 90^\circ$

(มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$ )

จะได้  $\angle ABC = 180 - (90 + 18) = 72^\circ$

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )

เนื่องจาก  $\angle AOD = \angle ABC$

(มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นที่ตัดเส้นขนาน จะมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น  $\angle AOD = 72^\circ$

(สมบัติของการเท่ากัน)

เนื่องจาก  $OA = OD$

(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

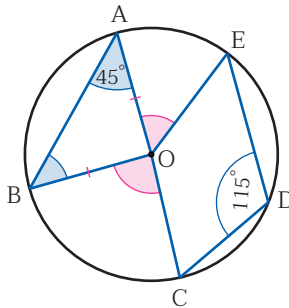
จะได้ว่า  $\triangle AOD$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

ดังนั้น  $\angle ADO = \angle OAD = \frac{180 - 72}{2} = 54^\circ$

(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

## 8. แนวคิด



เนื่องจาก  $OA = OB$

(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

จะได้ว่า  $\triangle AOB$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

ดังนั้น  $\angle ABO = 45^\circ$

นั่นคือ  $\angle AOB = 180 - (45 + 45) = 90^\circ$

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )

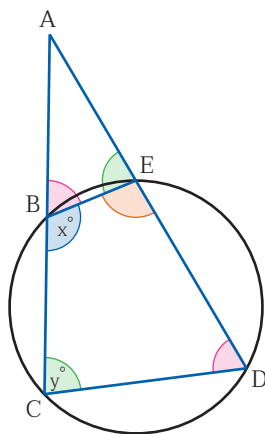
เนื่องจาก มุมกลับ  $\angle COE = 2(\angle CDE) = 230^\circ$

(มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน)

ดังนั้น  $\angle AOE + \angle BOC = 230 - 90 = 140^\circ$

(มุมกลับ  $\angle COE = \angle AOE + \angle AOB + \angle BOC$ )

## 9. แนวคิด

พิจารณา  $\triangle CAD$  และ  $\triangle EAB$ เนื่องจาก  $\widehat{CAD} = \widehat{EAB}$ 

$$\widehat{ACD} = \widehat{AEB}$$

$$\widehat{ADC} = \widehat{AEB}$$

ดังนั้น  $\triangle CAD \sim \triangle EAB$  เพราะมีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ 3 คู่กำหนดให้  $\widehat{CBE} = x^\circ$  และ  $\widehat{ACD} = y^\circ$ เนื่องจาก  $\square BCDE$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

$$\text{จึงได้ว่า } \widehat{ADC} = (180 - x)^\circ$$

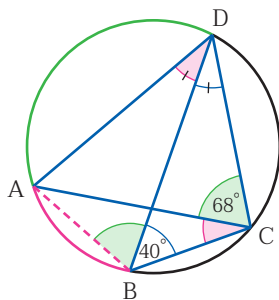
$$\text{และ } \widehat{DEB} = (180 - y)^\circ$$

และเนื่องจาก  $\overline{BA}$  และ  $\overline{EA}$  เป็นส่วนของเส้นตรง  
ที่ลากต่อจาก  $\overline{CB}$  และ  $\overline{DE}$  ตามลำดับจึงทำให้  $\widehat{CBA}$  และ  $\widehat{DEA}$  เป็นมุมตรง

$$\text{ดังนั้น } \widehat{ABE} = (180 - x)^\circ$$

$$\text{และ } \widehat{AEB} = 180 - (180 - y) = y^\circ$$

(มุมร่วม)

(ต่างมีขนาดเท่ากับ  $y^\circ$ )(ต่างมีขนาดเท่ากับ  $(180 - x)^\circ$ )10. แนวคิด ลาก  $\overline{AB}$  จะได้  $\square ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

$$\text{เนื่องจาก } \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 68^\circ$$

$$\text{จะได้ } \widehat{ADC} = 180 - \widehat{ABC}$$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{ADC} = 180 - (68 + 40) = 72^\circ$$

$$\text{เนื่องจาก } \widehat{ADB} = \widehat{BCD}$$

$$\text{จะได้ } \widehat{ADB} = \frac{\widehat{ADC}}{2} = 36^\circ$$

$$\text{เนื่องจาก } \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{ACB} = 36^\circ$$

(มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน  
มีขนาดเท่ากัน)(ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยม  
แนบในวงกลมเป็น  $180^\circ$ )

(กำหนดให้)

(มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน  
มีขนาดเท่ากัน)

## 2.2 คอร์ดของวงกลม (5 ชั่วโมง)

### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

1. อธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลม
2. นำทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

### สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

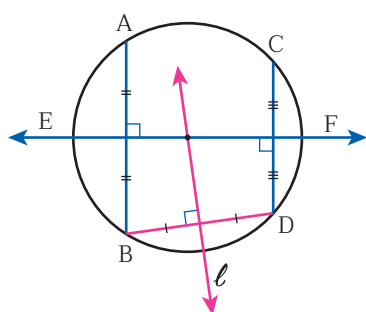
ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP)

### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลม ซึ่งเน้นให้นักเรียนใช้สมบัติและทฤษฎีบทที่เรียนมาแล้วในการพิสูจน์และให้เหตุผล และสำรวจโดยใช้ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) การเรียนเรื่องนี้ มุ่งให้นักเรียนเข้าใจทฤษฎีบท และสามารถนำไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

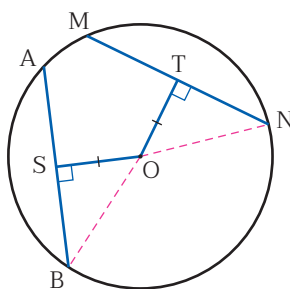
1. ครูแนะนำให้นักเรียนรู้จักคอร์ดของวงกลม เพื่อนำไปใช้ในการศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดของวงกลม โดยเน้นการให้เหตุผลและการพิสูจน์แบบไม่เป็นทางการ เพื่อให้ได้ข้อสรุปตามทฤษฎีบท และใช้มุมเทคโนโลยีในหนังสือเรียน หน้า 74–75 และ 77 โดยดาวน์โหลดสื่อสำเร็จรูปสำหรับซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) เพื่อสำรวจความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับคอร์ดของวงกลม ได้แก่ ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของคอร์ดกับความยาวของส่วนโค้งของวงกลม ความสัมพันธ์ระหว่างคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม และสมบัติของคอร์ดที่ยาวเท่ากัน เพื่อยืนยันข้อสรุปที่ได้ตามลำดับ
2. การอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับจุดศูนย์กลางของวงกลมที่อยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลม ครูควรใช้การอธิบายในชั้นเรียน เพื่อชี้ให้นักเรียนเห็นว่า ทฤษฎีบทดังกล่าวมีประโยชน์ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของวงกลม ดังตัวอย่างการนำไปใช้ในแบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 10–11

ครูอาจให้ข้อสังเกตเพิ่มเติมว่า สำหรับการหาจุดศูนย์กลางของวงกลมในกรณีที่กำหนดให้คอร์ด 2 คอร์ดขนานกัน เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ดทั้งสองนั้น จะเป็นเส้นเดียวกัน ทำให้ไม่สามารถระบุตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของวงกลมได้ ดังนั้น จึงต้องสร้างคอร์ดใหม่เพิ่มเติม เช่น



จากรูป  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  และ  $\overleftrightarrow{EF}$  ตั้งฉาก  
และแบ่งครึ่ง  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$   
อาจลาก  $\overline{BD}$  แล้วสร้างเส้นตรง  $\ell$  ให้ตั้งฉาก  
และแบ่งครึ่ง  $\overline{BD}$  จะได้จุดตัดของเส้นตรง  $\ell$   
กับ  $\overleftrightarrow{EF}$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

3. ในการศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดที่ยาวเท่ากัน ครูควรให้นักเรียนได้ฝึกการนำความรู้ก่อนหน้ามาใช้ในการให้เหตุผลก่อนที่จะสรุปทฤษฎีบทดังกล่าว เช่น จากตารางในหนังสือเรียน หน้า 78 เหตุผลที่นักเรียนให้ควรเป็นดังนี้



| ข้อที่ | ข้อความ                             | เหตุผล                                                                                                                           |
|--------|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | $OB = ON$                           | รัศมีของวงกลมเดียวกัน                                                                                                            |
| 2      | $\angle OSB = \angle OTN$           | กำหนดให้ $\overline{OS} \perp \overline{AB}$ และ $\overline{OT} \perp \overline{MN}$                                             |
| 3      | $OS = OT$                           | กำหนดให้                                                                                                                         |
| 4      | $\triangle SOB \cong \triangle TON$ | เท่ากันทุกประการแบบ ฉ.ด.ด.                                                                                                       |
| 5      | $SB = TN$                           | ด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน                                                                  |
| 6      | $AB = MN$                           | ในทำนองเดียวกัน เมื่อลาก $\overline{OA}$ และ $\overline{OM}$<br>จะได้ว่า $\triangle SOA \cong \triangle TOM$ ซึ่งทำให้ $AS = MT$ |

สำหรับการให้เหตุผลในข้อ 6 นักเรียนอาจให้เหตุผลในลักษณะอื่น เช่น ใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว หรือใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดและจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ว่า “ถ้าส่วนของเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด”

4. เนื่องจากจุดประสงค์ของบทเรียนเน้นที่การนำทฤษฎีบทไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนั้นแบบฝึกหัดที่ให้นักเรียนหาขนาดของมุมต่าง ๆ นั้น มีเจตนาให้นักเรียนได้ใช้ทฤษฎีบทที่เรียนมาแล้ว ในการให้เหตุผลเกี่ยวกับการหาขนาดของมุม ดังตัวอย่างในหนังสือเรียน หน้า 79



## เฉลยชวนคิด



ipst.me/11425

### ชวนคิด 2.5

คอร์ดที่ยาวที่สุด คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

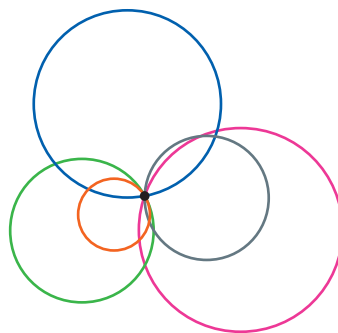
ความยาวของส่วนโค้งของวงกลมที่แบ่งด้วยคอร์ดดังกล่าวจะเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม



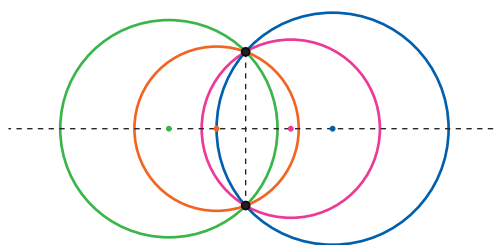
ipst.me/11426

### ชวนคิด 2.6

1. ถ้ากำหนดจุดบนระนาบมาให้ 1 จุด จะสามารถสร้างวงกลมให้ผ่านจุดดังกล่าวได้มากมายนับไม่ถ้วน เช่น

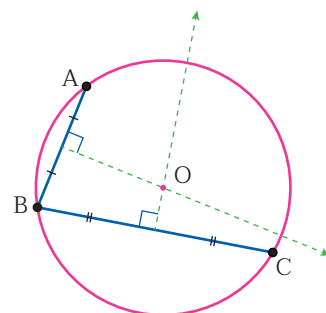


2. ถ้ากำหนดจุดบนระนาบมาให้ 2 จุด จะสามารถสร้างวงกลมให้ผ่านจุดทั้งสองได้มากมายนับไม่ถ้วน โดยวงกลมเหล่านั้นจะมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่มีจุดสองจุดนั้นเป็นจุดปลาย เช่น



3. ถ้ากำหนดจุดบนระนาบมาให้ 3 จุด ที่ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จะสามารถสร้างวงกลมให้ผ่านจุดทั้งสามได้เพียงวงเดียวเท่านั้น โดยสร้างได้ดังนี้

- 1) กำหนดให้จุดทั้งสามเป็นจุด A, B และ C แล้วสร้าง  $\overline{AB}$  และ  $\overline{BC}$
- 2) สร้างรังสี 2 เส้น ให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ  $\overline{AB}$  และ  $\overline{BC}$
- 3) กำหนดจุดตัดของรังสีทั้งสอง ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมให้ชื่อเป็นจุด O
- 4) สร้างวงกลม O ที่มีรัศมียาว OA, OB หรือ OC

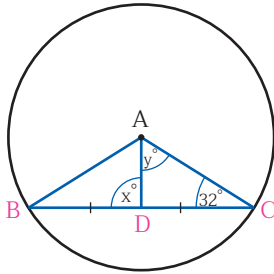




## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 2.2

1. 1) **แนวคิด** จากทฤษฎีบทที่ว่า เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ดจะตั้งฉากกับคอร์ด



จากรูป จะได้ว่า  $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$

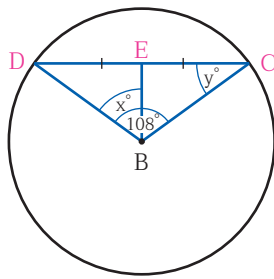
ดังนั้น  $x = 90$

และเนื่องจากขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$

ทำให้ได้ว่า  $\widehat{CAD} = 180 - (90 + 32) = 58^\circ$

ดังนั้น  $y = 58$

- 2) **แนวคิด** จากทฤษฎีบทที่ว่า เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ดจะตั้งฉากกับคอร์ด



จากรูป จะได้ว่า  $\widehat{BED} = \widehat{BEC} = 90^\circ$

และเนื่องจาก  $\triangle BED \cong \triangle BEC$  แบบ ด.ม.ด.

ทำให้ได้ว่า  $\widehat{DBE} = \widehat{CBE} = \frac{108}{2} = 54^\circ$

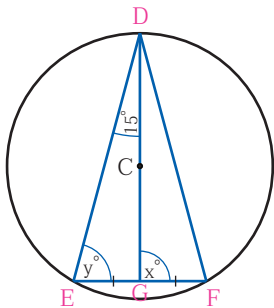
ดังนั้น  $x = 54$

และเนื่องจากขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$

ทำให้ได้ว่า  $\widehat{ECB} = 180 - (90 + 54) = 36^\circ$

ดังนั้น  $y = 36$

- 3) **แนวคิด** จากทฤษฎีบทที่ว่า เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ดจะตั้งฉากกับคอร์ด



จากรูป จะได้ว่า  $\widehat{DGF} = \widehat{DGE} = 90^\circ$

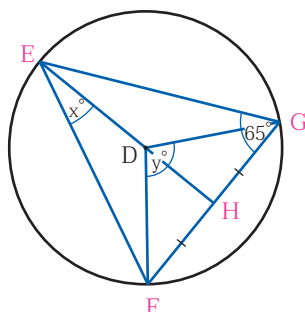
ดังนั้น  $x = 90$

และเนื่องจากขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$

ทำให้ได้ว่า  $\widehat{DEG} = 180 - (90 + 15) = 75^\circ$

ดังนั้น  $y = 75$

- 4) **แนวคิด** จากทฤษฎีบทที่ว่า เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ดจะตั้งฉากกับคอร์ด



จากรูป จะได้ว่า  $\angle EHF = \angle DHG = 90^\circ$

และเนื่องจาก  $\triangle EHF \cong \triangle DHG$  แบบ ด.ม.ด.

ทำให้ได้ว่า  $\angle EFH = \angle FGH = 65^\circ$  และ  $\angle FEH = \angle FGH$

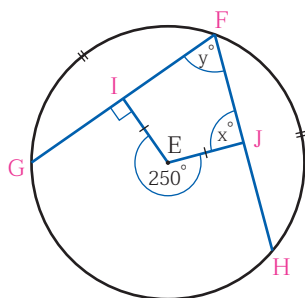
และเนื่องจากขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$

ดังนั้น  $\angle FEH = \angle FGH = 180 - (90 + 65) = 25^\circ$

นั่นคือ  $x = 25$

และจากทฤษฎีบทที่ว่า มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน ทำให้ได้ว่า  $\angle FDG = 2(\angle FEH) = 2(25 + 25) = 100^\circ$   
ดังนั้น  $y = 100$

- 5) **แนวคิด** จากทฤษฎีบทที่ว่า ถ้าคอร์ดสองเส้นตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองจะยาวเท่ากัน



จากรูป จะได้ว่า  $FG = FH$

และจากทฤษฎีบทที่ว่า ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน

จากรูป  $\angle EIG = 90^\circ$  แสดงว่า EI เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ด FG

ซึ่งจาก  $FG = FH$  และ  $EI = EJ$  ทำให้ EJ เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ด FH ด้วย  
ดังนั้น  $\angle EIJ = 90^\circ$

นั่นคือ  $x = 90$

เนื่องจาก  $\angle GEF$  เป็นมุมตรง ทำให้  $\angle EIF = 180 - 90 = 90^\circ$

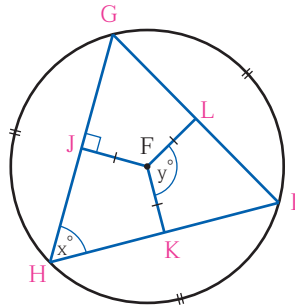
และจากมุมรอบจุด E ทำให้  $\angle IEJ = 360 - 250 = 110^\circ$

และเนื่องจากขนาดของมุมภายในทั้งสี่มุมของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันเป็น  $360^\circ$

ทำให้ได้ว่า  $\angle IFJ = 360 - (90 + 110 + 90) = 70^\circ$

นั่นคือ  $y = 70$

- 6) **แนวคิด** จากทฤษฎีบทที่ว่า ถ้าส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองจะยาวเท่ากัน



จากรูป จะได้ว่า  $GH = HI = IG$

ดังนั้น  $\triangle GHI$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

จะได้ว่า  $x = 60$  และ  $\widehat{HIG} = 60^\circ$

และจากทฤษฎีบทที่ว่า ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน

จากรูป  $\angle FJG = 90^\circ$  แสดงว่า FJ เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ด GH

จาก  $GH = HI = IG$  และ  $FJ = FK = FL$

ทำให้ FK เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ด HI

และ FL เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลางถึงคอร์ด IG

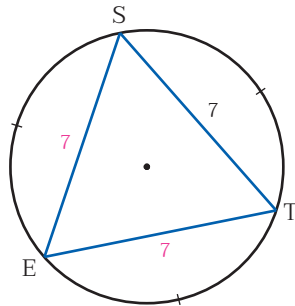
ดังนั้น  $\angle FKI = \angle FLI = 90^\circ$

เนื่องจากขนาดของมุมภายในทั้งสี่มุมของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันเป็น  $360^\circ$

ดังนั้น  $\angle KFL = 360 - (90 + 60 + 90) = 120^\circ$

นั่นคือ  $y = 120$

2. 1) **แนวคิด**



จากทฤษฎีบทที่ว่า ถ้าส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน

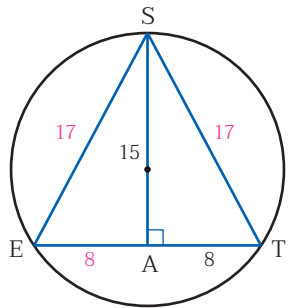
แล้วคอร์ดทั้งสองจะยาวเท่ากัน

ดังนั้น จะได้ว่า  $\triangle SET$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

จะได้  $SE = ET = TS = 7$  หน่วย

นั่นคือ ความยาวรอบรูปของ  $\triangle SET$  เท่ากับ 21 หน่วย

- 2) **แนวคิด**



จากทฤษฎีบทที่ว่า เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด

ดังนั้น  $EA = AT = 8$  หน่วย

และทำให้ได้ว่า  $\triangle SEA \cong \triangle STA$  แบบ ด.ม.ด.

ดังนั้น  $SE = ST$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

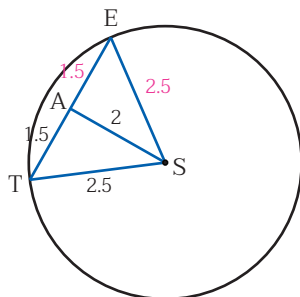
จะได้  $ST^2 = 15^2 + 8^2 = 289$

$ST = 17$

และ  $SE = 17$

ดังนั้น ความยาวรอบรูปของ  $\triangle SET = 17 + 17 + 8 + 8 = 50$  หน่วย

## 3) แนวคิด



เนื่องจาก  $\overline{ST}$  และ  $\overline{SE}$  ต่างเป็นรัศมีของวงกลม  
ดังนั้น  $ST = SE = 2.5$  หน่วย

$$\text{เนื่องจาก } 2.5^2 = 1.5^2 + 2^2$$

จากบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้  $\triangle SAT$   
เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี  $\angle SAT = 90^\circ$

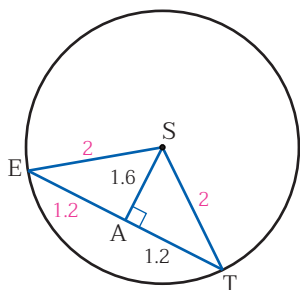
ดังนั้น  $\overline{SA}$  ตั้งฉากกับ  $\overline{TE}$

จากทฤษฎีบทที่ว่า เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลาง  
มาตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด

ทำให้ได้ว่า  $EA = AT = 1.5$  หน่วย

นั่นคือ ความยาวรอบรูปของ  $\triangle SET = 2.5 + 2.5 + 1.5 + 1.5 = 8$  หน่วย

## 4) แนวคิด จากทฤษฎีบทที่ว่า เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด



ดังนั้น  $EA = AT = 1.2$  หน่วย

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\text{จะได้ } ST^2 = 1.6^2 + 1.2^2 = 4$$

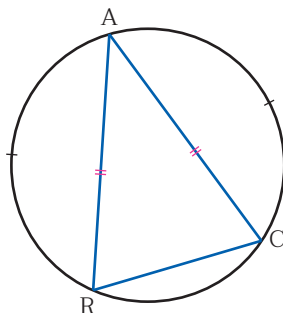
$$ST = 2$$

เนื่องจาก  $\overline{ST}$  และ  $\overline{SE}$  ต่างเป็นรัศมีของวงกลม

ดังนั้น  $ST = SE = 2$  หน่วย

นั่นคือ ความยาวรอบรูปของ  $\triangle SET = 2 + 2 + 1.2 + 1.2 = 6.4$  หน่วย

## 3. แนวคิด



เนื่องจาก  $m(\widehat{AR}) = m(\widehat{AC})$

จะได้  $AR = AC$

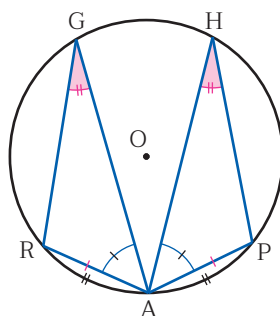
ดังนั้น  $\triangle ARC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

(กำหนดให้)

(ถ้าส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองจะยาวเท่ากัน)

(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

## 4. แนวคิด



เนื่องจาก  $m(\widehat{RA}) = m(\widehat{AP})$

จะได้  $\widehat{AGR} = \widehat{AHP}$

และ  $AR = AP$

เนื่องจาก  $\widehat{RAG} = \widehat{HAP}$

ดังนั้น  $\triangle AGR \cong \triangle AHP$

นั่นคือ  $\overline{HA}$  จะยาวเท่ากับ  $\overline{GA}$

(กำหนดให้)

(มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน)

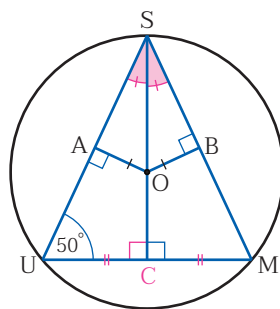
(ถ้าส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองจะยาวเท่ากัน)

(กำหนดให้)

(เท่ากันทุกประการแบบ ม.ม.ด.)

(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน)

## 5. แนวคิด



เนื่องจาก  $OA = OB$

จะได้  $SU = SM$

ดังนั้น  $\triangle SUM$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เนื่องจาก  $CU = CM$

และ  $SC = SC$

จะได้  $\triangle SUC \cong \triangle SMC$

ดังนั้น  $\widehat{SCU} = \widehat{SCM} = 90^\circ$

และ  $\widehat{CSU} = \widehat{CSM}$

(กำหนดให้)

(ถ้าคอร์ดสองคอร์ดอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน แล้วคอร์ดสองเส้นจะยาวเท่ากัน)

(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

( $\overline{SC}$  เป็นเส้นที่ตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

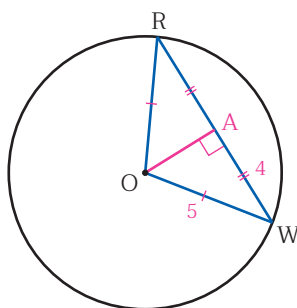
(ด้านร่วม)

(เท่ากันทุกประการแบบ ด.ด.ด.)

เนื่องจาก  $\widehat{CSU} = 180 - (50 + 90) = 40^\circ$  (ขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )  
 ดังนั้น  $\widehat{OSM} = 40^\circ$  ( $\widehat{OSM}$  และ  $\widehat{CSM}$  เป็นมุมเดียวกัน)

#### 6. แนวคิด

เนื่องจาก  $OR = OW = 5$  หน่วย (รัศมีของวงกลมเดียวกัน)  
 ดังนั้น  $\triangle ROW$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)  
 ลาก  $\overline{OA}$  ให้ตั้งฉากกับฐาน  $\overline{RW}$  ดังรูป



จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะได้  $AR = AW = 4$  หน่วย

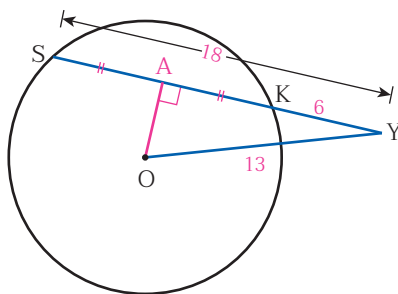
จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\text{จะได้ } OA^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$OA = 3$$

ดังนั้น  $\triangle ROW$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และมีพื้นที่  $= \frac{1}{2} \times 3 \times 8 = 12$  ตารางหน่วย

#### 7. แนวคิด ลาก $\overline{OA}$ ให้ตั้งฉากกับ $\overline{SK}$ จะได้ว่า $OA$ เป็นระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลาง $O$ กับ $\overline{SK}$



เนื่องจาก  $SK = 18 - 6 = 12$  ( $SK = SY - KY$ )

และ  $AS = AK = \frac{SK}{2} = 6$  (เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด)

จะได้  $AY = 6 + 6 = 12$  ( $AY = AK + KY$ )

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้  $OY^2 = OA^2 + AY^2$

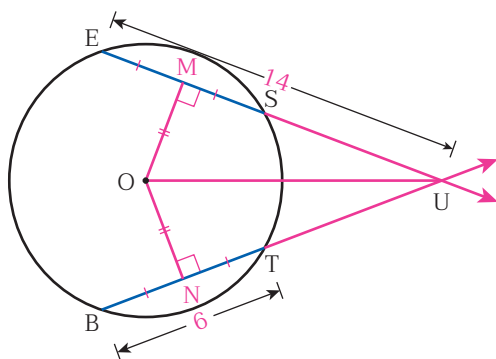
$$13^2 = OA^2 + 12^2$$

$$OA^2 = 25$$

ดังนั้น  $OA = 5$

นั่นคือ  $SK$  อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง  $O$  5 เซนติเมตร

8. แนวคิด ลาก  $\overline{OM}$  และ  $\overline{ON}$  ให้ตั้งฉากกับ  $\overline{ES}$  และ  $\overline{BT}$  ตามลำดับ



เนื่องจาก  $\widehat{OMU} = \widehat{ONU} = 90^\circ$

(จากการสร้าง)

เนื่องจาก  $ES = BT$

(กำหนดให้)

จะได้  $OM = ON$

(ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน)

และจาก  $OU = OU$

(ด้านร่วม)

ดังนั้น  $\triangle MOU \cong \triangle NOU$

(เท่ากันทุกประการแบบ ฉ.ด.ด.)

จะได้  $MU = NU$

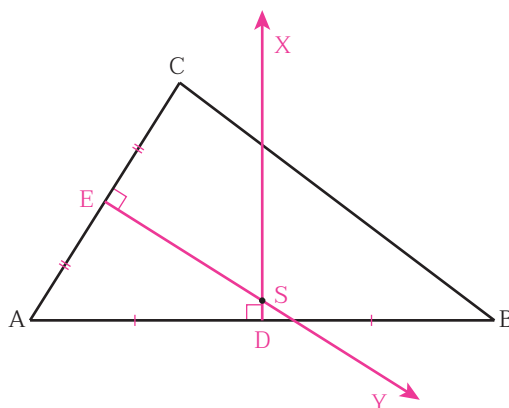
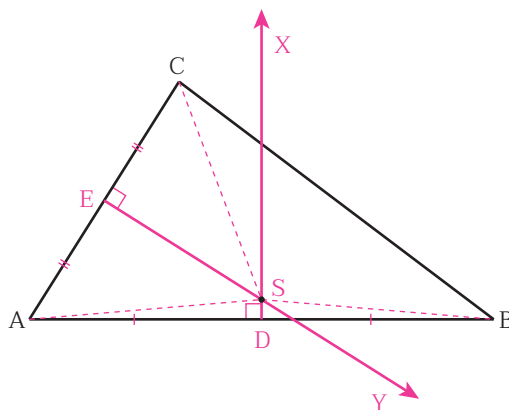
(ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน)

เนื่องจาก  $EM = MS = BN = NT = 3$

(เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด)

ดังนั้น  $TU = NU - NT = MU - 3 = (14 - 3) - 3 = 8$  หน่วย

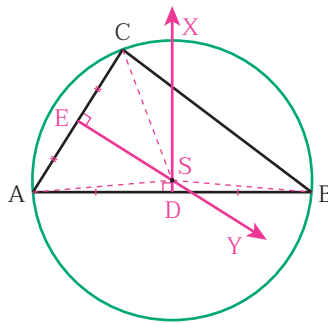
9. 1)

2) จากข้อ 1) ลาก  $\overline{SA}$ ,  $\overline{SB}$  และ  $\overline{SC}$  ดังรูป

| ข้อที่ | ข้อความ                             | เหตุผล                                                             |
|--------|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| (1)    | $SD = SD$                           | ด้านร่วม                                                           |
| (2)    | $\angle SDA = \angle SDB$           | $\overrightarrow{DX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$                   |
| (3)    | $AD = BD$                           | $\overrightarrow{DX}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$                    |
| (4)    | $\triangle SDA \cong \triangle SDB$ | เท่ากันทุกประการแบบ ด.ม.ด.                                         |
| (5)    | $SA = SB$                           | ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน |
| (6)    | $SE = SE$                           | ด้านร่วม                                                           |
| (7)    | $\angle SEA = \angle SEC$           | $\overrightarrow{EY}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$                   |
| (8)    | $AE = CE$                           | $\overrightarrow{EY}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AC}$                    |
| (9)    | $\triangle SEA \cong \triangle SEC$ | เท่ากันทุกประการแบบ ด.ม.ด.                                         |
| (10)   | $SA = SC$                           | ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน |
| (11)   | $SA = SB = SC$                      | จาก (5) และ (10) และสมบัติของการเท่ากัน                            |



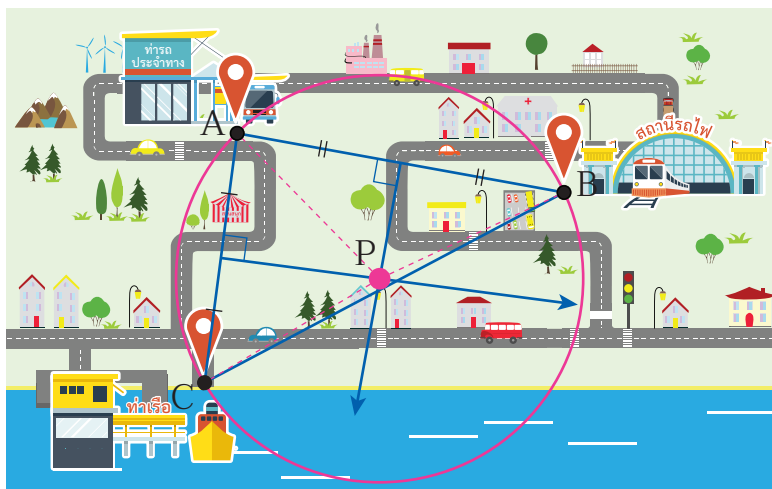
- 3) ถ้าให้  $S$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ที่มีรัศมียาวเท่ากับ  $SA$  แล้ววงกลมนี้จะผ่านจุด  $B$  และจุด  $C$  ด้วย เพราะจากข้อ 2) ทำให้ทราบว่า  $SA = SB = SC$   
นั่นคือ วงกลม  $S$  จะผ่านจุดยอดทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม  $ABC$



- 4) จากข้อ 1)–3) สามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้ว่า เมื่อกำหนดจุดสามจุดใด ๆ บนระนาบ ที่ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน จะสามารถสร้างวงกลมให้ผ่านจุดทั้งสามนั้นได้ เพราะสามารถหาจุดตัด  $S$  ที่เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมได้ แต่ถ้าจุดทั้งสามนั้น อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ก็จะไม่มีการตัด  $S$  ทำให้สร้างวงกลมผ่านจุดทั้งสามนั้นไม่ได้

10. แนวคิด เนื่องจากต้องการสร้างตลาดสดแห่งใหม่ให้อยู่ห่างจากท่ารถประจำทาง สถานีรถไฟ และท่าเรือเป็นระยะทางเท่า ๆ กัน

ดังนั้น จึงต้องทำให้ท่ารถประจำทาง (A) สถานีรถไฟ (B) และท่าเรือ (C) เป็นตำแหน่งที่อยู่บนวงกลม โดยมีตำแหน่งที่จะสร้างตลาดสดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม (P)

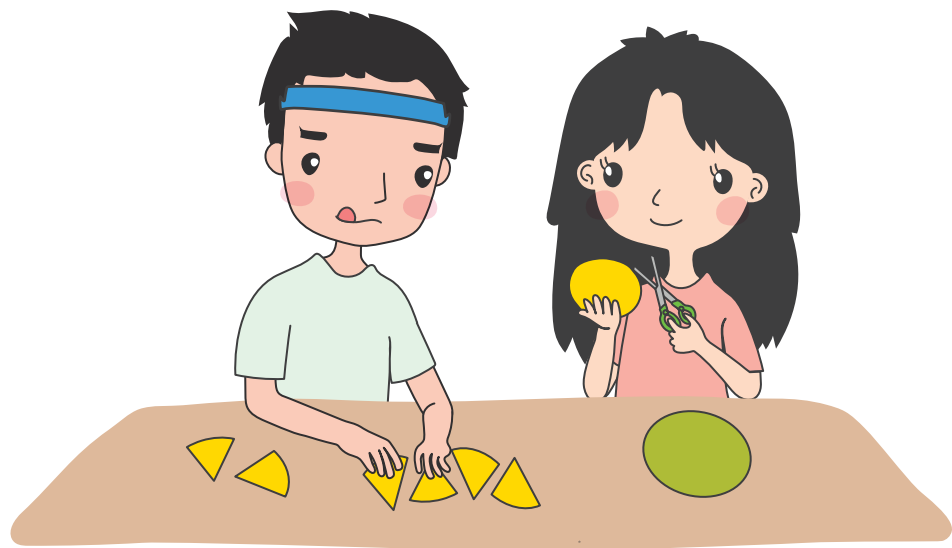
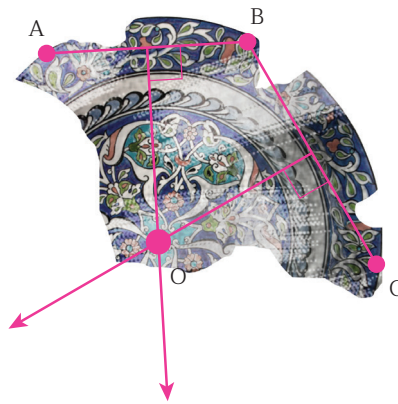


หมายเหตุ สร้างโดยใช้หลักการเดียวกันกับแบบฝึกหัดข้อ 9

11. **แนวคิด** เนื่องจากสมมุติฐานของเขา คือ เดิมจานใบนี้เป็นรูปวงกลม

ดังนั้น เขาจะหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของจาน ได้ดังนี้

- 1) กำหนดจุด A, B และ C บนขอบจานที่เป็นส่วนโค้งในบริเวณที่ไม่ชำรุด แล้วสร้าง  $\overline{AB}$  และ  $\overline{BC}$
- 2) สร้างรังสี 2 เส้น ให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ  $\overline{AB}$  และ  $\overline{BC}$
- 3) กำหนดจุดตัดของรังสีทั้งสอง ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของจาน ให้ชื่อเป็นจุด O
- 4) หาความยาวของรัศมีของจาน จาก AO, BO หรือ CO
- 5) หาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของจานจากข้อ 4)



## 2.3 เส้นสัมผัสวงกลม (4 ชั่วโมง)

### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

1. อธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม
2. นำทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

### Q สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

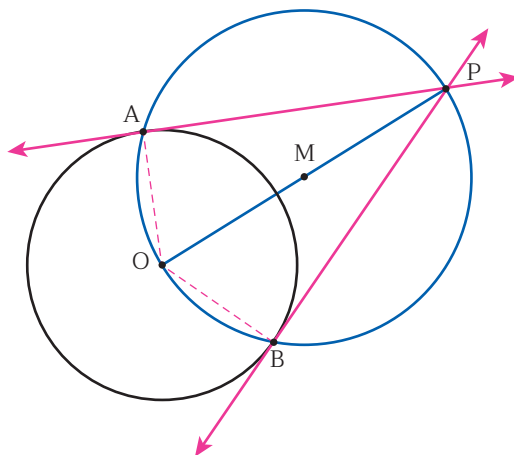
1. อุปกรณ์ของกิจกรรม : สำรวมุมระหว่างเส้นสัมผัสวงกลมกับรัศมี
2. ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP)

### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลม ซึ่งเน้นให้นักเรียนใช้สมบัติและทฤษฎีบทที่เรียนมาแล้ว ในการพิสูจน์และให้เหตุผล และทำกิจกรรมเพื่อสร้างความรู้ใหม่ผ่านการลงมือปฏิบัติ รวมถึงการทำกิจกรรมการสำรวจโดยใช้ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) การเรียนเรื่องนี้มุ่งให้นักเรียนเข้าใจทฤษฎีบท และสามารถนำไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

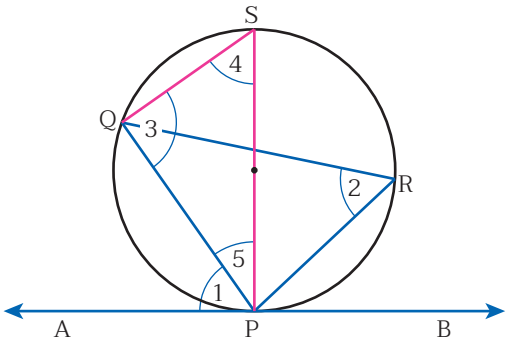
1. ครูแนะนำให้นักเรียนรู้จักเส้นตัดวงกลม แล้วแนะนำเส้นสัมผัสวงกลมและจุดสัมผัสจากการเลื่อนขนานและการหมุนเส้นตัดวงกลมนั้น
2. ครูให้นักเรียนทำ “กิจกรรม : สำรวมุมระหว่างเส้นสัมผัสวงกลมกับรัศมี” ในหนังสือเรียน หน้า 86–87 โดยหาขนาดของมุมที่เส้นสัมผัสวงกลมทำกับรัศมี เพื่อนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับขนาดของมุมที่ได้นั้น  
 ในทางปฏิบัติ เมื่อเรามีจุดบนเส้นรอบวงและต้องการสร้างส่วนของเส้นตรงให้สัมผัสกับวงกลมที่จุดจุดนั้นด้วยเครื่องมือสันตรง สามารถทำได้ยาก ดังนั้น เส้นตรงทั้งสี่เส้นที่นักเรียนสร้างขึ้น อาจไม่ตรงตามทฤษฎีบท ครูควรชี้ให้นักเรียนสังเกตว่าเส้นตรงที่สร้างขึ้นนั้น สัมผัสวงกลมที่จุด A จุด B จุด C และจุด D จริงหรือไม่ หรือเป็นเส้นตัด แล้วจึงอภิปรายเพื่อหาข้อสรุปว่า เส้นตรงที่จะเป็นเส้นสัมผัสวงกลม จะทำมุม  $90^\circ$  กับรัศมีของวงกลม
3. สมบัติทางเรขาคณิตที่ว่า “เมื่อกำหนดเส้นตรงเส้นหนึ่งมาให้ ในบรรดาส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอกเส้นตรงไปยังเส้นตรงเส้นนั้น ส่วนของเส้นตรงที่สั้นที่สุด คือ ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นนั้น” เป็นสมบัติที่สำคัญในการนำไปพิสูจน์ทฤษฎีบทที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างเส้นสัมผัสวงกลมกับรัศมี ดังนั้น ครูอาจให้นักเรียนสำรวจสมบัติดังกล่าวข้างต้น โดยใช้มุมเทคโนโลยีในหนังสือเรียน หน้า 88

4. สำหรับเกร็ดความรู้เกี่ยวกับละติจูด มีเจตนาให้เป็นความรู้เพิ่มเติมให้กับนักเรียน อีกทั้งยังทำให้นักเรียนได้เห็นการเชื่อมโยงความรู้ โดยนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมมาใช้ในการอธิบายเกี่ยวกับการกำหนดตำแหน่งของละติจูด
5. ในการศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมและจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอกวงกลม ครูควรให้นักเรียนได้ฝึกการนำความรู้ที่เรียนมาแล้วไปใช้ในการให้เหตุผลก่อนที่จะสรุปทฤษฎีบท เช่น จากตารางในหนังสือเรียน หน้า 92 เหตุผลที่นักเรียนให้ควรเป็นดังนี้



| ข้อที่ | ข้อความ                                          | เหตุผล                                                         |
|--------|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1      | $\angle O\hat{A}P = \angle O\hat{B}P = 90^\circ$ | เส้นสัมผัสจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส                        |
| 2      | $OA = OB$                                        | รัศมีของวงกลมเดียวกัน                                          |
| 3      | $OP = OP$                                        | $\overline{OP}$ เป็นด้านร่วม                                   |
| 4      | $\triangle PAO \cong \triangle PBO$              | เท่ากันทุกประการแบบ จ.ด.ด.                                     |
| 5      | $PA = PB$                                        | ด้านที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการจะยาวเท่ากัน |

สำหรับการศึกษาทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมและคอร์ดของวงกลม ครูสามารถทำกิจกรรมในตนเองเดียวกัน โดยใช้ตารางในหนังสือเรียน หน้า 95



| ข้อที่ | ข้อความ                                            | เหตุผล                                                                      |
|--------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 1      | $\hat{3} = 90^\circ$                               | ขนาดของมุมในครึ่งวงกลม                                                      |
| 2      | $\hat{4} + \hat{5} = 90^\circ$                     | จากข้อ 1 และขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น $180^\circ$ |
| 3      | $\hat{1} + \hat{5} = 90^\circ$                     | เส้นสัมผัสจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส                                     |
| 4      | $\hat{1} = \hat{4}$                                | จากข้อ 2-3 และสมบัติของการเท่ากัน                                           |
| 5      | $\hat{4} = \hat{2}$                                | มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน             |
| 6      | $\hat{1} = \hat{2}$ หรือ $\angle APQ = \angle PRQ$ | จากข้อ 4-5 และสมบัติของการเท่ากัน                                           |

นอกจากนี้ ครูอาจใช้มุมเทคโนโลยี ในหนังสือเรียน หน้า 96 ให้นักเรียนสำรวจเพิ่มเติม เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส กับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

- สำหรับมุมคณิตในหนังสือเรียน หน้า 101-102 มีเจตนาให้นักเรียนได้เห็นการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับภูมิศาสตร์ และเพื่อให้นักเรียนเห็นความสามารถของเอราทอสเทนีส นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกที่มีความคิดสร้างสรรค์ ช่างสังเกต ใฝ่รู้ และมีความพยายามในการแก้ปัญหา
- เนื่องจากจุดประสงค์ของบทเรียนเน้นการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนั้นในการทำแบบฝึกหัดที่เป็นการหาขนาดของมุม ครูควรเน้นให้นักเรียนได้ใช้ทฤษฎีบทที่เรียนมาแล้ว มาประกอบ การให้เหตุผล ดังตัวอย่างในหนังสือเรียน หน้า 93-94 และ 96

## กิจกรรม : สำรวจมุมระหว่างเส้นสัมผัสวงกลมกับรัศมี

กิจกรรมนี้เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้สำรวจ คำนวณ และสรุปความสัมพันธ์ของขนาดของมุมระหว่างเส้นสัมผัสกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส โดยการลงมือปฏิบัติจริง แล้วนำข้อสรุปที่ได้มาอภิปรายร่วมกัน โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

### สื่อ/อุปกรณ์

1. ไม้บรรทัด
2. โพรแทรกเตอร์

### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. จากวงกลม  $O$  ที่กำหนดไว้ในหนังสือเรียน ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมตามขั้นตอนในหนังสือเรียน หน้า 86–87
2. ครูให้นักเรียนสังเกตขนาดของมุมที่วัดได้จากตาราง แล้วอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับขนาดของมุมระหว่างเส้นสัมผัสกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส ซึ่งนักเรียนควรวัดได้  $90^\circ$  หรือใกล้เคียงกับ  $90^\circ$  มากที่สุด จากนั้นเขียนข้อความคาดการณ์ตามคำถามท้ายกิจกรรม

## เฉลยคำถามท้ายกิจกรรม : สำรวจมุมระหว่างเส้นสัมผัสวงกลมกับรัศมี

ขนาดของมุมระหว่างเส้นสัมผัสวงกลมกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส เท่ากับ  $90^\circ$  หรือหนึ่งมุมฉาก หรือเส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

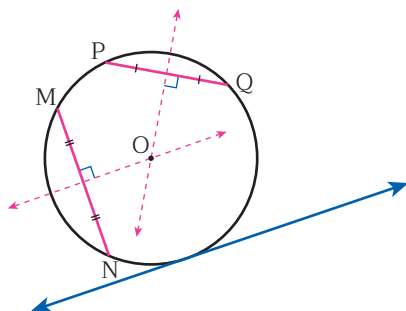
## เฉลยชวนคิด



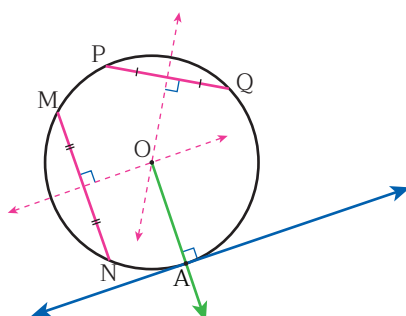
ipst.me/11427

### ชวนคิด 2.7

เมื่อกำหนดวงกลมวงหนึ่งและเส้นสัมผัส โดยไม่ระบุจุดศูนย์กลางและจุดสัมผัสมาให้ สามารถหาจุดสัมผัสได้ดังนี้



1. สร้างคอร์ด MN และคอร์ด PQ
2. สร้างเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ด MN และคอร์ด PQ ให้จุดตัดคือ จุด O
3. จะได้ว่า จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม



4. ใช้หลักการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิตข้อ 5 สร้างเส้นตั้งฉากจากจุด O มายังเส้นสัมผัส ให้จุดที่เส้นตั้งฉากตัดกับเส้นสัมผัส คือ จุด A
5. จะได้ว่า จุด A เป็นจุดสัมผัส



ipst.me/11428

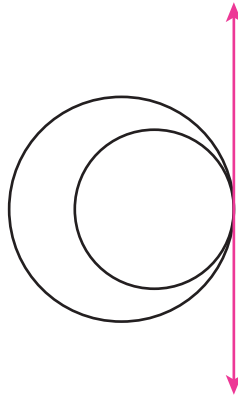
### ชวนคิด 2.8

$\widehat{APO} = \widehat{BPO}$  เพราะเป็นมุมที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ

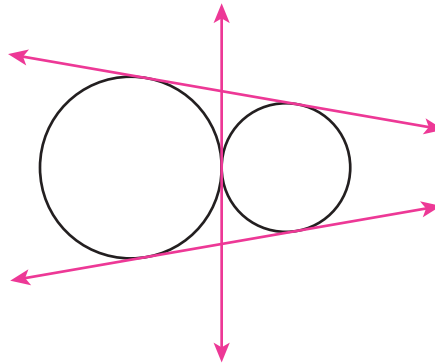

[ipst.me/11429](https://ipst.me/11429)

### ชวนคิด 2.9

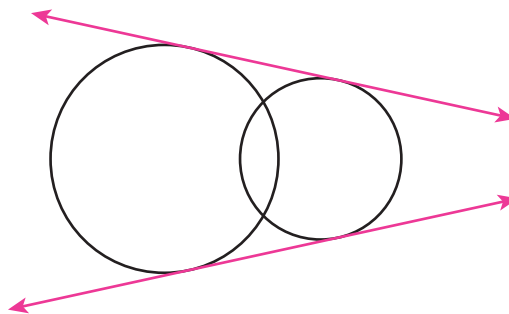
1. มีเส้นสัมผัสวงกลมทั้งสองได้ 1 เส้น ดังรูป



2. มีเส้นสัมผัสวงกลมทั้งสองได้ 3 เส้น ดังรูป

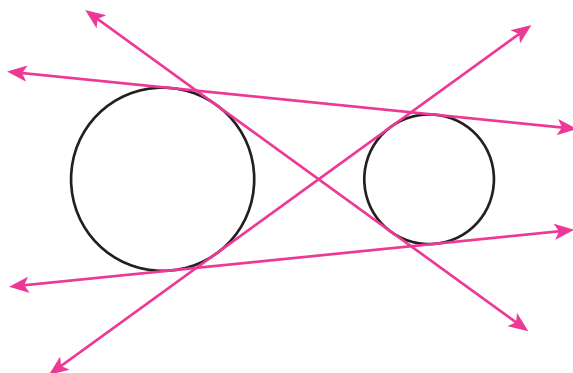


3. มีเส้นสัมผัสวงกลมทั้งสองได้ 2 เส้น ดังรูป





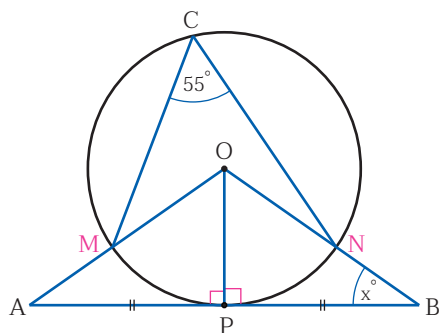
4. มีเส้นสัมผัสวงกลมทั้งสองได้ 4 เส้น ดังรูป



## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 2.3

1. 1) แนวคิด



เนื่องจากจุด P เป็นจุดสัมผัส

ทำให้  $\widehat{OPA} = \widehat{OPB} = 90^\circ$

และเนื่องจาก  $AP = BP$

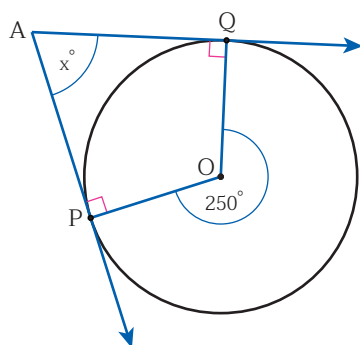
ดังนั้น  $\triangle AOB$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จาก  $\widehat{MON} = 2(\widehat{MCN})$

จะได้  $\widehat{MON} = 110^\circ$

ดังนั้น  $x = \frac{180 - 110}{2} = 35$

- 2) แนวคิด



เนื่องจาก  $\widehat{POQ} = 360 - 250 = 110^\circ$

และเนื่องจากจุด P และจุด Q เป็นจุดสัมผัส

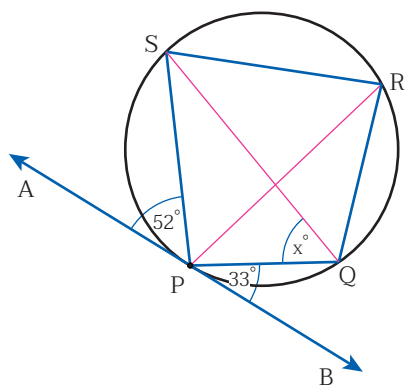
ทำให้  $\widehat{OPA} = \widehat{OQA} = 90^\circ$

เนื่องจาก  $\widehat{PAQ} + \widehat{AQO} + \widehat{QOP} + \widehat{OPA} = 360^\circ$

จะได้  $x + 90 + 110 + 90 = 360$

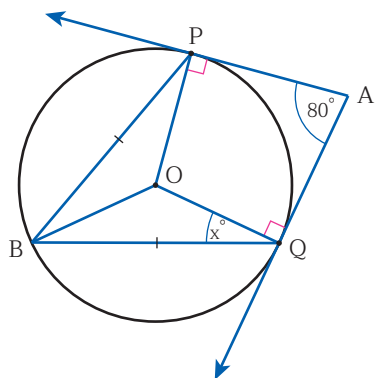
ดังนั้น  $x = 70$

## 3) แนวคิด



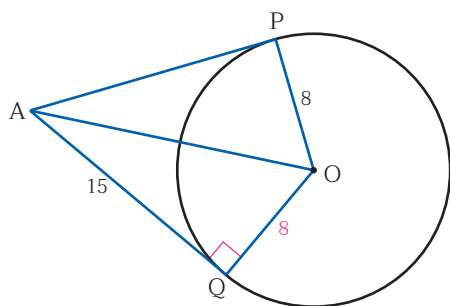
เนื่องจาก  $\widehat{PS} = \widehat{QS}$   
 ดังนั้น  $x = 52$

## 4) แนวคิด



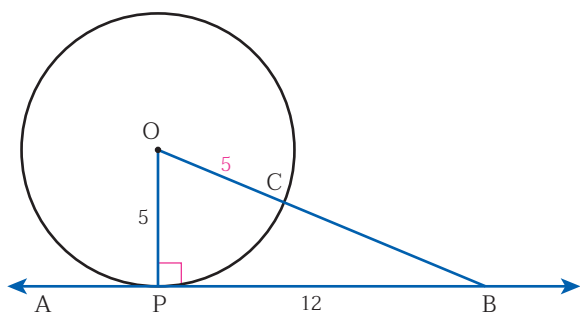
เนื่องจากจุด P และจุด Q เป็นจุดสัมผัส  
 ทำให้  $\widehat{OPA} = \widehat{OQA} = 90^\circ$   
 เนื่องจาก  $\widehat{PAQ} + \widehat{AQO} + \widehat{QOP} + \widehat{OPA} = 360^\circ$   
 ดังนั้น  $\widehat{QOP} = 100^\circ$   
 เนื่องจาก  $\triangle OQB \cong \triangle OPB$  แบบ ด.ด.ด.  
 จะได้  $\widehat{POB} = \widehat{QOB} = \frac{360 - 100}{2} = 130^\circ$   
 เนื่องจาก  $\triangle BOQ$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  
 ดังนั้น  $x = \frac{180 - 130}{2} = 25$

## 2. 1) แนวคิด



เนื่องจากจุด P และจุด Q เป็นจุดสัมผัส  
 ทำให้  $\widehat{OPA} = \widehat{OQA} = 90^\circ$   
 เนื่องจาก  $OQ = OP = 8$   
 และจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส  
 จะได้  $OA^2 = AQ^2 + OQ^2$   
 $OA^2 = 15^2 + 8^2$   
 $= 289$   
 ดังนั้น  $OA = 17$  หน่วย

## 2) แนวคิด



เนื่องจากจุด P เป็นจุดสัมผัส ทำให้  $\widehat{OPB} = 90^\circ$   
จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad OB^2 &= OP^2 + PB^2 \\ OB^2 &= 5^2 + 12^2 \\ &= 169\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad OB = 13 \text{ หน่วย}$$

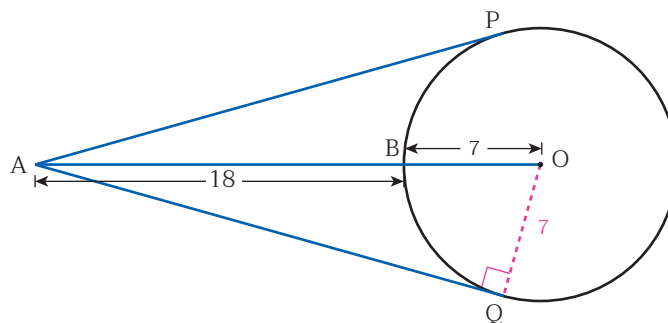
$$\text{เนื่องจาก} \quad OC = OP = 5$$

$$\text{และ} \quad OB = OC + BC$$

$$13 = 5 + BC$$

$$\text{ดังนั้น} \quad BC = 8$$

## 3) แนวคิด



ลาก  $\overline{OQ}$

เนื่องจากจุด Q เป็นจุดสัมผัส ทำให้  $\widehat{OQA} = 90^\circ$

$$\text{เนื่องจาก} \quad OQ = OB = 7$$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

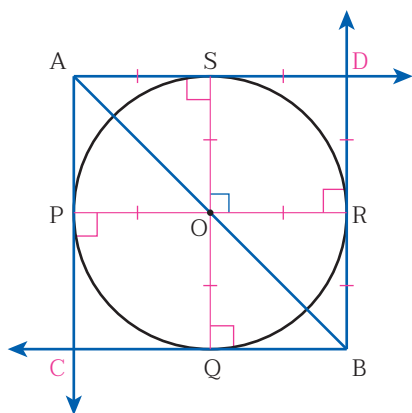
$$\text{จะได้} \quad OA^2 = AQ^2 + OQ^2$$

$$25^2 = AQ^2 + 7^2$$

$$AQ^2 = 576$$

$$\text{ดังนั้น} \quad AQ = 24 \text{ หน่วย}$$

## 4) แนวคิด



เนื่องจากจุด P จุด Q จุด R และจุด S เป็นจุดสัมผัส

ทำให้  $\widehat{OPC} = \widehat{OQB} = \widehat{ORD} = \widehat{OSA} = 90^\circ$

ดังนั้น  $\square ASOP$ ,  $\square SDRO$  และ  $\square ORBQ$  เป็นรูปสี่เหลี่ยม

มุมฉาก

เนื่องจาก  $OP = OQ = OR = OS = 1$

จะได้  $BR = RD = DS = SA = 1$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

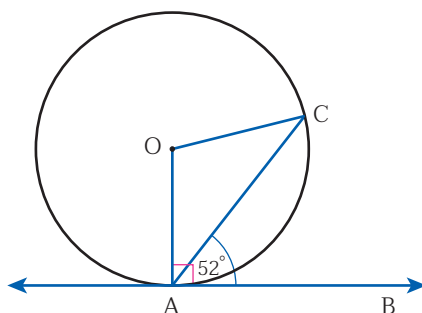
$$\text{จะได้ } AB^2 = BD^2 + AD^2$$

$$AB^2 = 2^2 + 2^2$$

$$= 8$$

$$\text{ดังนั้น } AB = 2\sqrt{2} \text{ หน่วย}$$

## 3. แนวคิด



$$\text{เนื่องจาก } \widehat{OAB} = 90^\circ$$

$$\text{และ } \widehat{OAC} + \widehat{CAB} = \widehat{OAB}$$

$$\text{จะได้ } \widehat{OAC} + 52 = 90$$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{OAC} = 38^\circ$$

$$\text{เนื่องจาก } OA = OC$$

จะได้  $\triangle AOC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$\text{และ } \widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 38^\circ$$

$$\text{เนื่องจาก } \widehat{AOC} + \widehat{OCA} + \widehat{OAC} = 180^\circ$$

$$\text{จะได้ } \widehat{AOC} + 38 + 38 = 180$$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{AOC} = 104^\circ$$

(เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส)

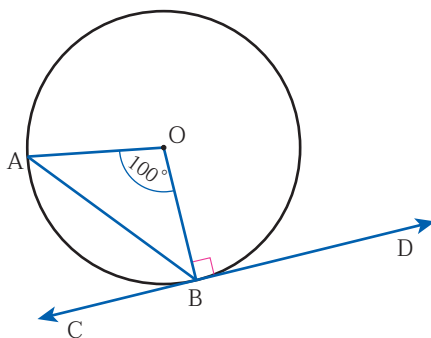
(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )

## 4. แนวคิด



เนื่องจาก  $OA = OB$   
 จะได้  $\triangle AOB$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  
 และ  $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$   
 เนื่องจาก  $\widehat{AOB} + \widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 180^\circ$

จะได้  $2(\widehat{OBA}) + 100 = 180$

ดังนั้น  $\widehat{OBA} = 40^\circ$

เนื่องจาก  $\widehat{OBD} = 90^\circ$

ดังนั้น  $\widehat{ABD} = \widehat{OBA} + \widehat{OBD} = 40 + 90 = 130^\circ$

(รัศมีของวงกลมเดียวกัน)

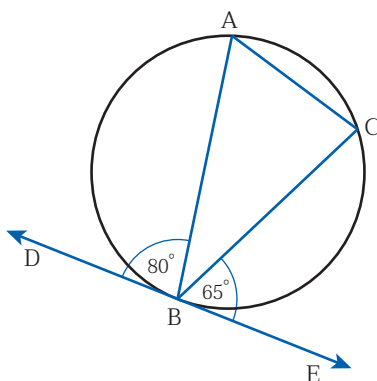
(บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)

(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )

(เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส)

## 5. แนวคิด



เนื่องจาก  $\widehat{CBE} = 65^\circ$

ดังนั้น  $\widehat{BAC} = 65^\circ$

เนื่องจาก  $\widehat{ABD} = 80^\circ$

ดังนั้น  $\widehat{ACB} = 80^\circ$

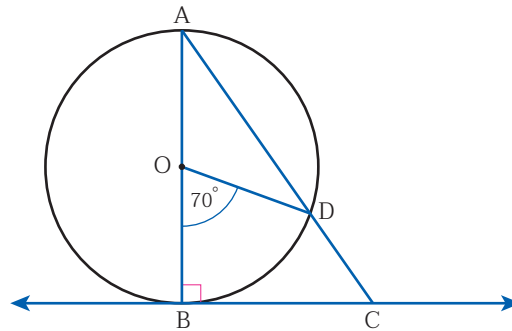
(กำหนดให้)

(มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น)

(กำหนดให้)

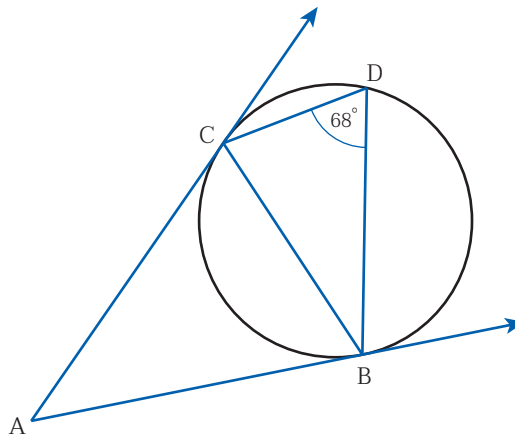
(มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น)

## 6. แนวคิด



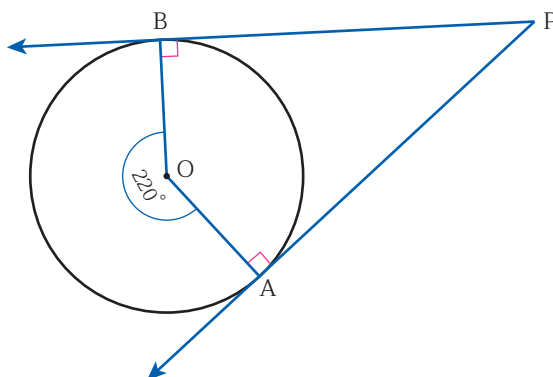
|           |                                                             |                                                                                                   |
|-----------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| เนื่องจาก | $\widehat{BOD} = 70^\circ$                                  | (กำหนดให้)                                                                                        |
| และ       | $\widehat{BOD} = 2(\widehat{BAD})$                          | (มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน) |
| จะได้     | $\widehat{BAD} = 35^\circ$                                  |                                                                                                   |
| เนื่องจาก | $\widehat{ABC} = 90^\circ$                                  | (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส)                                                    |
| และ       | $\widehat{ACB} + \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ | (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น $180^\circ$ )                                |
| จะได้     | $\widehat{ACB} + 90 + 35 = 180$                             |                                                                                                   |
| ดังนั้น   | $\widehat{ACB} = 55^\circ$                                  |                                                                                                   |

## 7. แนวคิด



|           |                                                             |                                                                                                                           |
|-----------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| เนื่องจาก | $\widehat{ABC} = \widehat{BDC} = 68^\circ$                  | } (มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น) |
| และ       | $\widehat{ACB} = \widehat{BDC} = 68^\circ$                  |                                                                                                                           |
| เนื่องจาก | $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ | (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น $180^\circ$ )                                                        |
| จะได้     | $68 + 68 + \widehat{BAC} = 180$                             |                                                                                                                           |
| ดังนั้น   | $\widehat{BAC} = 44^\circ$                                  |                                                                                                                           |

## 8. แนวคิด



เนื่องจาก  $\widehat{AOB} + \text{มุมกลับ } AOB = 360^\circ$  (มุมรอบจุดมีขนาด  $360^\circ$ )

จะได้  $\widehat{AOB} + 220 = 360$

ดังนั้น  $\widehat{AOB} = 140^\circ$

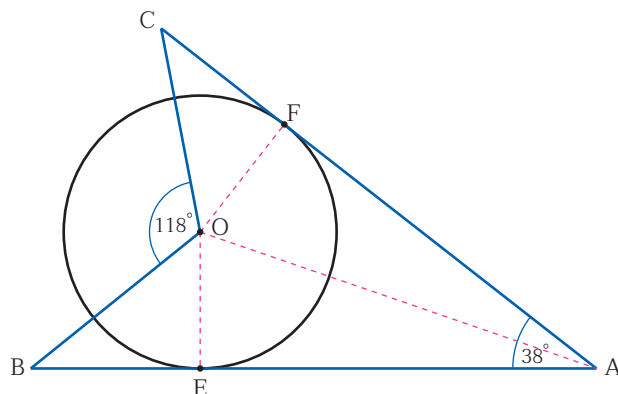
เนื่องจาก  $\widehat{OAP} = 90^\circ$  และ  $\widehat{OBP} = 90^\circ$  (เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส)

และ  $\widehat{APB} + \widehat{OBP} + \widehat{AOB} + \widehat{OAP} = 360^\circ$  (ขนาดของมุมภายในทั้งสี่มุมของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันเป็น  $360^\circ$ )

จะได้  $\widehat{APB} + 90 + 140 + 90 = 360$

ดังนั้น  $\widehat{APB} = 40^\circ$

## 9. แนวคิด



ลาก  $\overline{OE}$ ,  $\overline{OF}$  และ  $\overline{OA}$

เนื่องจาก  $\triangle AOE \cong \triangle AOF$

จะได้  $\widehat{EAO} = \widehat{FAO} = 19^\circ$

เนื่องจาก  $AO = AO$

และ  $AB = AC$

ดังนั้น  $\triangle AOB \cong \triangle AOC$

(เท่ากันทุกประการแบบ ด.ด.ด.)

(มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

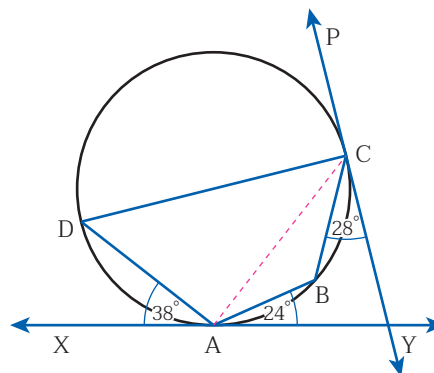
(ด้านร่วม)

(กำหนดให้)

(เท่ากันทุกประการแบบ ด.ม.ด.)

|              |                                                             |                                                                                                              |
|--------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ทำให้        | $\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$                             | (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากัน<br>ทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)<br>(มุมรอบจุดมีขนาด $360^\circ$ ) |
| เนื่องจาก    | $\widehat{AOB} + \widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 360^\circ$ |                                                                                                              |
| จะได้        | $2(\widehat{AOB}) + 118 = 360$                              |                                                                                                              |
| ดังนั้น      | $\widehat{AOB} = 121^\circ$                                 |                                                                                                              |
| และเนื่องจาก | $\widehat{ABO} + \widehat{AOB} + \widehat{BAO} = 180^\circ$ | (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม<br>รวมกันเป็น $180^\circ$ )                                       |
| จะได้        | $\widehat{ABO} + 121 + 19 = 180$                            |                                                                                                              |
| ดังนั้น      | $\widehat{ABO} = 40^\circ$                                  |                                                                                                              |
| เนื่องจาก    | $\widehat{ABO} = \widehat{ACO}$                             | (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากัน<br>ทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)                                   |
| ดังนั้น      | $\widehat{ACO} = 40^\circ$                                  | (สมบัติของการเท่ากัน)                                                                                        |

## 10. แนวคิด



|                     |                                                             |                                                                                                                                 |
|---------------------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| เนื่องจาก           | $\widehat{XAD} + \widehat{DAB} + \widehat{BAY} = 180^\circ$ | (ขนาดของมุมตรง)                                                                                                                 |
| จะได้               | $38 + \widehat{DAB} + 24 = 180$                             |                                                                                                                                 |
| ดังนั้น             | $\widehat{DAB} = 118^\circ$                                 |                                                                                                                                 |
| เนื่องจาก           | $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180^\circ$                 | (ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยม<br>แนบในวงกลมเป็น $180^\circ$ )                                                      |
| ดังนั้น             | $\widehat{DCB} = 180 - 118 = 62^\circ$                      |                                                                                                                                 |
| ลาก $\overline{AC}$ |                                                             |                                                                                                                                 |
| เนื่องจาก           | $\widehat{ACB} = \widehat{BAY} = 24^\circ$                  | (มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส<br>จะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลม<br>ที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น) |
| และ                 | $\widehat{BAC} = \widehat{BCY} = 28^\circ$                  |                                                                                                                                 |



เนื่องจาก  $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$

(ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )

จะได้  $28 + \widehat{ABC} + 24 = 180$

ดังนั้น  $\widehat{ABC} = 128^\circ$

เนื่องจาก  $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$

(ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมเป็น  $180^\circ$ )

จะได้  $128 + \widehat{ADC} = 180$

ดังนั้น  $\widehat{ADC} = 52^\circ$



## กิจกรรมท้ายบท : ขึ้นลงวนเวียน

กิจกรรมนี้ เน้นให้นักเรียนได้ประมวลความรู้ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์จากการเล่นเกม โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

### สื่อ/อุปกรณ์

1. กระดานขึ้นลงวนเวียน
2. ลูกเต๋า 1 ลูก/กลุ่ม
3. เปี้ย 1 ตัว/คน

### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

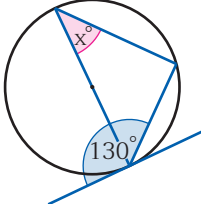
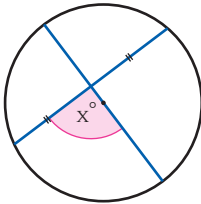
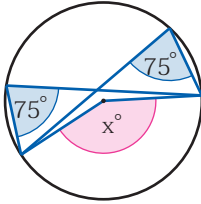
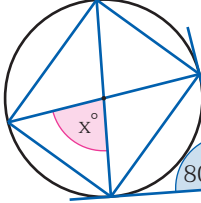
1. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3–4 คน แล้วเล่นเกมตามขั้นตอนในหนังสือเรียน หน้า 107 ทั้งนี้ ครูต้องเตรียมเฉลยให้ผู้คุมกฎ เพื่อใช้ในการตรวจสอบคำตอบของผู้เล่นคนอื่น
2. ครูอาจสร้างกระดานขึ้นลงวนเวียนขึ้นมาเองเพิ่มเติม โดยใช้แนวคิดทำนองเดียวกันกับที่นำเสนอไว้ในหนังสือเรียน

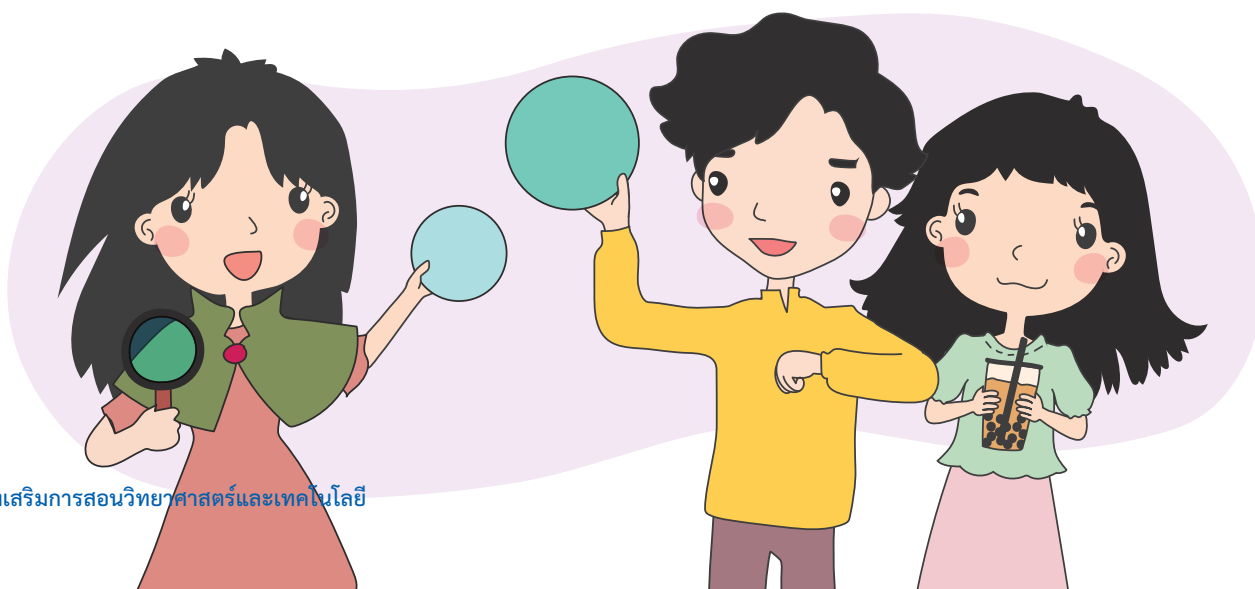
## เฉลยคำถามในกระดานขึ้นลงวนเวียน

คำถามในส่วนที่ตอบว่าใช่หรือไม่

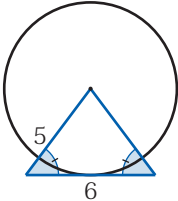
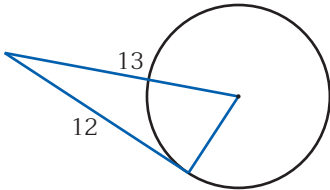
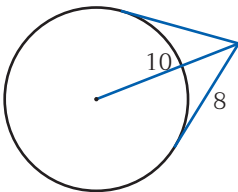
| คำถาม                                                                                    | คำตอบ  |
|------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90 องศา                                                     | ใช่    |
| มีวงกลมมากมายที่ผ่านจุด 2 จุดใด ๆ                                                        | ใช่    |
| มุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเป็น 2 เท่าของมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน | ไม่ใช่ |
| มุมที่จุดศูนย์กลางใด ๆ มีขนาดเท่ากันเสมอ                                                 | ไม่ใช่ |
| เส้นที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ดจะตั้งฉากกับคอร์ดเสมอ                           | ใช่    |
| สร้างวงกลมให้ผ่านจุด 4 จุดใด ๆ ได้เสมอ                                                   | ไม่ใช่ |
| ที่จุดจุดหนึ่งบนวงกลม มีเส้นสัมผัสลากผ่านได้มากมายนับไม่ถ้วน                             | ไม่ใช่ |

คำถามในส่วนที่หาค่า  $x$ 

| คำถาม                                                                               | คำตอบ |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|
|    | 50    |
|    | 90    |
|   | 150   |
|  | 80    |



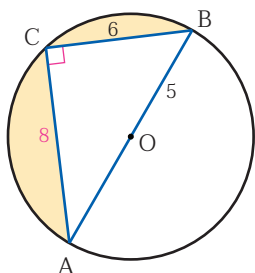
## คำถามในส่วนที่หาค่า

| คำถาม                                                                              | คำตอบ   |
|------------------------------------------------------------------------------------|---------|
|   | 4 หน่วย |
|   | 5 หน่วย |
|  | 6 หน่วย |



## เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

### 1. 1) แนวคิด



เนื่องจาก มุม C เป็นมุมในครึ่งวงกลม

$$\text{จะได้ } \angle ACB = 90^\circ$$

$$\text{และจาก } OA = OB$$

$$\text{ทำให้ได้ว่า } AB = 10 \text{ หน่วย}$$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } AC^2 &= 10^2 - 6^2 \\ &= 64 \end{aligned}$$

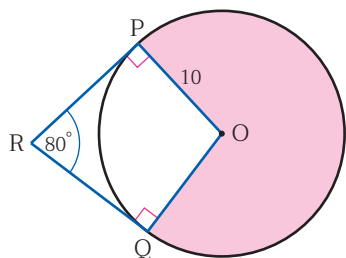
$$\text{ดังนั้น } AC = 8$$

เนื่องจากครึ่งวงกลม O นี้ มีพื้นที่เท่ากับ  $\frac{\pi r^2}{2} \approx \frac{3.14 \times 5^2}{2} = 39.25$  ตารางหน่วย

$$\text{และ พื้นที่ของ } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \text{ ตารางหน่วย}$$

ดังนั้น ส่วนที่แรเงามีพื้นที่ประมาณ 15.25 ตารางหน่วย

### 2) แนวคิด



เนื่องจากจุด P และจุด Q เป็นจุดสัมผัส

$$\text{จะได้ } \angle OPR = \angle OQR = 90^\circ$$

$$\text{จาก } \angle POQ + \angle OPR + \angle PRQ + \angle RQO = 360^\circ$$

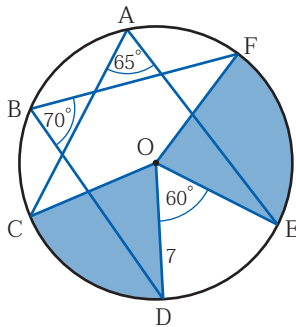
$$\text{จะได้ } \angle POQ = 100^\circ$$

ซึ่งคิดเป็น 5 ใน 18 ส่วน ของขนาดของมุมรอบจุดศูนย์กลาง

เนื่องจากวงกลม O นี้ มีพื้นที่เท่ากับ  $\pi r^2 \approx 3.14 \times 10^2 = 314$  ตารางหน่วย

$$\text{ดังนั้น ส่วนที่แรเงามีพื้นที่ประมาณ } \frac{13}{18} \times 314 = 226.78 \text{ ตารางหน่วย}$$

## 3) แนวคิด



เนื่องจาก  $\widehat{DOF} = 2(\widehat{DBF})$

จะได้  $\widehat{DOF} = 140^\circ$

ดังนั้น  $\widehat{EOF} = 140 - 60 = 80^\circ$

ในทำนองเดียวกัน

จะได้  $\widehat{COE} = 130^\circ$

ดังนั้น  $\widehat{COD} = 130 - 60 = 70^\circ$

เนื่องจาก  $\widehat{EOF} + \widehat{COD} = 150^\circ$

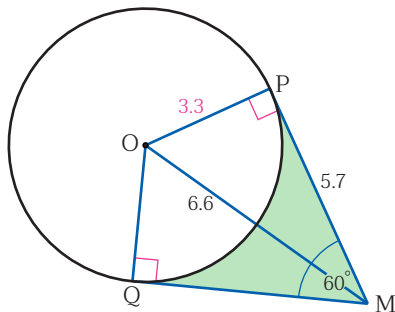
ดังนั้น พื้นที่ที่แรเงา คิดเป็น 5 ใน 12 ส่วน ของขนาด

ของมุมรอบจุดศูนย์กลาง

เนื่องจากวงกลม O นี้ มีพื้นที่เท่ากับ  $\pi r^2 \approx 3.14 \times 7^2 = 153.86$  ตารางหน่วย

ดังนั้น ส่วนที่แรเงามีพื้นที่ประมาณ  $\frac{5}{12} \times 153.86 = 64.11$  ตารางหน่วย

## 4) แนวคิด



เนื่องจากจุด P และจุด Q เป็นจุดสัมผัส

จะได้  $\widehat{OPM} = \widehat{OQM} = 90^\circ$

และจาก  $OP = OQ$

จะได้ว่า  $\triangle MOP \cong \triangle MOQ$  แบบ จ.ด.ด.

ดังนั้น  $\widehat{OMP} = \widehat{OMQ} = 30^\circ$

และ  $\widehat{MOP} = \widehat{MOQ} = 180 - (90 + 30) = 60^\circ$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้  $OP^2 = 6.6^2 - 5.7^2$   
 $= 11.07$

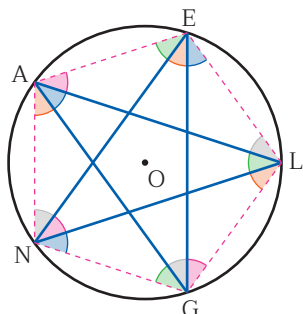
ดังนั้น  $OP \approx 3.3$

เนื่องจาก พื้นที่ของ  $\square POQM \approx 2 \times \left( \frac{1}{2} \times 3.3 \times 5.7 \right) = 18.81$  ตารางหน่วย

และเซกเตอร์ OPQ มีพื้นที่เท่ากับ  $\frac{\pi r^2}{3} \approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times 3.3^2 = 11.40$  ตารางหน่วย

ดังนั้น ส่วนที่แรเงามีพื้นที่ประมาณ  $18.81 - 11.40 = 7.41$  ตารางหน่วย

## 2. แนวคิด



ลาก  $\overline{AN}$

จะได้  $\widehat{NAG} = \widehat{NEG}$  และ  $\widehat{ANE} = \widehat{AGE}$

ลาก  $\overline{GL}$

จะได้  $\widehat{NLG} = \widehat{NEG}$  และ  $\widehat{EGL} = \widehat{ENL}$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อลาก  $\overline{NG}$ ,  $\overline{LE}$  และ  $\overline{EA}$

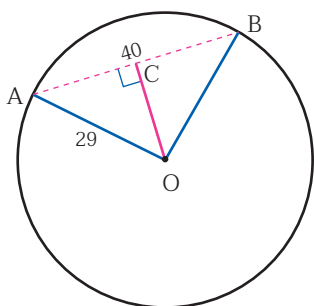
จะได้มุมที่มีขนาดเท่ากันอีก 6 คู่

เนื่องจากขนาดของมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมรวมกันเป็น  $540^\circ$

จะได้ว่า  $3(\widehat{GAL} + \widehat{LNE} + \widehat{EGA} + \widehat{ALN} + \widehat{NEG}) = 540^\circ$

ดังนั้น  $\widehat{A} + \widehat{N} + \widehat{G} + \widehat{L} + \widehat{E} = 180^\circ$

## 3. แนวคิด



ให้ O แทนจุดศูนย์กลางของสระน้ำวงกลม ซึ่งมีรัศมี 29 เมตร

OC แทนระยะห่างระหว่างสะพานกับจุดศูนย์กลางของสระน้ำวงกลม

$\overline{AB}$  แทนสะพาน ซึ่งยาว 40 เมตร

เนื่องจากน้ำพุกระจายได้ในรัศมี 20 เมตร จากรูปจะได้ว่า

ถ้า  $OC > 20$  น้ำพุจะกระจายไม่ถึงอ้อมทรัพย์

และถ้า  $OC \leq 20$  น้ำพุจะกระจายมาถึงอ้อมทรัพย์

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad OC^2 &= 29^2 - 20^2 \\ &= 441 \end{aligned}$$

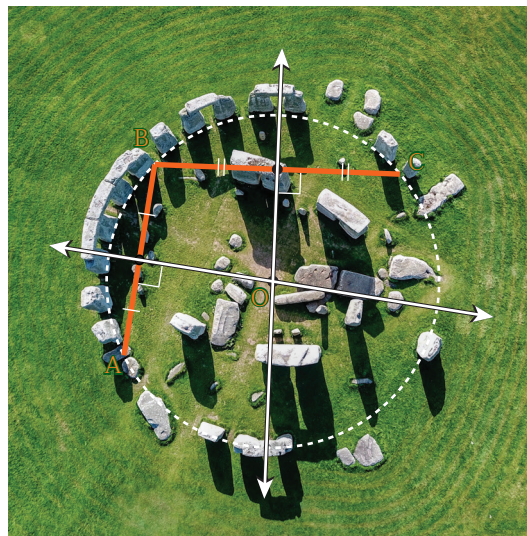
$$\text{ดังนั้น} \quad OC = 21$$

$$\text{นั่นคือ} \quad OC > 20$$

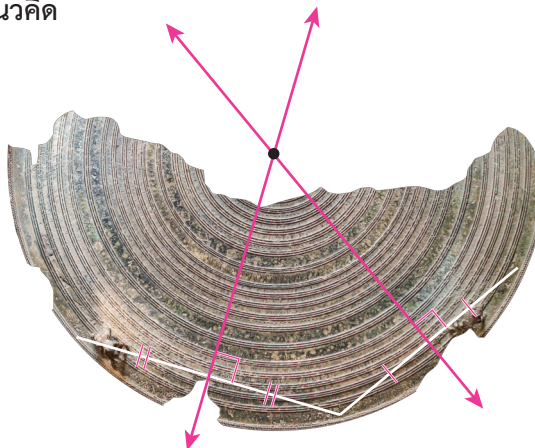
ดังนั้น ถ้าอ้อมทรัพย์เดินข้ามสะพานนี้ขณะที่น้ำพุเปิดอยู่ น้ำพุจะกระจายไม่ถึงอ้อมทรัพย์

4. **แนวคิด** เนื่องจากสโตนเฮนจ์มีลักษณะทางเรขาคณิตเป็นวงกลม  
ดังนั้น จะหาจุดศูนย์กลางของสโตนเฮนจ์ ได้ดังนี้

- 1) กำหนดจุด A, B และ C บนขอบของสโตนเฮนจ์ในบริเวณที่ไม่ซ้ำรูป โดยที่จุดเหล่านี้ต้องไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน แล้วสร้าง  $\overline{AB}$  และ  $\overline{BC}$
- 2) สร้างเส้นตรงให้แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ  $\overline{AB}$  และ  $\overline{BC}$
- 3) ให้เส้นตรงทั้งสองตัดกันที่จุดจุดหนึ่ง ให้จุดตัดนั้นคือ จุด O  
จะได้ว่า จุด O เป็นจุดศูนย์กลาง หรือใจกลางของสโตนเฮนจ์



5. **แนวคิด**



หาจุดศูนย์กลางของซากของหน้ามโหระทึก  
ได้ในทำนองเดียวกับข้อ 4

จากรูป วัดระยะจากขอบของหน้ามโหระทึก  
ถึงจุดศูนย์กลาง ได้ความยาวประมาณ  
3.5 เซนติเมตร เมื่อเทียบตามมาตราส่วน  
จะได้ 70 เซนติเมตร

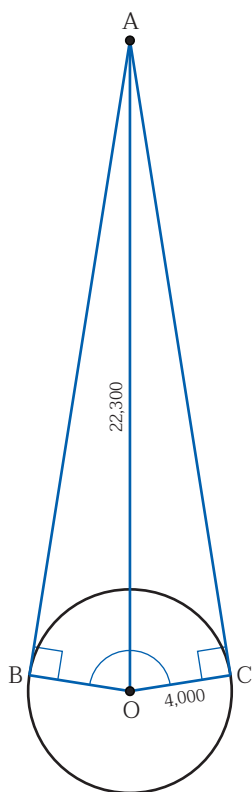
$$\text{พื้นที่ผิวของหน้ามโหระทึก} = \pi r^2 \approx \frac{22}{7} \times 70^2 = 15,400 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

เนื่องจากมโหระทึกนี้หนา 4 มิลลิเมตร หรือ 0.04 เซนติเมตร

ดังนั้น ช่างทำมโหระทึกจะต้องใช้สำริดเพื่อทำหน้ามโหระทึกใบนี้อย่างน้อย  $15,400 \times 0.04 = 616$   
ลูกบาศก์เซนติเมตร



## 6. แนวคิด จากโจทย์ เขียนภาพจำลองได้ดังนี้



ให้ จุด O แทนจุดศูนย์กลางของโลก  
จุด A แทนตำแหน่งของดาวเทียม  
จุด B และจุด C แทนสถานีรับสัญญาณที่อยู่ไกลที่สุด  
ที่สามารถรับสัญญาณได้

เนื่องจากถือว่าความสูงของสถานีรับสัญญาณเป็นศูนย์  
ดังนั้น สถานีรับสัญญาณที่อยู่ไกลที่สุดที่สามารถรับสัญญาณได้  
จะต้องอยู่ที่จุดสัมผัสที่ทำให้แนวสัญญาณเป็น  
เส้นสัมผัสวงกลม

ทำให้  $\triangle ABO \cong \triangle ACO$  แบบ ฉ.ด.ด.

ดังนั้น  $AB = AC$

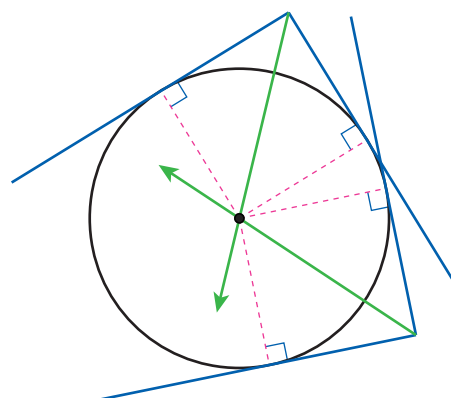
จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } AC^2 &= 22,300^2 - 4,000^2 \\ &= 481,290,000 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } AC \approx 21,938.32$$

นั่นคือ สถานีรับสัญญาณที่อยู่ไกลจากดาวเทียมมากที่สุด  
ที่สามารถรับสัญญาณได้ อยู่ห่างจากดาวเทียมประมาณ  
21,938.32 ไมล์

## 7. แนวคิด



จากรูป จะเห็นว่าขาทั้งสองข้างของเครื่องหาจุดศูนย์กลางสัมผัสกับขอบของวงกลม

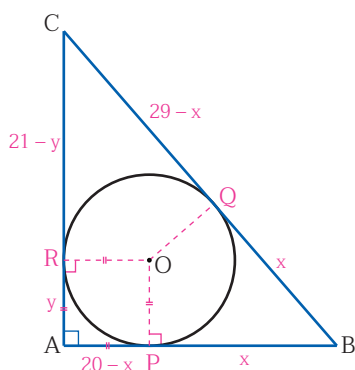
ทำให้เกิดจุดสัมผัส 2 จุด ซึ่งขาทั้งสองข้างต่างก็ทำมุม  $90^\circ$  กับรัศมีของวงกลม

จะได้ว่า เส้นที่ลากตามแนวแบ่งครึ่งมุมที่ติดมากับเครื่องหาจุดศูนย์กลางนี้ ย่อมผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมเสมอ

และจากการที่เส้นตรงสองเส้นใด ๆ ตัดกัน จะเกิดจุดตัด 1 จุด

ดังนั้น เมื่อมีเส้นตรงสองเส้นที่ต่างก็ผ่านจุดศูนย์กลางและตัดกัน จุดตัดดังกล่าว จึงเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น

## 8. แนวคิด



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad AB^2 &= 29^2 - 21^2 \\ &= 400 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad AB = 20$$

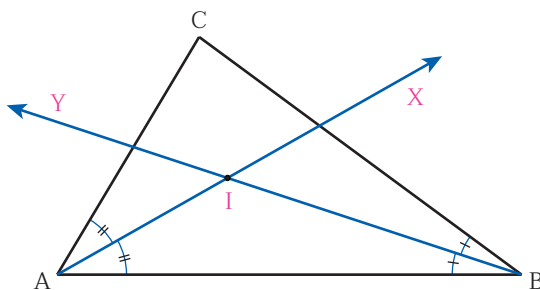
ให้  $BP = x$  หน่วย และ  $AR = y$  หน่วย

$$\text{จะได้} \quad y = 20 - x \quad \text{①}$$

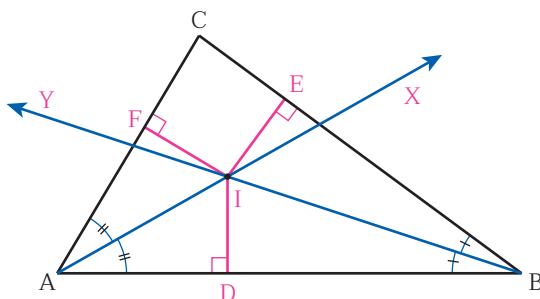
$$\text{และ} \quad 21 - y = 29 - x \quad \text{②}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ จะได้  $x = 14$  และ  $y = 6$ เนื่องจาก  $\square APOR$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะได้ รัศมีของวงกลม  $O$  เท่ากับ  $y$  หน่วยดังนั้น รัศมีของวงกลม  $O$  ยาว 6 หน่วย

## 9. 1) สร้างรูปตามที่โจทย์ระบุได้ดังนี้



## 2) สร้างรูปต่อจากข้อ 1) ได้ดังนี้







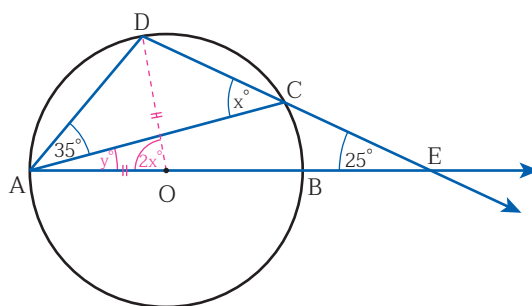
2) แนวคิด เนื่องจาก  $\triangle BCE \sim \triangle ECA$

$$\text{จะได้} \quad \frac{CE}{BC} = \frac{CA}{EC}$$

$$\frac{7}{BC} = \frac{CA}{7}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad CA \cdot BC = 49 \quad \text{หรือ} \quad AC \cdot BC = 49$$

## 12. แนวคิด



$$\text{ให้ } \angle OAC = y^\circ$$

จาก  $\triangle ACE$

$$\text{จะได้} \quad y + 25 = x$$

$$\text{หรือ} \quad y - x = -25 \quad \text{_____} \textcircled{1}$$

$$\text{ลาก } \overline{OD} \text{ จะได้ } \angle DOA = 2x^\circ$$

และจาก  $\triangle ADO$

$$\text{จะได้} \quad 2x + 2(y + 35) = 180$$

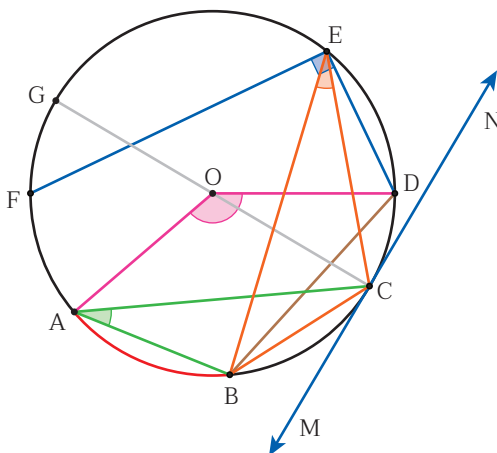
$$\text{หรือ} \quad x + y = 55 \quad \text{_____} \textcircled{2}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ จะได้  $x = 40$  และ  $y = 15$

$$\text{ดังนั้น } x = 40$$

## ตัวอย่างแบบทดสอบท้ายบท

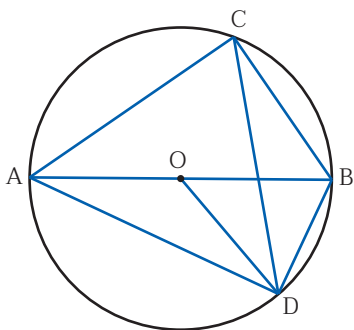
1.



จากรูปที่กำหนดให้ จงเขียนความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม หรือขนาดของมุมมา 5 ข้อ

(5 คะแนน)

2.



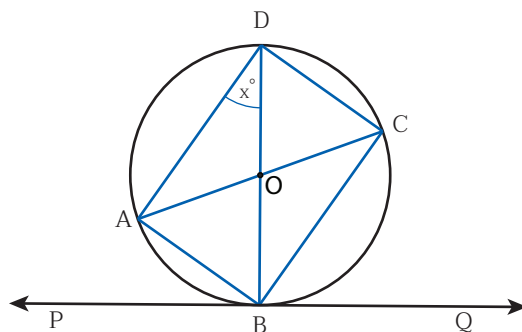
จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี  $\overline{AB}$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม  $\widehat{BCD} = 25^\circ$  และ  $\widehat{CAB} = 35^\circ$

จงหาขนาดของมุมต่อไปนี้

(5 คะแนน)

- 1)  $\widehat{ACD} =$  \_\_\_\_\_
- 2)  $\widehat{BOD} =$  \_\_\_\_\_
- 3)  $\widehat{CBD} =$  \_\_\_\_\_
- 4)  $\widehat{ADC} =$  \_\_\_\_\_
- 5)  $\widehat{ODC} =$  \_\_\_\_\_

3.



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ  $\overrightarrow{PQ}$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B

ให้นักเรียนพิจารณาว่าความสัมพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิด แล้วทำเครื่องหมายถูก (✓) หรือผิด (✗) ลงใน ☐ หน้าข้อความ พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ โดยเขียนแสดงสมบัติทางเรขาคณิตหรือทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมนั้น (16 คะแนน)

☐ 1)  $2x = \widehat{AOB}$

เพราะ .....

☐ 2)  $x + \widehat{ODC} = 90^\circ$

เพราะ .....

☐ 3)  $x = \widehat{ACB}$

เพราะ .....

☐ 4)  $x + \widehat{ODC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

เพราะ .....

☐ 5)  $x = \frac{\widehat{BOC}}{2}$

เพราะ .....

☐ 6)  $x + \widehat{OBC} + \widehat{AOD} = 180^\circ$

เพราะ .....

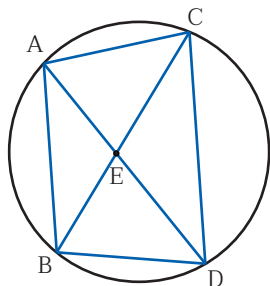
☐ 7)  $x = \widehat{PBA}$

เพราะ .....

□ 8)  $x + \widehat{ACB} + \widehat{AOB} = 180^\circ$

เพราะ .....

4.



จากรูป  $\overline{AB}$  ขนานกับ  $\overline{CD}$  และ  $\overline{AD}$  ตัดกับ  $\overline{BC}$  ที่จุด E  
ถ้า  $\widehat{AEB} = 110^\circ$  แล้ว  $\widehat{ABC}$  มีขนาดเท่าไร (1 คะแนน)

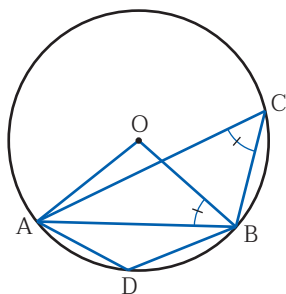
ก.  $25^\circ$

ข.  $35^\circ$

ค.  $45^\circ$

ง.  $55^\circ$

5.



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ  $\widehat{OBA} = \widehat{ACB}$   
จงหาขนาดของ  $\widehat{ADB}$  (1 คะแนน)

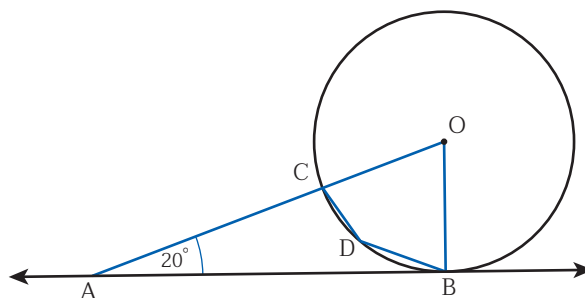
ก.  $120^\circ$

ข.  $125^\circ$

ค.  $130^\circ$

ง.  $135^\circ$

6.



จากรูป  $\overrightarrow{AB}$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด B และ  $\widehat{OAB} = 20^\circ$  จงหาขนาดของ  $\widehat{BDC}$  (1 คะแนน)

ก.  $135^\circ$

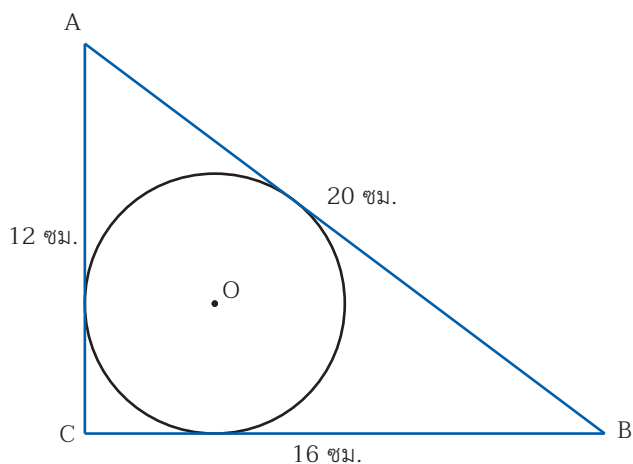
ข.  $140^\circ$

ค.  $145^\circ$

ง.  $150^\circ$



7.



จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้าน AC, BC และ AB ยาว 12 , 16 และ 20 เซนติเมตร ตามลำดับ มีวงกลม O แนบในรูป  $\triangle ABC$  จงหาความยาวของรัศมีของวงกลม (1 คะแนน)

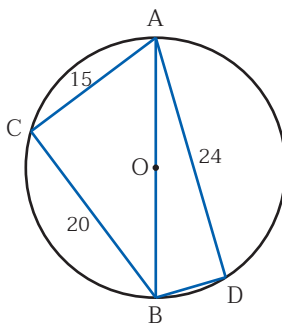
ก. 3 เซนติเมตร

ข. 4 เซนติเมตร

ค. 5 เซนติเมตร

ง. 6 เซนติเมตร

8.  $\overline{AB}$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O ถ้า  $\overline{AC}$  ยาว 15 เซนติเมตร  $\overline{BC}$  ยาว 20 เซนติเมตร และ  $\overline{AD}$  ยาว 24 เซนติเมตร ดังรูป



(4 คะแนน)

จงหา

1) ความยาวของรัศมีของวงกลม O

---

---

---

---

---

---

---

---

2) ความยาวของ  $\overline{BD}$

---

---

---

---

---

---

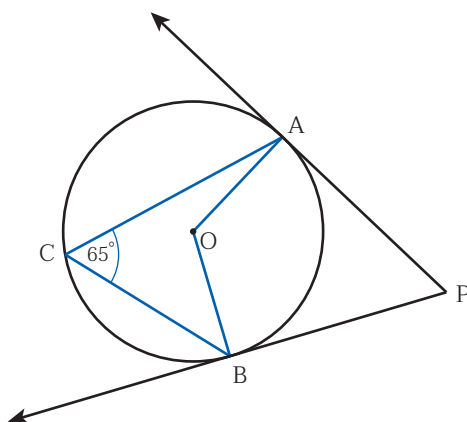
---

---

---

---

9. จากรูป  $\overrightarrow{PA}$  และ  $\overrightarrow{PB}$  สัมผัสวงกลม  $O$  ที่จุด  $A$  และ  $B$  ตามลำดับ และ  $\widehat{ACB} = 65^\circ$



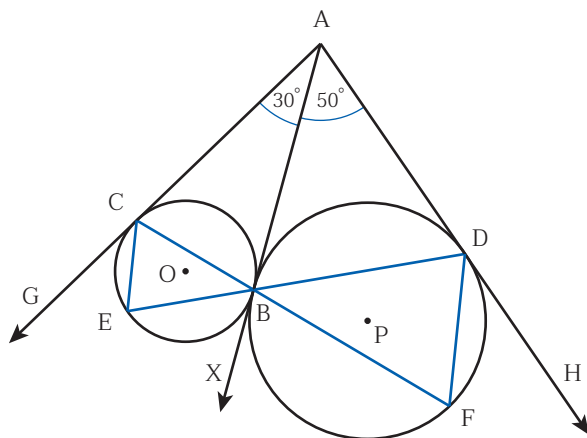
จงเติมข้อความและเหตุผลลงในช่องว่าง เพื่อหาขนาดของ  $\widehat{APB}$  ให้ถูกต้อง

(5 คะแนน)

| ข้อ | ข้อความ                                                            | เหตุผล |
|-----|--------------------------------------------------------------------|--------|
| 1)  | $\widehat{ACB} = \dots\dots\dots$ องศา                             |        |
| 2)  | $\widehat{AOB} = \dots\dots\dots$ องศา                             |        |
| 3)  | $\widehat{OAP} = \widehat{OBP} = \dots\dots\dots$ องศา             |        |
| 4)  | $\widehat{APB} + \dots\dots + \dots\dots + \dots\dots = 360^\circ$ |        |
| 5)  | $\widehat{APB} = \dots\dots\dots$ องศา                             |        |



12.

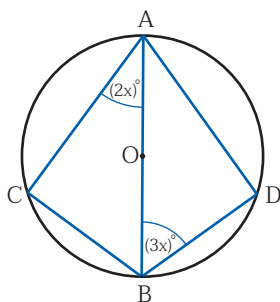


จากรูป ให้  $\overrightarrow{AX}$  สัมผัสทั้งวงกลม O และวงกลม P ที่จุด B  $\overrightarrow{AG}$  และ  $\overrightarrow{AH}$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O และวงกลม P ที่จุด C และ D ตามลำดับ ส่วนต่อของ  $\overline{CB}$  และส่วนต่อของ  $\overline{BD}$  ตัดวงกลม P และวงกลม O ที่จุด F และ E ตามลำดับ ถ้า  $\widehat{BAC} = 30^\circ$  และ  $\widehat{BAD} = 50^\circ$

จงพิจารณาว่าขนาดของมุมในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ แล้วทำเครื่องหมายถูก (✓) ลงในช่องว่างหน้าข้อที่เป็นจริง และทำเครื่องหมายผิด (✗) ลงในช่องว่างหน้าข้อที่เป็นเท็จ (5 คะแนน)

- ..... 1)  $\widehat{BCE} = 65^\circ$
- ..... 2)  $\widehat{DBF} = 40^\circ$
- ..... 3)  $\widehat{BDF} = 80^\circ$
- ..... 4)  $\widehat{CBD} = 140^\circ$
- ..... 5)  $\widehat{FDH} = 50^\circ$

13.



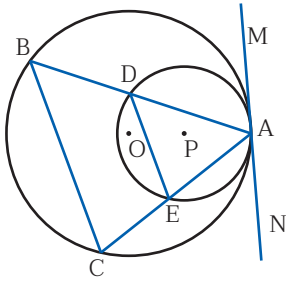
$\overline{AB}$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O

$\widehat{BC}$  และ  $\widehat{BD}$  มีความยาวเท่ากัน

ถ้า  $\widehat{ABD} = (3x)^\circ$  และ  $\widehat{BAC} = (2x)^\circ$  แล้ว

$x = \dots\dots\dots$  (2 คะแนน)

14.



จากรูป วงกลม O และวงกลม P สัมผัสกันภายในที่จุด A  
 คอร์ด AB และคอร์ด AC ตัดวงกลม P ที่จุด D และ E  
 ตามลำดับ  $\overline{MN}$  สัมผัสวงกลม O และวงกลม P ที่จุด A  
 จงแสดงว่า  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  พร้อมทั้งให้เหตุผล  
 ประกอบ (4 คะแนน)

15.

#### สถานการณ์ปัญหา

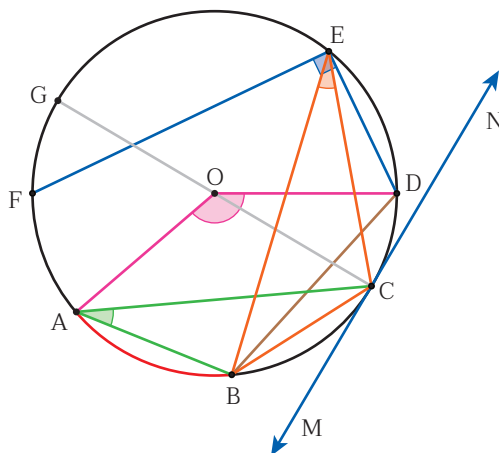
จากการสำรวจห้องทำงานของบริษัทแห่งหนึ่ง พบว่า โต๊ะทำงานของวิชาญอยู่ ณ พิกัด (1, -4)  
 โต๊ะทำงานของยวดยิ่งอยู่ ณ พิกัด (-4, 1) และ โต๊ะทำงานของเอกพจน์อยู่ ณ พิกัด (12, 1)

ถ้าเพื่อนทั้งสามคนต้องการติดตั้งอุปกรณ์จัดเส้นทาง (router) เพื่อกระจายสัญญาณ WIFI โดย  
 ให้มีระยะห่างจากโต๊ะทำงานของทั้งสามคนเท่า ๆ กัน จะมีวิธีหาพิกัดของจุดที่จะติดตั้งอุปกรณ์จัดเส้นทาง  
 เพื่อกระจายสัญญาณ WIFI ดังกล่าวได้อย่างไร

ให้นักเรียนลงจุดที่เป็นตำแหน่งของโต๊ะทำงานโดยใช้กระดาษกราฟ หรือซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต เช่น  
 The Geometer's Sketchpad แล้วแสดงวิธีหาพิกัดของจุดที่จะติดตั้งอุปกรณ์จัดเส้นทาง เพื่อกระจายสัญญาณ WIFI  
 พร้อมทั้งเขียนแสดงคำตอบ (5 คะแนน)

## เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบท้ายบท

1.



จากรูปที่กำหนดให้ จงเขียนความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวงกลม หรือขนาดของมุมมา 5 ข้อ

(5 คะแนน)

คำตอบมีได้หลากหลาย เช่น

- 1)  $OA = OD$
- 2)  $\widehat{BCE} = \widehat{BDE}$
- 3) มุมกลับ  $AOD = 2(\widehat{ABD})$
- 4)  $\widehat{DOC} = 2(\widehat{DBC})$
- 5)  $\widehat{DEF} = 90^\circ$
- 6)  $\widehat{MCG} = 90^\circ$
- 7)  $\widehat{BCM} = \widehat{BEC}$
- 8)  $\widehat{NCE} = \widehat{CBE}$
- 9) มุมกลับ  $AOC = 2(\widehat{ABC})$
- 10)  $\widehat{BAC} = \widehat{BEC}$
- 11)  $CG = 2(CO)$
- 12)  $\overline{OC} \perp \overleftrightarrow{MN}$

ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 1 นักเรียนสามารถบอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม คอร์ดของวงกลม และเส้นสัมผัสวงกลม

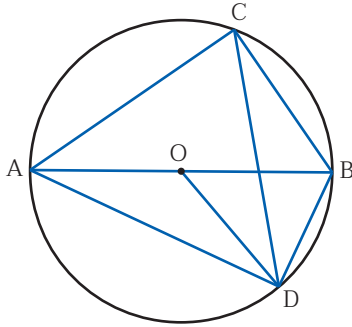
## เกณฑ์การให้คะแนน

คะแนนเต็ม 5 คะแนน

❁ ระบุความสัมพันธ์หรือขนาดของมุมถูกต้อง

ได้ข้อละ 1 คะแนน

2.



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม มี  $\overline{AB}$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม  $\widehat{BCD} = 25^\circ$  และ  $\widehat{CAB} = 35^\circ$  จงหาขนาดของมุมต่อไปนี้ (5 คะแนน)

- 1)  $\widehat{ACD} = 65^\circ$
- 2)  $\widehat{BOD} = 50^\circ$
- 3)  $\widehat{CBD} = 120^\circ$
- 4)  $\widehat{ADC} = 55^\circ$
- 5)  $\widehat{ODC} = 30^\circ$

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

เกณฑ์การให้คะแนน

คะแนนเต็ม 5 คะแนน ข้อละ 1 คะแนน

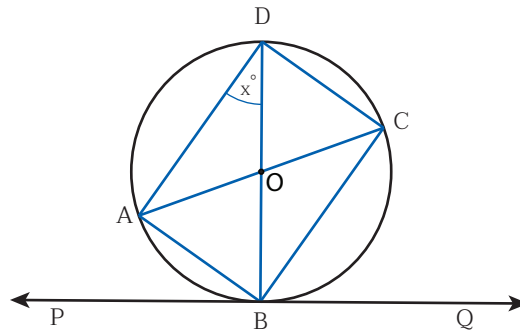
ตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ

ได้ 0 คะแนน

3.



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ  $\overleftrightarrow{PQ}$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B

ให้นักเรียนพิจารณาว่าความสัมพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ถูกหรือผิด แล้วทำเครื่องหมายถูก (✓) หรือผิด (✗) ลงใน ☐ หน้าข้อความ พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ โดยเขียนแสดงสมบัติทางเรขาคณิตหรือทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมนั้น (16 คะแนน)

☒ 1)  $2x = \widehat{AOB}$

เพราะ ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

☒ 2)  $x + \widehat{ODC} = 90^\circ$

เพราะ มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$  หรือหนึ่งมุมฉาก

✓ 3)  $x = \widehat{ACB}$

เพราะ ในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน

✓ 4)  $x + \widehat{ODC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$

เพราะ ผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมเท่ากับสองมุมฉาก

✗ 5)  $x = \frac{\widehat{BOC}}{2}$

ตัวอย่างการให้เหตุผล

เพราะ  $\widehat{AOB}$  เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันกับ  $\widehat{ADB}$  ดังนั้น  $x = \frac{\widehat{AOB}}{2}$

✓ 6)  $x + \widehat{OBC} + \widehat{AOD} = 180^\circ$

เพราะ เมื่อใช้ความรู้ที่ว่า ในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีขนาดเท่ากัน และขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้  $180^\circ$  แล้วทำให้ความสัมพันธ์ข้างต้นเป็นจริง

✓ 7)  $x = \widehat{PBA}$

เพราะ มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส จะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

✗ 8)  $x + \widehat{ACB} + \widehat{AOB} = 180^\circ$

ตัวอย่างการให้เหตุผล

เพราะ ในวงกลมเดียวกัน มุมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีขนาดเท่ากัน และมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน

จะได้  $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{OCB} = \widehat{OBC} = x$

เนื่องจาก  $\widehat{OBC} + \widehat{OCB} + \widehat{BOC} = 180^\circ$  หรือ  $x + \widehat{ACB} + \widehat{BOC} = 180^\circ$

นั่นคือ  $x + \widehat{ACB} + \widehat{AOB} = 180^\circ$  เมื่อ  $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$  แต่  $\widehat{AOB} \neq \widehat{BOC}$

ดังนั้น  $x + \widehat{ACB} + \widehat{AOB} \neq 180^\circ$

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 1 นักเรียนสามารถบอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม คอร์ดของวงกลม และเส้นสัมผัสวงกลม

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 16 คะแนน ข้อละ 2 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

❖ ตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

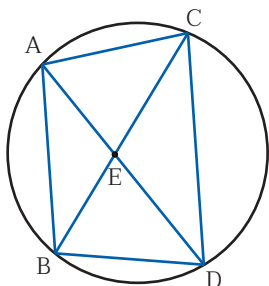
❖ เขียนแสดงสมบัติทางเรขาคณิตหรือทฤษฎีบท

เกี่ยวกับวงกลมที่รองรับความสัมพันธ์ถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน



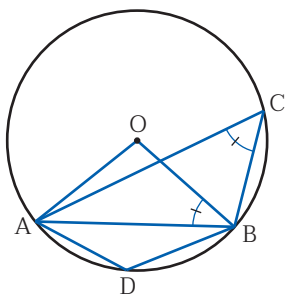
4.



จากรูป  $\overline{AB}$  ขนานกับ  $\overline{CD}$  และ  $\overline{AD}$  ตัดกับ  $\overline{BC}$  ที่จุด E  
ถ้า  $\angle AEB = 110^\circ$  แล้ว  $\angle ABC$  มีขนาดเท่าไร (1 คะแนน)

ก.  $25^\circ$ ข.  $35^\circ$ ค.  $45^\circ$ ง.  $55^\circ$ 

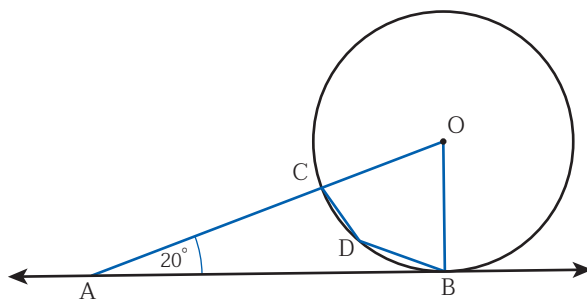
5.



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ  $\angle OBA = \angle ACB$   
จงหาขนาดของ  $\angle ADB$  (1 คะแนน)

ก.  $120^\circ$ ข.  $125^\circ$ ค.  $130^\circ$ ง.  $135^\circ$ 

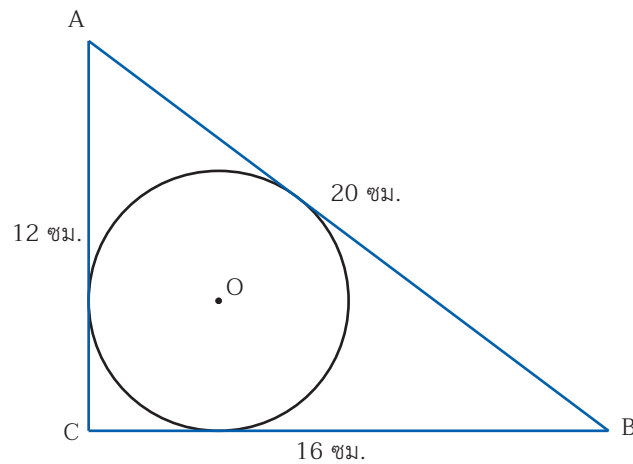
6.



จากรูป  $\overrightarrow{AB}$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด B และ  $\angle OAB = 20^\circ$  จงหาขนาดของ  $\angle BDC$  (1 คะแนน)

ก.  $135^\circ$ ข.  $140^\circ$ ค.  $145^\circ$ ง.  $150^\circ$

7.



จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้าน AC, BC และ AB ยาว 12 , 16 และ 20 เซนติเมตร ตามลำดับ มีวงกลม O แนบในรูป  $\triangle ABC$  จงหาความยาวของรัศมีของวงกลม (1 คะแนน)

ก. 3 เซนติเมตร

ข. 4 เซนติเมตร

ค. 5 เซนติเมตร

ง. 6 เซนติเมตร

สำหรับข้อ 4–7

ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

เกณฑ์การให้คะแนน

คะแนนเต็มข้อละ 1 คะแนน

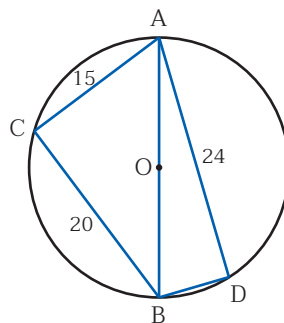
ตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ

ได้ 0 คะแนน

8.  $\overline{AB}$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O ถ้า  $\overline{AC}$  ยาว 15 เซนติเมตร  $\overline{BC}$  ยาว 20 เซนติเมตร และ  $\overline{AD}$  ยาว 24 เซนติเมตร ดังรูป



(4 คะแนน)

จงหา

- 1) ความยาวของรัศมีของวงกลม O

**แนวคิด** เนื่องจาก  $\widehat{ACB}$  เป็นมุมในครึ่งวงกลม  
 จะได้  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี  $\widehat{ACB}$  เป็นมุมฉาก  
 จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส  
 ดังนั้น  $AB^2 = AC^2 + BC^2$   
 $= 15^2 + 20^2$   
 $= 625$   
 $AB = 25$   
 จะได้  $OA = \frac{25}{2} = 12.5$   
 นั่นคือ รัศมีของวงกลม O ยาว 12.5 เซนติเมตร

- 2) ความยาวของ  $\overline{BD}$

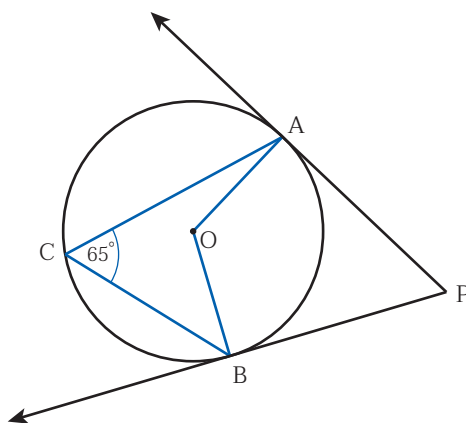
**แนวคิด** เนื่องจาก  $\widehat{ADB}$  เป็นมุมในครึ่งวงกลม  
 จะได้  $\triangle ABD$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี  $\widehat{ADB}$  เป็นมุมฉาก  
 จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส  
 ดังนั้น  $BD^2 = AB^2 - AD^2$   
 $= 25^2 - 24^2$   
 $= 49$   
 จะได้  $BD = 7$   
 นั่นคือ  $\overline{BD}$  ยาว 7 เซนติเมตร

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

|                  |                                                                                    |             |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| เกณฑ์การให้คะแนน | คะแนนเต็ม 4 คะแนน ข้อละ 2 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้                       |             |
|                  | ✱ เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบถูกต้อง                                                 | ได้ 2 คะแนน |
|                  | ✱ เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง<br>หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง | ได้ 1 คะแนน |
|                  | ✱ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน                              | ได้ 0 คะแนน |

9. จากรูป  $\overrightarrow{PA}$  และ  $\overrightarrow{PB}$  สัมผัสวงกลม  $O$  ที่จุด  $A$  และ  $B$  ตามลำดับ และ  $\widehat{ACB} = 65^\circ$



จงเติมข้อความและเหตุผลลงในช่องว่าง เพื่อหาขนาดของ  $\widehat{APB}$  ให้ถูกต้อง

(5 คะแนน)

| ข้อ | ข้อความ                                                                                                         | เหตุผล                                                                                          |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1)  | $\widehat{ACB} = \underline{\hspace{1cm}65\hspace{1cm}}$ องศา                                                   | กำหนดให้                                                                                        |
| 2)  | $\widehat{AOB} = \underline{\hspace{1cm}130\hspace{1cm}}$ องศา                                                  | มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน |
| 3)  | $\widehat{OAP} = \widehat{OBP} = \underline{\hspace{1cm}90\hspace{1cm}}$ องศา                                   | เส้นสัมผัสจะตั้งฉากกับรัศมีที่จุดสัมผัส                                                         |
| 4)  | $\widehat{APB} + \underline{\widehat{AOB}} + \underline{\widehat{OAP}} + \underline{\widehat{OBP}} = 360^\circ$ | ขนาดของมุมภายในทั้งสี่มุมของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันเป็น $360^\circ$                                 |
| 5)  | $\widehat{APB} = \underline{\hspace{1cm}50\hspace{1cm}}$ องศา                                                   | สมบัติของการเท่ากัน                                                                             |

#### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์  
เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 5 คะแนน ข้อละ 1 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

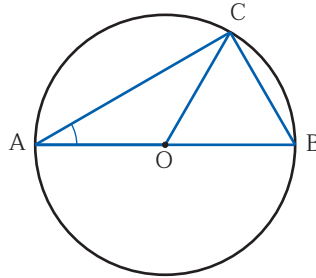
❖ เติมข้อความถูกต้อง

ได้ 0.5 คะแนน

❖ เขียนแสดงเหตุผลถูกต้อง

ได้ 0.5 คะแนน

10.  $\overline{AB}$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม  $O$  และ  $\triangle OBC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ดังรูป จงแสดงการหาขนาดของ  $\angle OAC$  พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ (5 คะแนน)



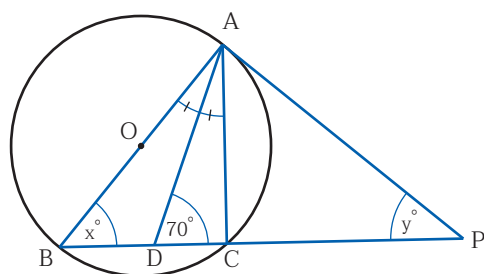
|          |                                                   |                                        |                                                                                                     |
|----------|---------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| แนวคิด 1 | เนื่องจาก                                         | $\angle ACB = 90^\circ$                | (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด $90^\circ$ )                                                                 |
|          | และ                                               | $\angle OBC = 60^\circ$                | ( $\triangle OBC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า)                                                        |
|          | จะได้                                             | $\angle OAC = 180 - (90 + 60)$         | (ผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเป็น $180^\circ$ )                                          |
|          | ดังนั้น                                           | $\angle OAC = 30^\circ$                |                                                                                                     |
| แนวคิด 2 | เนื่องจาก                                         | $\angle ACB = 90^\circ$                | (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด $90^\circ$ )                                                                 |
|          | และ                                               | $\angle OCB = 60^\circ$                | ( $\triangle OBC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า)                                                        |
|          | จะได้                                             | $\angle OCA = \angle ACB - \angle OCB$ |                                                                                                     |
|          | ดังนั้น                                           | $\angle OCA = 90 - 60 = 30^\circ$      | (สมบัติของการเท่ากัน)                                                                               |
|          | เนื่องจาก                                         | $OA = OC$                              | (รัศมีของวงกลมเดียวกัน)                                                                             |
|          | ดังนั้น $\triangle AOC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว |                                        | (บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว)                                                                   |
|          | และเนื่องจาก $\angle OAC = \angle OCA$            |                                        | (มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)                                                    |
|          | ดังนั้น                                           | $\angle OAC = 30^\circ$                |                                                                                                     |
| แนวคิด 3 | เนื่องจาก                                         | $\angle BOC = 60^\circ$                | ( $\triangle OBC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า)                                                        |
|          | และ                                               | $\angle BOC = 2(\angle BAC)$           | (มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน) |
|          | จะได้                                             | $60^\circ = 2(\angle BAC)$             |                                                                                                     |
|          | และ                                               | $\angle BAC = \frac{60}{2} = 30^\circ$ |                                                                                                     |
|          | ดังนั้น                                           | $\angle OAC = 30^\circ$                |                                                                                                     |

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์  
เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

|           |                                          |             |
|-----------|------------------------------------------|-------------|
| ส่วนที่ 1 | การเขียนแสดงการหาขนาดของ $\widehat{OAC}$ |             |
|           | ✧ เขียนแสดงถูกต้อง                       | ได้ 2 คะแนน |
|           | ✧ เขียนแสดงถูกต้องบางส่วน                | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✧ เขียนแสดงไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน       | ได้ 0 คะแนน |
| ส่วนที่ 2 | การเขียนแสดงเหตุผล                       |             |
|           | ✧ เขียนแสดงเหตุผลถูกต้อง                 | ได้ 2 คะแนน |
|           | ✧ เขียนแสดงเหตุผลถูกต้องบางส่วน          | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✧ เขียนแสดงเหตุผลไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน | ได้ 0 คะแนน |
| ส่วนที่ 3 | การหาขนาดของ $\widehat{OAC}$             |             |
|           | ✧ หาขนาดของมุมถูกต้อง                    | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✧ หาขนาดของมุมไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ      | ได้ 0 คะแนน |

11.



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$\overline{PA}$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด A

$\overline{AD}$  แบ่งครึ่ง  $\widehat{BAC}$  และ  $\widehat{ADC} = 70^\circ$

จงหา (2 คะแนน)

1)  $x = 50$

2)  $y = 40$

แนวคิด 1) เนื่องจาก  $\widehat{ACB} = 90^\circ$  (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด  $90^\circ$ )  
และ  $\widehat{ADC} = 70^\circ$  (กำหนดให้)  
 $\widehat{CAD} + \widehat{ACB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$  (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )  
จะได้  $\widehat{CAD} = 180 - 90 - 70 = 20^\circ$   
เนื่องจาก  $\widehat{BAC} = 2(\widehat{CAD})$   
ดังนั้น  $\widehat{BAC} = 40^\circ$   
เนื่องจาก  $x + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180$  (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น  $180^\circ$ )  
จะได้  $x = 180 - 90 - 40 = 50$

2) เนื่องจาก  $y + \widehat{PAB} + x = 180$

(ขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม  
รวมกันเป็น  $180^\circ$ )

จะได้  $y = 180 - 90 - 50 = 40$

ดังนั้น  $x = 50$  และ  $y = 40$

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 2 คะแนน ข้อละ 1 คะแนน

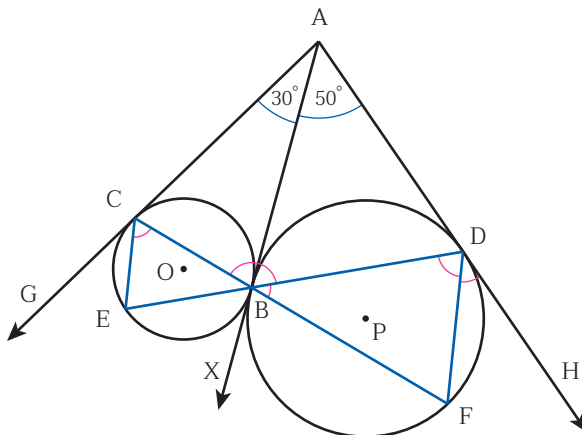
ตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ

ได้ 0 คะแนน

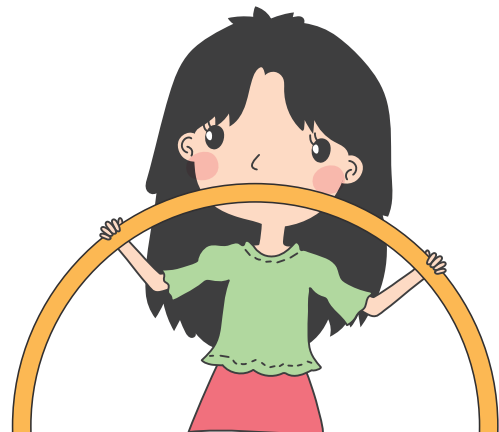
12.



จากรูป ให้  $\overrightarrow{AX}$  สัมผัสทั้งวงกลม O และวงกลม P ที่จุด B  $\overrightarrow{AG}$  และ  $\overrightarrow{AH}$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O และวงกลม P ที่จุด C และ D ตามลำดับ ส่วนต่อของ  $\overline{CB}$  และส่วนต่อของ  $\overline{BD}$  ตัดวงกลม P และวงกลม O ที่จุด F และ E ตามลำดับ ถ้า  $\widehat{BAC} = 30^\circ$  และ  $\widehat{BAD} = 50^\circ$

จงพิจารณาว่าขนาดของมุมในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ แล้วทำเครื่องหมายถูก (✓) ลงในช่องว่างหน้าข้อที่เป็นจริง และทำเครื่องหมายผิด (✗) ลงในช่องว่างหน้าข้อที่เป็นเท็จ (5 คะแนน)

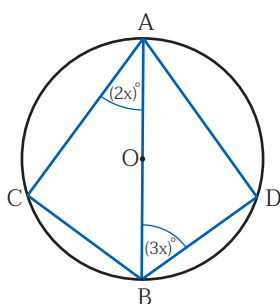
- ✓ 1)  $\widehat{BCE} = 65^\circ$
- ✓ 2)  $\widehat{DBF} = 40^\circ$
- ✗ 3)  $\widehat{BDF} = 80^\circ$
- ✓ 4)  $\widehat{CBD} = 140^\circ$
- ✗ 5)  $\widehat{FDH} = 50^\circ$



### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

|                                                                                        |                                 |             |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-------------|
| ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ |                                 |             |
| เกณฑ์การให้คะแนน                                                                       | คะแนนเต็ม 5 คะแนน ข้อละ 1 คะแนน |             |
|                                                                                        | ตอบถูกต้อง                      | ได้ 1 คะแนน |
|                                                                                        | ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ        | ได้ 0 คะแนน |

13.



$\overline{AB}$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O

$\widehat{BC}$  และ  $\widehat{BD}$  มีความยาวเท่ากัน

ถ้า  $\widehat{ABD} = (3x)^\circ$  และ  $\widehat{BAC} = (2x)^\circ$  แล้ว

$x = \underline{\hspace{1cm}18\hspace{1cm}}$  (2 คะแนน)

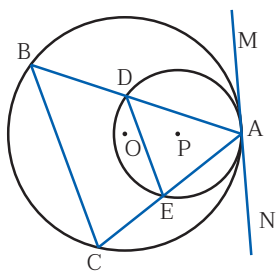
|         |           |                                                             |                                                                          |
|---------|-----------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| แนวคิด  | เนื่องจาก | $m(\widehat{BC}) = m(\widehat{BD})$                         | (กำหนดให้)                                                               |
|         | จะได้     | $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = (2x)^\circ$                | (มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาวเท่ากันจะมีขนาดเท่ากัน) |
|         | เนื่องจาก | $\widehat{ABD} = (3x)^\circ$                                | (กำหนดให้)                                                               |
|         | และ       | $\widehat{ADB} = 90^\circ$                                  | (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด $90^\circ$ )                                      |
|         | เนื่องจาก | $\widehat{BAD} + \widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 180^\circ$ | (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเป็น $180^\circ$ )       |
|         |           | $2x + 3x + 90 = 180$                                        |                                                                          |
| ดังนั้น |           | $x = 18$                                                    |                                                                          |

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

|                                                                                        |                          |             |
|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-------------|
| ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ |                          |             |
| เกณฑ์การให้คะแนน                                                                       | คะแนนเต็ม 2 คะแนน        |             |
|                                                                                        | ตอบถูกต้อง               | ได้ 2 คะแนน |
|                                                                                        | ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ | ได้ 0 คะแนน |



14.



จากรูป วงกลม O และวงกลม P สัมผัสกันภายในที่จุด A  
 คอร์ด AB และคอร์ด AC ตัดวงกลม P ที่จุด D และ E  
 ตามลำดับ  $\overline{MN}$  สัมผัสวงกลม P ที่จุด A  
 จงแสดงว่า  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  พร้อมทั้งให้เหตุผล  
 ประกอบ (4 คะแนน)

|        |                                                 |                                                                                                                                   |
|--------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| แนวคิด | เนื่องจาก $\angle ABC = \angle CAN$             | } (มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส<br>จะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของ<br>วงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น) |
|        | และ $\angle ADE = \angle CAN$                   |                                                                                                                                   |
|        | ดังนั้น $\angle ABC = \angle ADE$               | (สมบัติของการเท่ากัน)                                                                                                             |
|        | ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\angle ACB = \angle AED$ |                                                                                                                                   |
|        | และ $\angle BAC = \angle DAE$                   | (มุมร่วม)                                                                                                                         |
|        | ดังนั้น $\triangle ABC \sim \triangle ADE$      | (มีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ 3 คู่)                                                                                            |

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 4 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

|           |                                          |             |
|-----------|------------------------------------------|-------------|
| ส่วนที่ 1 | การเขียนแสดงแนวคิด                       |             |
|           | ✦ เขียนแสดงแนวคิดถูกต้อง                 | ได้ 2 คะแนน |
|           | ✦ เขียนแสดงแนวคิดถูกต้องบางส่วน          | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✦ เขียนแสดงแนวคิดไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน | ได้ 0 คะแนน |
| ส่วนที่ 2 | การเขียนแสดงเหตุผลประกอบแนวคิด           |             |
|           | ✦ เขียนแสดงเหตุผลถูกต้อง                 | ได้ 2 คะแนน |
|           | ✦ เขียนแสดงเหตุผลถูกต้องบางส่วน          | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✦ เขียนแสดงเหตุผลไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน | ได้ 0 คะแนน |

15.

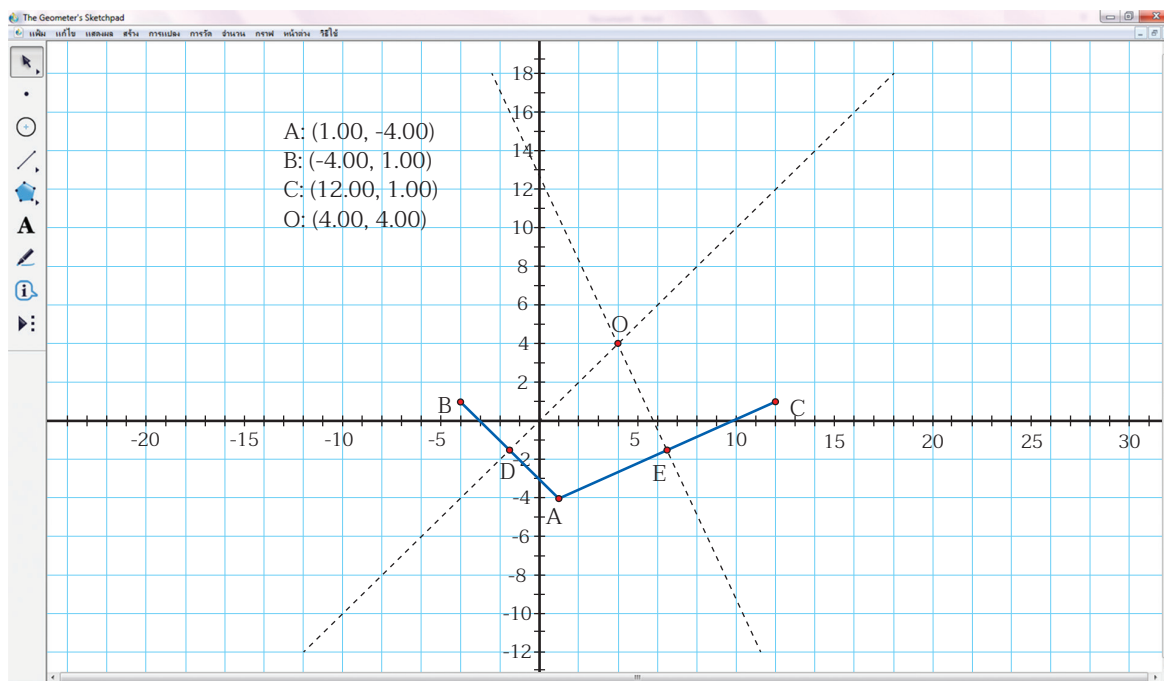
## สถานการณ์ปัญหา

จากการสำรวจห้องทำงานของบริษัทแห่งหนึ่ง พบว่า โต๊ะทำงานของวิชาญอยู่ ณ พิกัด (1, -4) โต๊ะทำงานของยวดยิ่งอยู่ ณ พิกัด (-4, 1) และ โต๊ะทำงานของเอกพจน์อยู่ ณ พิกัด (12, 1)

ถ้าเพื่อนทั้งสามคนต้องการติดตั้งอุปกรณ์จัดเส้นทาง (router) เพื่อกระจายสัญญาณ WIFI โดยให้มีระยะห่างจากโต๊ะทำงานของทั้งสามคน เท่า ๆ กัน จะมีวิธีหาพิกัดของจุดที่จะติดตั้งอุปกรณ์จัดเส้นทาง เพื่อกระจายสัญญาณ WIFI ดังกล่าวได้อย่างไร

ให้นักเรียนลงจุดที่เป็นตำแหน่งของโตะทำงานโดยใช้กระดาษกราฟ หรือซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต เช่น The Geometer's Sketchpad แล้วแสดงวิธีหาพิกัดของจุดที่จะติดตั้งอุปกรณ์จัดเส้นทางเพื่อกระจายสัญญาณ WIFI พร้อมทั้งเขียนแสดงคำตอบ (5 คะแนน)

แนวคิด



ให้ จุด A แทนตำแหน่งโต๊ะทำงานของวิชาญ

จุด B แทนตำแหน่งโต๊ะทำงานของยวดยิ่ง

จุด C แทนตำแหน่งโต๊ะทำงานของเอกพจน์

1. ลงจุด  $(1, 4)$ ,  $(-4, 1)$  และ  $(12, 1)$  บนระนาบพิกัดฉากจะได้ตำแหน่งโต๊ะทำงานของเพื่อนทั้งสามคน
2. สร้าง  $\overline{AB}$  และ  $\overline{AC}$
3. แบ่งครึ่ง  $\overline{AB}$  และ  $\overline{AC}$  ที่จุด D และ E ตามลำดับ
4. สร้างเส้นตั้งฉากกับ  $\overline{AB}$  ที่จุด D และสร้างเส้นตั้งฉากกับ  $\overline{AC}$  ที่จุด E ให้เส้นตั้งฉากทั้งสองตัดกันที่จุด O
5. วัดพิกัดของจุด O

2. สร้าง  $\overline{AB}$  และ  $\overline{AC}$

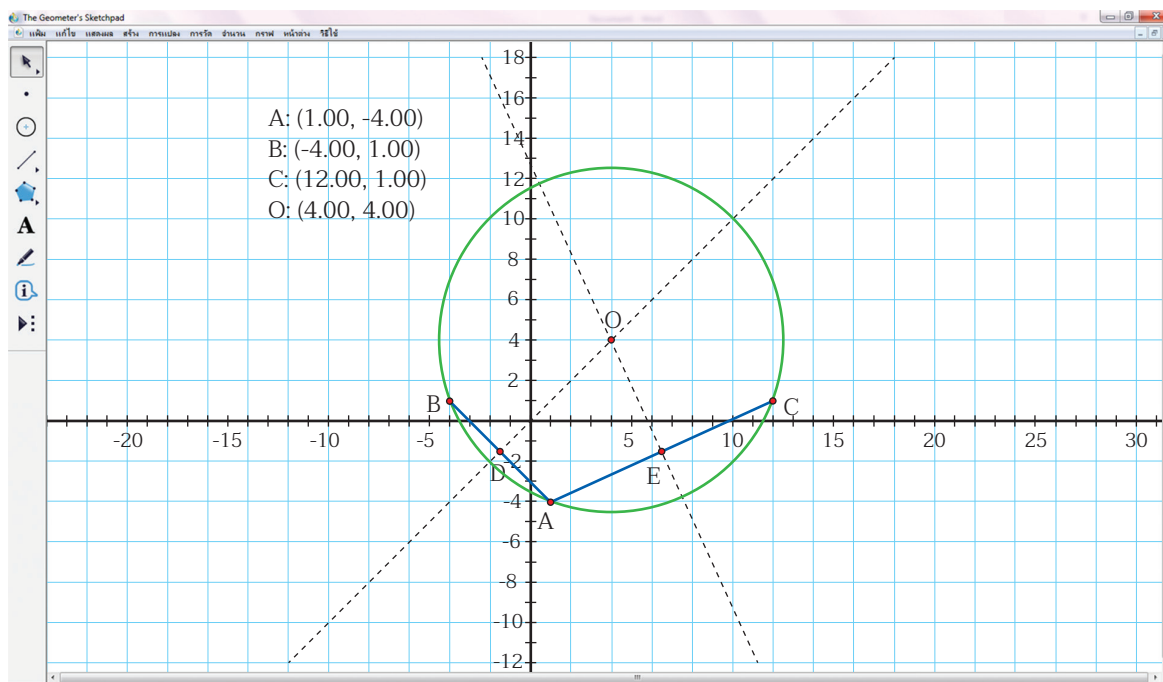
3. แบ่งครึ่ง  $\overline{AB}$  และ  $\overline{AC}$  ที่จุด D และ E ตามลำดับ

4. สร้างเส้นตั้งฉากกับ  $\overline{AB}$  ที่จุด D และสร้างเส้นตั้งฉากกับ  $\overline{AC}$  ที่จุด E ให้เส้นตั้งฉากทั้งสองตัดกันที่จุด O

## 5. วัดพิกัดของจุด O

เนื่องจาก จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด  $A$  จุด  $B$  และจุด  $C$

จะได้ จุด  $O$  เป็นตำแหน่งของจุดที่จะติดตั้งอุปกรณ์จัดเส้นทาง ที่ทำให้ระยะห่างจากโต๊ะทำงานของทั้งสามคนเท่า ๆ กัน และพิกัดของจุด  $O$  คือ  $(4, 4)$  ดังรูป



### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมไปใช้ในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

ส่วนที่ 1 การลงจุดตำแหน่งต่าง ๆ รวมทั้งตำแหน่งที่จะติดตั้งอุปกรณ์จัดเส้นทาง

- ❖ ลงจุดถูกต้องครบถ้วน ได้ 2 คะแนน
- ❖ ลงจุดถูกต้องบางส่วน ได้ 1 คะแนน
- ❖ ลงจุดไม่ถูกต้อง หรือไม่ลงจุด ได้ 0 คะแนน

ส่วนที่ 2 การเขียนแสดงวิธีหาพิกัดของจุด

- ❖ เขียนแสดงวิธีหาพิกัดของจุดถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ❖ เขียนแสดงวิธีหาพิกัดของจุดถูกต้องบางส่วน ได้ 1 คะแนน
- ❖ เขียนแสดงวิธีหาพิกัดของจุดไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน ได้ 0 คะแนน

ส่วนที่ 3 การสรุปคำตอบ

- ❖ สรุปคำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ❖ สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่สรุป ได้ 0 คะแนน

| บทที่                                                                             | 3                                                             | พีระมิด กรวย และทรงกลม |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|------------------------|
|  | ในบทพีระมิด กรวย และทรงกลมนี้ ประกอบด้วยหัวข้อย่อยดังต่อไปนี้ |                        |
|                                                                                   | 3.1 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด                            | 5 ชั่วโมง              |
|                                                                                   | 3.2 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของกรวย                               | 5 ชั่วโมง              |
|                                                                                   | 3.3 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม                             | 5 ชั่วโมง              |



### สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด และนำไปใช้



### ตัวชี้วัด

1. ประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องปริมาตรของพีระมิด กรวย และทรงกลมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง
2. ประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง



### จุดประสงค์ของบทเรียน

นักเรียนสามารถ

1. หาปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม
2. ประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลมในการแก้ปัญหา



### ความเชื่อมโยงระหว่างตัวชี้วัดกับจุดประสงค์ของบทเรียน

เนื่องจากตัวชี้วัดกล่าวถึงการประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลมในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง ดังนั้น เพื่อให้การเรียนรู้ของนักเรียนในเรื่องพีระมิด กรวย และทรงกลม สอดคล้องกับตัวชี้วัด ครูควรจัดประสบการณ์ให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสามมิติ ได้แก่ พีระมิด กรวย และทรงกลม รวมทั้งใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของรูปเรขาคณิตดังกล่าวในการแก้ปัญหา ซึ่งสะท้อนได้จากการที่นักเรียนสามารถ

- ❖ อธิบายลักษณะและส่วนต่าง ๆ ของพีระมิด กรวย และทรงกลม
- ❖ หาปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม
- ❖ ประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม ในการแก้ปัญหา

 **ความคิดรวบยอดของบทเรียน**

พีระมิด กรวย และทรงกลมเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ เนื่องจากปริมาตรของพีระมิดสัมพันธ์กับปริมาตรของปริซึม และปริมาตรของกรวยและปริมาตรของทรงกลมต่างก็สัมพันธ์กับปริมาตรของทรงกระบอก เราจึงใช้ปริมาตรของปริซึมและทรงกระบอกในการอธิบายที่มาของการหาปริมาตรของพีระมิด กรวย และทรงกลม สำหรับพื้นที่ผิวของพีระมิดและกรวยสามารถอธิบายและหาได้จากพื้นที่ของรูปคลี่ของพีระมิดและกรวยนั้น แต่เนื่องจากทรงกลมมีลักษณะเฉพาะที่ไม่สามารถใช้พื้นที่ของรูปเรขาคณิตสองมิติในการอธิบายที่มาของการหาพื้นที่ผิวได้โดยตรง ดังนั้น จึงใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรของทรงกลมและปริมาตรของพีระมิดมาอธิบายที่มาของการหาพื้นที่ผิว

 **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์**

| ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์            | หัวข้อ                                |                                    |                                      |                                   |
|-------------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
|                                           | 3.1<br>ปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด | 3.2<br>ปริมาตรและพื้นที่ผิวของกรวย | 3.3<br>ปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม | กิจกรรมท้ายบท/<br>แบบฝึกหัดท้ายบท |
| การแก้ปัญหา                               | ❖                                     | ❖                                  | ❖                                    | ❖                                 |
| การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ |                                       |                                    |                                      |                                   |
| การเชื่อมโยง                              | ❖                                     |                                    | ❖                                    | ❖                                 |
| การให้เหตุผล                              | ❖                                     | ❖                                  | ❖                                    | ❖                                 |
| การคิดสร้างสรรค์                          |                                       |                                    |                                      |                                   |

## ความเชื่อมโยงของความรู้

### ความรู้พื้นฐาน

- ❖ ปริมาตรของปริซึม เพื่อเป็นพื้นฐานในการหาปริมาตรของพีระมิด
- ❖ ปริมาตรของทรงกระบอก เพื่อเป็นพื้นฐานในการหาปริมาตรของกรวยและทรงกลม
- ❖ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เพื่อเป็นพื้นฐานในการหาปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิดและกรวย รวมทั้งการแก้ปัญหา
- ❖ อัตราส่วนและสัดส่วน เพื่อเป็นพื้นฐานในการหาพื้นที่ผิวของกรวย

### ความรู้ ในบทเรียน

- ❖ ปริมาตรของพีระมิด เป็นหนึ่งในสามของปริมาตรของปริซึมที่มีพื้นที่ฐานและความสูงเท่ากับพีระมิด  

$$\text{ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$
- ❖ พื้นที่ผิวของพีระมิด หาได้จากพื้นที่ผิวข้างทั้งหมดรวมกับพื้นที่ฐาน
- ❖ ปริมาตรของกรวย เป็นหนึ่งในสามของปริมาตรของทรงกระบอกที่มีพื้นที่ฐานและความสูงเท่ากับกรวย  

$$\text{ปริมาตรของกรวย} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ เมื่อ } r \text{ แทนรัศมีของฐานของกรวย และ } h \text{ แทนความสูงของกรวย}$$
- ❖ พื้นที่ผิวของกรวย หาได้จากพื้นที่ผิวข้างรวมกับพื้นที่ฐาน  

$$\text{พื้นที่ผิวของกรวย} = \pi r l + \pi r^2 \text{ เมื่อ } r \text{ แทนรัศมีของฐานของกรวย และ } l \text{ แทนส่วนสูงเอียงของกรวย}$$
- ❖ ปริมาตรของทรงกลม หาได้จากความสัมพันธ์ที่ว่า สามเท่าของปริมาตรของครึ่งทรงกลมเท่ากับปริมาตรของทรงกระบอก ที่มีรัศมีของฐานเท่ากับรัศมีของครึ่งทรงกลม และความสูงเป็นสองเท่าของรัศมีของครึ่งทรงกลม  

$$\text{ปริมาตรของทรงกลม} = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ เมื่อ } r \text{ แทนรัศมีของทรงกลม}$$
- ❖ พื้นที่ผิวของทรงกลม สามารถอธิบายที่มาของสูตรได้โดยอาศัยความรู้จากปริมาตรของทรงกลมและปริมาตรของพีระมิด  

$$\text{พื้นที่ผิวของทรงกลม} = 4\pi r^2 \text{ เมื่อ } r \text{ แทนรัศมีของทรงกลม}$$

### ความรู้ในอนาคต

### ลำดับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของบทเรียน



### 3.1 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด (5 ชั่วโมง)

#### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

1. อธิบายลักษณะและส่วนต่าง ๆ ของพีระมิด
2. หาปริมาตรของพีระมิดและนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหา
3. หาพื้นที่ผิวของพีระมิดและนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหา

#### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

-

#### สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. อุปกรณ์ของกิจกรรม : ปริมาตรของพีระมิด
2. อุปกรณ์ของกิจกรรมเสนอแนะ 3.1 : ประกอบร่างหาปริมาตร

#### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด ซึ่งต้องการให้นักเรียนรู้จักส่วนประกอบต่าง ๆ ของพีระมิด และความหมายของพีระมิดในทางคณิตศาสตร์ รวมถึงให้นักเรียนทำกิจกรรมเชิงสำรวจเพื่อสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับสูตรการหาปริมาตรของพีระมิด และการหาพื้นที่ผิวของพีระมิดจากพื้นที่ของรูปคลี่ของพีระมิด ทั้งนี้ ในการทำกิจกรรมดังกล่าว จะช่วยพัฒนาความสามารถในการนิรนัย และความรู้สึกเชิงปริภูมิ (spatial sense) ของนักเรียน แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ อาจทำได้ดังนี้

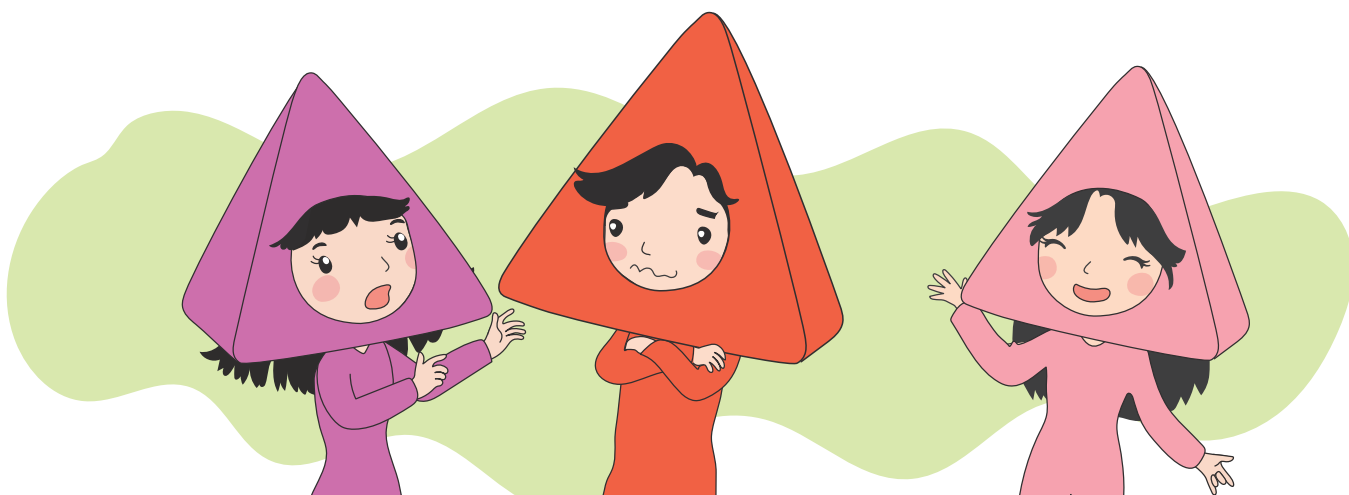
1. ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับสิ่งของในชีวิตประจำวันที่มีลักษณะคล้ายพีระมิด และให้นักเรียนร่วมกันอภิปราย เพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับลักษณะและส่วนต่าง ๆ ของพีระมิด รวมถึงความหมายของพีระมิดในทางคณิตศาสตร์
2. ครูให้นักเรียนทำ “กิจกรรม : ปริมาตรของพีระมิด” ในหนังสือเรียน หน้า 120–122 เพื่อให้นักเรียนได้สำรวจ สังเกต สร้างข้อความคาดการณ์ และหาข้อสรุปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิดและปริมาตรของปริซึมที่มีพื้นที่ฐานเท่ากันและความสูงเท่ากัน ซึ่งจะได้ว่า ปริมาตรของพีระมิดเป็นหนึ่งในสามของปริมาตรของปริซึม เพื่อนำไปสู่สูตรการหาปริมาตรของพีระมิด

นอกจากนี้ ครูควรให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิดและปริมาตรของปริซึมที่มี ความสูงเท่ากันและพื้นที่ฐานเท่ากัน แต่ฐานทั้งสองไม่เป็นรูปเรขาคณิตที่เท่ากันทุกประการ ซึ่งความสัมพันธ์ ดังกล่าวยังคงเหมือนเดิม



ครูอาจใช้วิธีทัศน์ในการบสื่อเสริมเพิ่มความรู้ในหนังสือเรียน หน้า 123 แทนการทำกิจกรรมในชั้นเรียน ซึ่งจะทำให้นักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์ และหาข้อสรุปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิด และปริมาตรของปริซึมที่มีพื้นที่ฐานเท่ากันและความสูงเท่ากัน เพื่อนำไปสู่สูตรการหาปริมาตรของพีระมิดได้ เช่นเดียวกัน

3. ครูอาจใช้ “กิจกรรมเสนอแนะ 3.1 : ประกอบร่างหาปริมาตร” ในคู่มือครู หน้า 182–185 ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะ ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของลูกบาศก์และปริมาตรของพีระมิดปริกติฐานสี่เหลี่ยม โดยครูสามารถ ให้นักเรียนใช้การนึกภาพในการสร้างข้อความคาดการณ์และค้นหาข้อสรุปเกี่ยวกับการหาปริมาตรของพีระมิด
4. ครูอาจใช้ชวนคิด 3.1 ในหนังสือเรียน หน้า 124 ให้นักเรียนได้ฝึกใช้การนึกภาพและความรู้สึกเชิงปริภูมิประกอบการคิดและให้เหตุผลในการหาคำตอบ ซึ่งหากนักเรียนยังหาคำตอบไม่ได้ ครูอาจใช้การคำนวณเพื่อช่วยให้นักเรียน เปรียบเทียบความสูงของพีระมิด ก กับ ข ได้ก่อน แล้วจึงให้สังเกตผลที่ได้จากการคำนวณและการเปรียบเทียบนั้น ก่อนที่จะเชื่อมโยงไปเปรียบเทียบความสูงของพีระมิดคู่อื่น ๆ โดยไม่ต้องมีการคำนวณ
5. ครูให้นักเรียนสังเกตรูปคลี่ของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมมุมฉาก เพื่อใช้เป็นตัวอย่างในการเชื่อมโยงไปสู่การหาพื้นที่ผิวของพีระมิด จากนั้น ครูให้นักเรียนพิจารณาลักษณะและรูปคลี่ของพีระมิดปรกติ เพื่อเชื่อมโยงไปสู่สูตรของ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ครูควรเน้นย้ำกับนักเรียนว่า สำหรับการหาพื้นที่ผิวของ พีระมิดตรงที่ไม่ใช่พีระมิดปรกติดังกล่าวพื้นที่ผิวข้างจากพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมแต่ละด้าน



## กิจกรรม : ปริมาตรของพีระมิด

กิจกรรมนี้เป็นกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิดและปริมาตรของปริซึมที่มีพื้นที่ฐานเท่ากันและความสูงเท่ากันกับพีระมิดนั้น ซึ่งจะนำไปสู่สูตรการหาปริมาตรของพีระมิด นอกจากนี้ ยังเป็นกิจกรรมที่ช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการนิยามและสร้างข้อความคาดการณ์ โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

1. กระดาษแข็ง
2. กรรไกร
3. เทปใส
4. ทราย



### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4–5 คน
2. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำกิจกรรมตามขั้นตอนการทำกิจกรรม ข้อ 1–4 ในหนังสือเรียน หน้า 120–122 จากนั้นให้สรุปผลเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิดและปริมาตรของปริซึมที่มีพื้นที่ฐานเท่ากันและความสูงเท่ากัน
3. ครูให้นักเรียนหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ฐานและความสูงของพีระมิดและปริซึมที่ประกอบขึ้น จากนั้นให้สรุปสูตรการหาปริมาตร
4. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำกิจกรรมตามขั้นตอนการทำกิจกรรม ข้อ 5 ในหนังสือเรียน หน้า 122 จากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มสรุปผลที่ได้

**หมายเหตุ** ในการทำกิจกรรม หากนักเรียนบรรจุทรายลงในพีระมิดแน่นเกินไปหรือไม่เต็มพีระมิดพอดี อาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนได้ ดังนั้น ครูอาจให้นักเรียนทดลอง 2–3 ครั้ง เพื่อให้เห็นแนวโน้มที่จะนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ได้ง่ายขึ้น

## เฉลยคำถามท้ายกิจกรรม

1. 3 ครั้ง
2. คำตอบมีได้หลากหลาย เช่น
  - ❖ ปริมาตรของปริซึมเป็นสามเท่าของปริมาตรของพีระมิดที่มีพื้นที่ฐานเท่ากัน และความสูงเท่ากัน
  - ❖ ปริมาตรของพีระมิดเป็นหนึ่งในสามของปริมาตรของปริซึมที่มีพื้นที่ฐานเท่ากัน และความสูงเท่ากัน

## กิจกรรมเสนอแนะ 3.1 : ประกอบร่างหาปริมาตร

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับปริมาตรของลูกบาศก์ที่มีพื้นที่ฐานและความสูงเท่ากัน เพื่อนำไปสู่การหาปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสผ่านกิจกรรมที่นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง กิจกรรมนี้ช่วยให้นักเรียนได้ฝึกการนิยามภาพ เพื่อสร้างข้อความคาดการณ์และค้นหาข้อสรุปเกี่ยวกับการหาปริมาตรของพีระมิด โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

1. ใบกิจกรรมเสนอแนะ 3.1 : ประกอบร่างหาปริมาตร
2. กระดาษรูปคลี่
3. กรรไกร
4. กาวหรือเทปใส



### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4–5 คน
2. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมตามขั้นตอนข้อ 1–2 และตอบคำถามข้อ 3 ในใบกิจกรรมเสนอแนะ 3.1 : ประกอบร่างหาปริมาตร จากนั้นให้นักเรียนทั้งชั้นเรียนร่วมกันอภิปรายคำตอบที่ได้จากคำถามในข้อ 3 โดยครูอาจให้นักเรียนแสดงวิธีการประกอบลูกบาศก์จากรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่ แล้วให้นักเรียนได้สำรวจความสัมพันธ์ระหว่างลูกบาศก์และรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่  
ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่าเงื่อนไขที่ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับปริมาตรของลูกบาศก์เป็นจริง คือ ลูกบาศก์และรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่ (พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส) ต้องมีพื้นที่ฐานและความสูงเท่ากัน

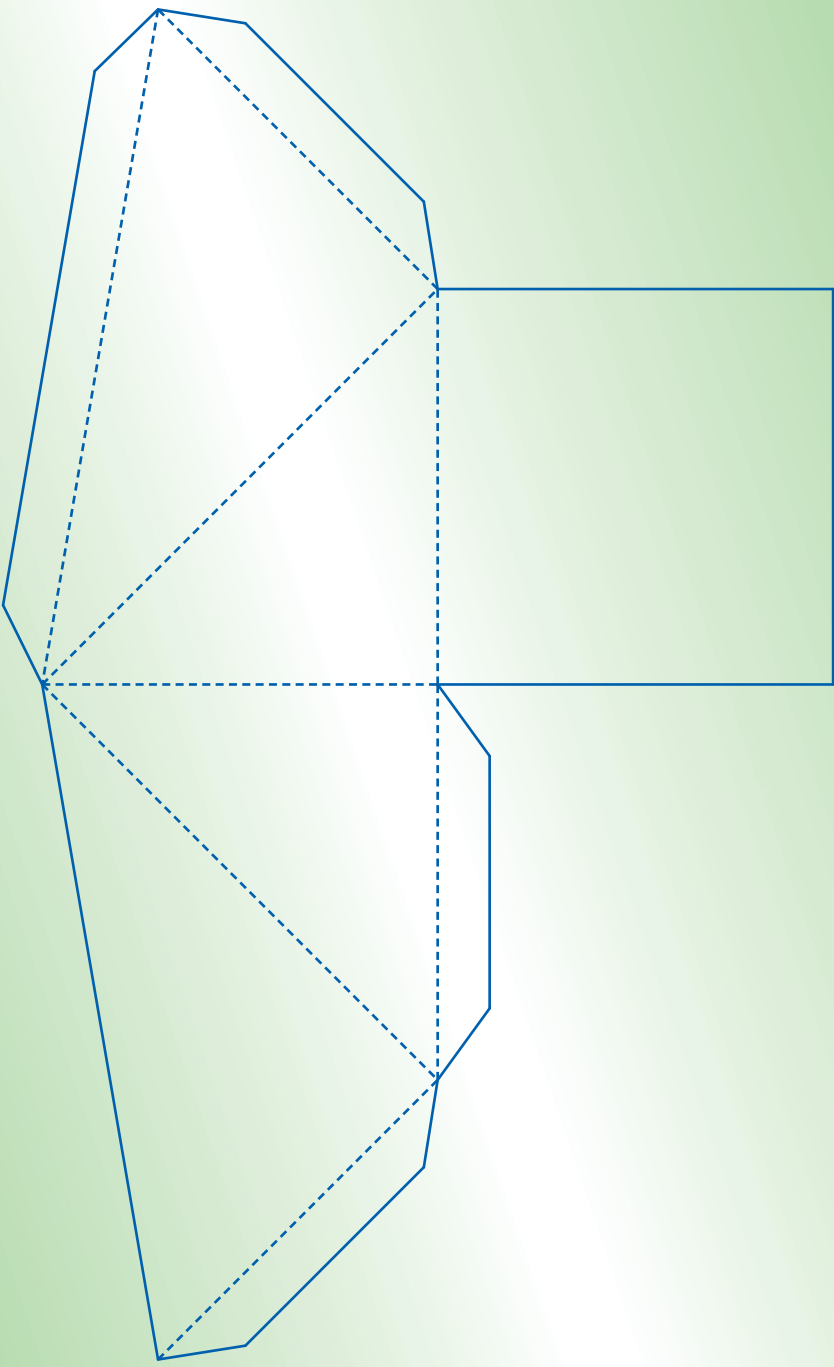


## ใบกิจกรรมเสนอแนะ 3.1 : ประกอบร่างหาปริมาตร

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนทำกิจกรรมตามขั้นตอนและตอบคำถามต่อไปนี้

1. ตัดกระดาษรูปคลี่ จำนวน 4 แผ่น แล้วประกอบให้เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ โดยใช้กาวหรือเทปใสติดบริเวณรอยต่อ
2. ประกอบรูปเรขาคณิตสามมิติที่ได้จากกระดาษรูปคลี่ให้เป็นลูกบาศก์ 1 ลูก โดยอาจใช้รูปเรขาคณิตสามมิติน้อยกว่า 4 ชิ้น ก็ได้
3. ตอบคำถามต่อไปนี้
  - 1) เมื่อประกอบกระดาษรูปคลี่ให้เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติแล้ว รูปเรขาคณิตสามมิติที่ได้แต่ละรูปเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติชนิดใด
  - 2) ในการประกอบเป็นลูกบาศก์ 1 ลูก ต้องใช้รูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่กี่รูป
  - 3) ลูกบาศก์ที่ประกอบขึ้นมีความสัมพันธ์อย่างไรกับรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่
  - 4) ลูกบาศก์มีปริมาตรเป็นกี่เท่าของรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่
  - 5) ถ้าลูกบาศก์มีพื้นที่ฐานเท่ากับ B ตารางหน่วย และสูง H หน่วย นักเรียนสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของลูกบาศก์และปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่แต่ละรูปได้อย่างไร พร้อมทั้งระบุเงื่อนไขจำเป็นที่ทำให้สมการเป็นจริง

กระดาดรูปคลี่



## เฉลยใบกิจกรรมเสนอแนะ 3.1 : ประกอบร่างหาปริมาตร

3. 1) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส  
 2) 3 รูป  
 3) คำตอบมีได้หลากหลาย เช่น
- ❖ ฐานของลูกบาศก์เท่ากับฐานของรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่
  - ❖ พื้นที่ฐานของลูกบาศก์เท่ากับพื้นที่ฐานของรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่
  - ❖ ความสูงของลูกบาศก์เท่ากับความสูงของรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่
  - ❖ ลูกบาศก์ประกอบขึ้นจากรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่ จำนวน 3 ชั้น
- 4) ลูกบาศก์มีปริมาตรเป็น 3 เท่าของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่
- 5) เนื่องจาก ปริมาตรของลูกบาศก์ = พื้นที่ฐาน  $\times$  ความสูง

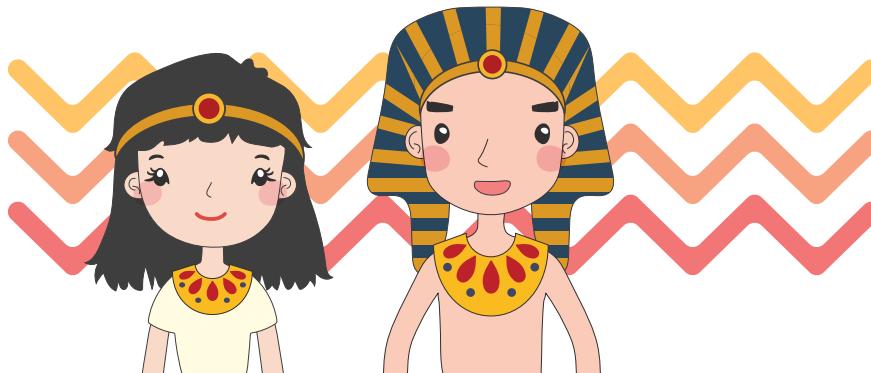
นั่นคือ ปริมาตรของลูกบาศก์ =  $B \times H$

เนื่องจาก ลูกบาศก์มีปริมาตรเป็น 3 เท่าของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ประกอบขึ้นจากรูปคลี่

จะได้ว่า  $B \times H = 3 \times$  ปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส

หรือ ปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส =  $\frac{1}{3} \times B \times H$

เงื่อนไขจำเป็นที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ ลูกบาศก์และพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสต้องมีพื้นที่ฐานและความสูงเท่ากัน



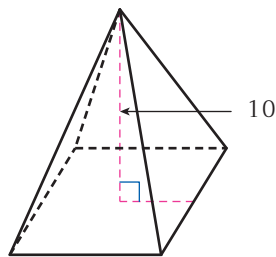
## เฉลยชวนคิด



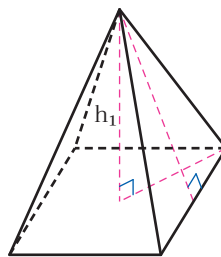
ipst.me/11430

### ชวนคิด 3.1

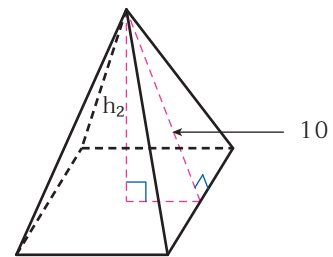
#### แนวคิด 1



พีระมิด ก



พีระมิด ข



พีระมิด ค

#### พิจารณาพีระมิด ก และ ข

จะพบว่า เมื่อพีระมิด ข มีส้นยาว 10 หน่วย จะทำให้ความสูงของพีระมิด ข ( $h_1$ ) นั้น ยาวน้อยกว่า 10 หน่วย  
นั่นคือ พีระมิด ข จะมีความสูงน้อยกว่าพีระมิด ก

#### พิจารณาพีระมิด ก และ ค

จะพบว่า เมื่อพีระมิด ค มีส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมที่เป็นหน้าของพีระมิด ค ยาว 10 หน่วย จะทำให้ความสูง  
ของพีระมิด ค ( $h_2$ ) นั้น ยาวน้อยกว่า 10 หน่วย  
นั่นคือ พีระมิด ค จะมีความสูงน้อยกว่าพีระมิด ก

#### พิจารณาพีระมิด ข และ ค

จะพบว่า เมื่อพีระมิด ข มีส้นยาว 10 หน่วย จะทำให้ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมที่เป็นหน้าของพีระมิด ข นั้น  
ยาวน้อยกว่า 10 หน่วย ซึ่งจะทำให้พีระมิด ข จะมีความสูงน้อยกว่าพีระมิด ค

ดังนั้น ความสูงของพีระมิด ข < ความสูงของพีระมิด ค < ความสูงของพีระมิด ก

เนื่องจาก ฐานของพีระมิดทั้งสามมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่เท่ากัน

$$\text{และ ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

จะได้ ปริมาตรของพีระมิด ข < ปริมาตรของพีระมิด ค < ปริมาตรของพีระมิด ก

#### แนวคิด 2 พิจารณาปริมาตรของพีระมิดทั้งสาม

เนื่องจากพีระมิดทั้งสามมีพื้นที่ฐานเท่ากัน

นั่นคือ ปริมาตรของพีระมิดแต่ละอันจะมากหรือน้อยกว่ากันขึ้นอยู่กับความสูง

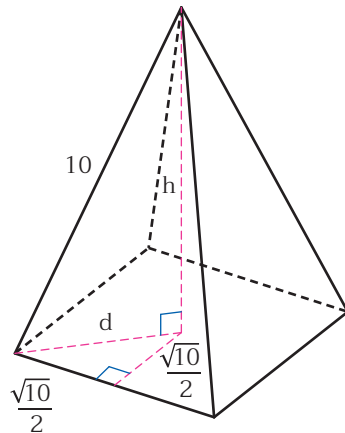
กล่าวคือ พีระมิดที่มีความสูงมากกว่าจะมีปริมาตรมากกว่าด้วย

ดังนั้น ในการเปรียบเทียบปริมาตรของพีระมิดทั้งสามจึงสามารถเปรียบเทียบโดยใช้ความสูง  
แทนการคำนวณหาปริมาตรได้

พีระมิด ก มีพื้นที่ฐานเท่ากับ 10 ตารางหน่วย และสูง 10 หน่วย

พีระมิด ข มีพื้นที่ฐานเท่ากับ 10 ตารางหน่วย และส้นยาว 10 หน่วย

ดังนั้น จากรูป ต้องหาความสูง (h) ของพีระมิด ข



พีระมิด ข

หาค่า  $d^2$  จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

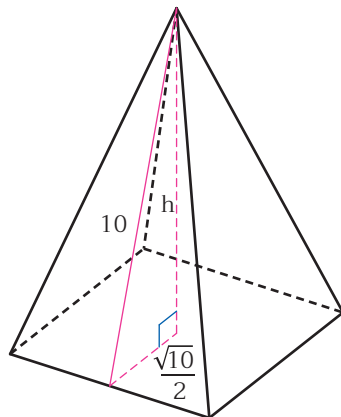
หาค่า h จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{100 - 5} \\ &= \sqrt{95} \end{aligned}$$

ดังนั้น พีระมิด ข สูง  $\sqrt{95}$  หน่วย

พีระมิด ค มีพื้นที่ฐานเท่ากับ 10 ตารางหน่วย และส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมที่เป็นหน้ายาว 10 หน่วย

ดังนั้น จากรูป ต้องหาความสูง (h) ของพีระมิด ค



พีระมิด ค

หาค่า h จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{10^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{97.5} \end{aligned}$$

ดังนั้น พีระมิด ค สูง  $\sqrt{97.5}$  หน่วย

เมื่อเรียงลำดับของความสูงของพีระมิดทั้งสามจากน้อยไปมาก

จะได้ว่า ความสูงของพีระมิด ข < ความสูงของพีระมิด ค < ความสูงของพีระมิด ก

ดังนั้น เมื่อเรียงลำดับของปริมาตรของพีระมิดจากน้อยไปมาก

จะได้ ปริมาตรของพีระมิด ข < ปริมาตรของพีระมิด ค < ปริมาตรของพีระมิด ก





ipst.me/11431

### ชวนคิด 3.2

**แนวคิด** ข้อคาดการณ์ของไบบัวน่าจะถูกต้อง พิจารณาความสอดคล้องของข้อมูลที่สถานการณ์กำหนดให้ ดังนี้

จากข้อมูลที่สถานการณ์กำหนดให้

จะได้ว่า พีระมิดกระจุกสูง 21.65 เมตร มีความยาวฐานโดยรอบ 140 เมตร และมีปริมาตรประมาณ 8,840 ลูกบาศก์เมตร

พิจารณาข้อคาดการณ์ของไบบัวที่ว่าฐานของพีระมิดนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จะได้ ฐานของพีระมิดนี้มีความยาวด้านละ  $140 \div 4 = 35$  เมตร

ดังนั้น ฐานของพีระมิดนี้มีพื้นที่เท่ากับ  $35 \times 35 = 1,225$  ตารางเมตร

พิจารณาปริมาตรของพีระมิดนี้

$$\begin{aligned} \text{จะได้ ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times 1,225 \times 21.65 \\ &= 8,840.41\bar{6} \\ &\approx 8,840 \text{ ลูกบาศก์เมตร} \end{aligned}$$

ซึ่งสอดคล้องกับข้อมูลที่สถานการณ์กำหนด

ดังนั้น ความคิดของไบบัวน่าจะถูกต้อง



ipst.me/11432

### ชวนคิด 3.3

ไม่เท่ากัน

## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 3.1 ก

1. หลังคาของสิ่งปลูกสร้างในข้อ 3) และ 6) มีลักษณะคล้ายพีระมิด เพราะมียอดแหลมที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกับฐาน และหน้าทุกหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดร่วมกันที่ยอดแหลมนั้น
2. 
 

|                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 1) พีระมิดฐานสามเหลี่ยม       | 2) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส |
| 3) พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า | 4) พีระมิดฐานห้าเหลี่ยม        |
| 5) พีระมิดฐานหกเหลี่ยม        | 6) พีระมิดฐานแปดเหลี่ยม        |

## แบบฝึกหัด 3.1 ข

1.

| ข้อที่ | พีระมิด       | ความยาวของด้าน<br>ของฐาน (ซม.) | พื้นที่ฐาน<br>(ซม. <sup>2</sup> ) | ความสูง<br>(ซม.) | ปริมาตร<br>(ซม. <sup>3</sup> ) |
|--------|---------------|--------------------------------|-----------------------------------|------------------|--------------------------------|
| 1)     | ฐานสามเหลี่ยม | 10                             | $25\sqrt{3}$                      | 9                | $75\sqrt{3}$                   |
| 2)     | ฐานสี่เหลี่ยม | 8.2                            | 67.24                             | 10.5             | 235.34                         |
| 3)     | ฐานห้าเหลี่ยม | 2.4                            | 9.91                              | 6                | 19.82                          |
| 4)     | ฐานสี่เหลี่ยม | 8                              | 64                                | 15               | 320                            |
| 5)     | ฐานหกเหลี่ยม  | 6                              | $54\sqrt{3}$                      | 7.5              | $135\sqrt{3}$                  |

แนวคิด 1) จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด =  $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times 25\sqrt{3} \times 9 \\ &= 75\sqrt{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

2) เนื่องจาก ฐานของพีระมิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

$$\begin{aligned} \text{จากสูตร} \quad \text{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า} &= \text{ความยาวของด้าน} \times \text{ความยาวของด้าน} \\ \text{จะได้} \quad \text{พื้นที่ฐาน} &= 8.2 \times 8.2 \\ &= 67.24 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\text{จากสูตร} \quad \text{ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

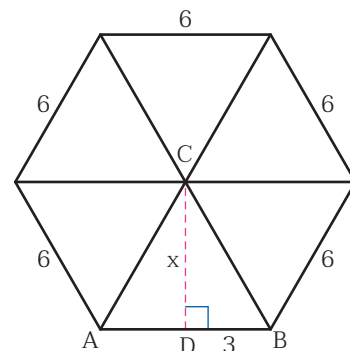
$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times 67.24 \times 10.5 \\ &= 235.34 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

3) จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด =  $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

$$\text{จะได้} \quad 19.82 = \frac{1}{3} \times 9.91 \times \text{ความสูง}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \text{ความสูง} &= \frac{19.82 \times 3}{9.91} \\ &= 6 \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

- 4) เนื่องจาก ฐานของพีระมิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
- จากสูตร  $\text{พื้นที่ฐาน} = \text{ความยาวของด้าน} \times \text{ความยาวของด้าน}$   
 จะได้  $64 = \text{ความยาวของด้าน}^2$   
 ดังนั้น  $\text{ความยาวของด้าน} = 8 \text{ เซนติเมตร}$
- จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด  $= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$   
 จะได้  $320 = \frac{1}{3} \times 64 \times \text{ความสูง}$   
 ดังนั้น  $\text{ความสูง} = \frac{320 \times 3}{64}$   
 $= 15 \text{ เซนติเมตร}$
- 5) เนื่องจากฐานของพีระมิดเป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แต่ละด้านยาว 6 เซนติเมตร
- จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCD
- จะได้  $x^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$   
 $x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
- ดังนั้น  $\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3}$   
 $= 9\sqrt{3} \text{ ตารางเซนติเมตร}$
- จะได้  $\text{พื้นที่ฐานของพีระมิด} = 6 \times 9\sqrt{3}$   
 $= 54\sqrt{3} \text{ ตารางเซนติเมตร}$
- จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด  $= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$   
 จะได้ ปริมาตรของพีระมิด  $= \frac{1}{3} \times 54\sqrt{3} \times 7.5$   
 $= 135\sqrt{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$

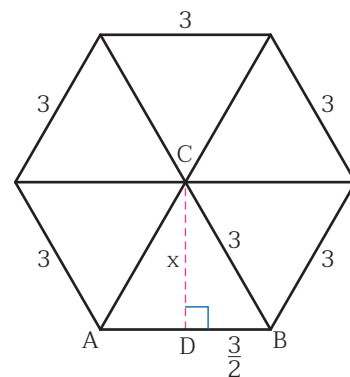


2. แนวคิด เนื่องจาก ฐานของพีระมิดเป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แต่ละด้านยาว 3 เซนติเมตร
- จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCD

$$\text{จะได้ } x^2 = 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{จะได้ พื้นที่ฐานของพีระมิด} &= 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

$$\text{จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

$$\text{จะได้ ปริมาตรของพีระมิดนี้} = \frac{1}{3} \times \frac{27\sqrt{3}}{2} \times 10 = 45\sqrt{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

3. **แนวคิด** จากสูตร พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$  เมื่อ  $a$  แทนความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม  
จะได้ พื้นที่ฐานของพีระมิด  $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = 36\sqrt{3}$  ตารางเซนติเมตร

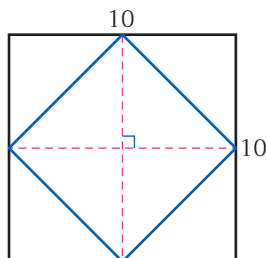
$$\text{จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times 36\sqrt{3} \times 20 \\ &= 240\sqrt{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น ในการหล่อปูนปลาสเตอร์ให้เป็นพีระมิดดังกล่าว จะต้องใช้ปูนปลาสเตอร์อย่างน้อย  $240\sqrt{3}$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

4. **แนวคิด** จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด  $= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$   
จะได้ ปริมาตรของพีระมิดนี้  $= \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 6$   
 $= 32$  ลูกบาศก์เมตร

5. **แนวคิด 1**



$$\begin{aligned}\text{จากรูป พื้นที่ฐานของพีระมิด} &= \frac{1}{2} \times \text{ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม} \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \\ &= 50 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

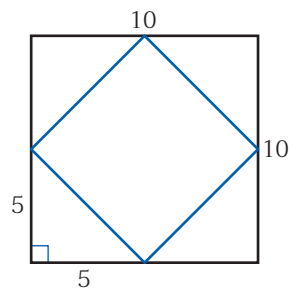
$$\text{จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times 50 \times 5 \\ &= \frac{250}{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

เนื่องจาก แก้วผลึกมีลักษณะเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองชั้นประกบกัน

$$\text{ดังนั้น แก้วผลึกนี้มีปริมาตร } 2 \times \frac{250}{3} \approx 166.67 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

## แนวคิด 2



จากรูป ฐานของพีระมิดมีความยาวของแต่ละด้านเท่ากับ  $\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$  เซนติเมตร

$$\text{จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ ปริมาตรของพีระมิด 1 ชั้น} &= \frac{1}{3} \times (\sqrt{50} \times \sqrt{50}) \times 5 \\ &= \frac{250}{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

เนื่องจาก แก้วผลึกมีลักษณะเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสสองชั้นประกบกัน

$$\text{ดังนั้น ปริมาตรของแก้วผลึกนี้} = 2 \times \frac{250}{3} \approx 166.67 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

6. แนวคิด จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด  $= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ ปริมาตรของขนมเทียน 1 ห่อ} &= \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 3 \\ &= 16 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

แต่ขนมเทียนแต่ละห่อใช้แป้งประมาณ  $\frac{2}{3}$  ของเนื้อขนม

$$\text{ดังนั้น ขนมเทียนแต่ละห่อใช้แป้งประมาณ } \frac{2}{3} \times 16 = \frac{32}{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

เนื่องจากต้องการทำขนมเทียน 100 ห่อ

ดังนั้น ต้องใช้แป้งประมาณ  $100 \times \frac{32}{3}$  ลูกบาศก์เซนติเมตร หรือ  $\frac{32}{30}$  ลิตร

จากโจทย์ กำหนดแป้ง 1 ลิตรหนัก 550 กรัม

ดังนั้น จะต้องใช้แป้งในการทำขนมเทียนประมาณ  $\frac{32}{30} \times 550 \approx 586.67$  กรัม

7. **แนวคิด** รูปจำลองของศิลาจารึกพ่อขุนรามคำแหงมีลักษณะเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสและปริซึมสี่เหลี่ยมจัตุรัสประกบกัน

ดังนั้น ปริมาตรของรูปจำลองนี้ = ปริมาตรของพีระมิด + ปริมาตรของปริซึม

จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด =  $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

จะได้ ปริมาตรของพีระมิด =  $\frac{1}{3} \times (16 \times 16) \times 10$   
 $= \frac{2,560}{3}$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของปริซึม =  $\text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

จะได้ ปริมาตรของปริซึม =  $(16 \times 16) \times 40$   
 $= 10,240$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น ปริมาตรของปูนปลาสเตอร์ที่ใช้หล่อรูปจำลองนี้ =  $\frac{2,560}{3} + 10,240$   
 $\approx 11,093.33$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

8. **แนวคิด** เนื่องจากมหาพีระมิดแห่งกีซามีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสครอบคลุมพื้นที่ประมาณ 33 ไร่ และพื้นที่ 1 ไร่ เท่ากับ 1,600 ตารางเมตร

ดังนั้น มหาพีระมิดแห่งกีซามีพื้นที่ฐานประมาณ  $33 \times 1,600 = 52,800$  ตารางเมตร

จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด =  $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

จะได้ ปริมาตรของมหาพีระมิดแห่งกีซา  $\approx \frac{1}{3} \times 52,800 \times 146.5$   
 $\approx 2,578,400$  ลูกบาศก์เมตร

## แบบฝึกหัด 3.1 ค

- แนวคิด** จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $= \frac{1}{2} \times$  ความยาวรอบรูปของฐาน  $\times$  ส่วนสูงเอียง

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด  $= \frac{1}{2} \times (4 \times 12) \times 12 = 288$  ตารางเซนติเมตร

และ พื้นที่ฐานของพีระมิด  $= 12 \times 12 = 144$  ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น พื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $= 288 + 144 = 432$  ตารางเซนติเมตร
- แนวคิด** จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า  $= \frac{1}{2} \times$  ความยาวรอบรูปของฐาน  $\times$  ส่วนสูงเอียง

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด  $= \frac{1}{2} \times (5 \times 10) \times 6$

$= 150$  ตารางเซนติเมตร
- แนวคิด** จากรูป ให้  $\square ABCD$  เป็นฐานของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งยาวด้านละ 30 เมตร

จุด  $O$  เป็นยอดของพีระมิด

$\overline{OX}$  เป็นส่วนสูงของพีระมิด

และ  $\overline{OY}$  เป็นส่วนสูงเอียงของพีระมิด

เนื่องจาก  $\triangle OXY$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ที่มี  $OX = 20$  เมตร

และ  $XY = \frac{30}{2} = 15$  เมตร

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้  $OY^2 = OX^2 + XY^2$

$= 20^2 + 15^2$

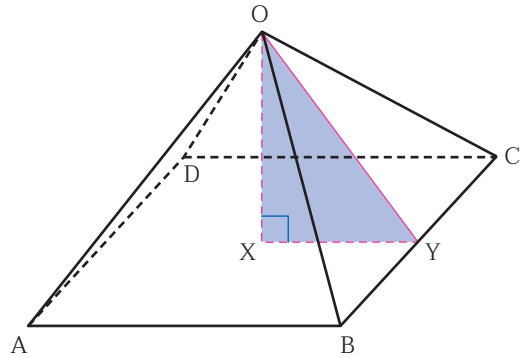
$= 625$

ดังนั้น  $OY = 25$

เนื่องจาก พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $= \frac{1}{2} \times$  ความยาวรอบรูปของฐาน  $\times$  ส่วนสูงเอียง

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของอาคารนี้  $= \frac{1}{2} \times (4 \times 30) \times 25$

$= 1,500$  ตารางเมตร



4. **แนวคิด** จากรูป ให้  $\square ABCD$  เป็นฐานของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งยาวด้านละ 6 เซนติเมตร

จุด  $O$  เป็นยอดของพีระมิด

$\overline{OX}$  เป็นส่วนสูงของพีระมิด

และ  $\overline{OY}$  เป็นส่วนสูงเอียงของพีระมิด

เนื่องจาก  $\triangle OXY$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ที่มี  $OX = 4$  เซนติเมตร

และ  $XY = \frac{6}{2} = 3$  เซนติเมตร

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } OY^2 &= OX^2 + XY^2 \\ &= 4^2 + 3^2 \\ &= 25 \end{aligned}$$

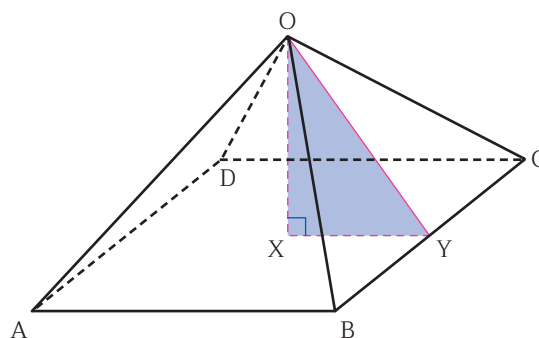
ดังนั้น  $OY = 5$  เซนติเมตร

เนื่องจาก พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $= \frac{1}{2} \times$  ความยาวรอบรูปของฐาน  $\times$  ส่วนสูงเอียง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด} &= \frac{1}{2} \times (4 \times 6) \times 5 \\ &= 60 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

และ พื้นที่ฐานของพีระมิด  $= 6 \times 6 = 36$  ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น บริเวณที่ต้องการหาสีมีพื้นที่  $60 + 36 = 96$  ตารางเซนติเมตร



5. **แนวคิด** จากรูป ให้  $\square ABCD$  เป็นฐานของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จุด  $O$  เป็นยอดของพีระมิด

$\overline{OX}$  เป็นส่วนสูงของพีระมิด

$\overline{OE}$  เป็นส่วนสูงของ  $\triangle OAB$

และ  $\overline{OF}$  เป็นส่วนสูงของ  $\triangle OBC$

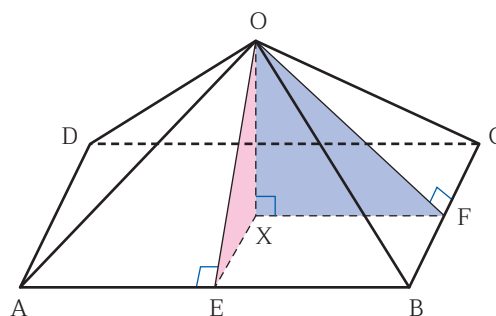
จากโจทย์  $OX = 12$  เซนติเมตร

$AB = 32$  เซนติเมตร

และ  $BC = 10$  เซนติเมตร

$$\text{จะได้ } XF = \frac{32}{2} = 16 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\text{และ } XE = \frac{10}{2} = 5 \text{ เซนติเมตร}$$





เนื่องจาก  $\triangle OXE$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  
โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } OE^2 &= OX^2 + XE^2 \\ &= 12^2 + 5^2 \\ &= 169\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } OE = 13$$

เนื่องจาก พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของ  $\triangle OAB$ ,  $\triangle OBC$ ,  $\triangle OCD$  และ  $\triangle ODA$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด} &= 2\left(\frac{1}{2} \times 32 \times 13\right) + 2\left(\frac{1}{2} \times 10 \times 20\right) \\ &= 416 + 200 \\ &= 616 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

$$\text{และ พื้นที่ฐานของพีระมิด} = 32 \times 10 = 320 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

$$\text{ดังนั้น พื้นที่ผิวของพีระมิดนี้} = 616 + 320 = 936 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

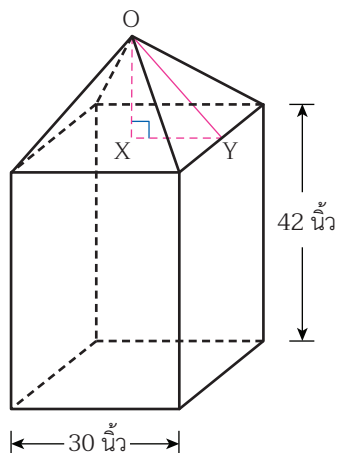
6. **แนวคิด** จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า  $= \frac{1}{2} \times \text{ความยาวรอบรูปของฐาน} \times \text{ส่วนสูงเอียง}$   
จะได้  $120 = \frac{1}{2} \times (5 \times 8) \times \text{ส่วนสูงเอียง}$   
ส่วนสูงเอียง  $= 6$

ดังนั้น ส่วนสูงเอียงของพีระมิดยาว 6 เซนติเมตร

7. **แนวคิด** จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า  $= \frac{1}{2} \times \text{ความยาวรอบรูปของฐาน} \times \text{ส่วนสูงเอียง}$   
จะได้  $224 = \frac{1}{2} \times 56 \times \text{ส่วนสูงเอียง}$   
ส่วนสูงเอียง  $= 8$

ดังนั้น ส่วนสูงเอียงของพีระมิดยาว 8 เมตร

8. **แนวคิด**



- 1) จากรูป ให้จุด O เป็นยอดของพีระมิด

$\overline{OX}$  เป็นส่วนสูงของพีระมิด

และ  $\overline{OY}$  เป็นส่วนสูงเอียงของพีระมิด

เนื่องจาก รูปจำลองของคิลาการิกนี้มีปริมาตร 40,200 ลูกบาศก์นิ้ว

และ ปริมาตรส่วนที่เป็นปริซึม =  $30 \times 30 \times 42 = 37,800$  ลูกบาศก์นิ้ว

ดังนั้น ปริมาตรส่วนที่เป็นพีระมิด =  $40,200 - 37,800 = 2,400$  ลูกบาศก์นิ้ว

จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด =  $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

จะได้  $2,400 = \frac{1}{3} \times (30 \times 30) \times OX$

ดังนั้น  $OX = 8$

เนื่องจาก  $\triangle OXY$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี  $OX = 8$  นิ้ว และ  $XY = \frac{30}{2} = 15$  นิ้ว

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้  $OY^2 = OX^2 + XY^2$

$$= 8^2 + 15^2$$

$$= 289$$

ดังนั้น  $OY = 17$

นั่นคือ ส่วนสูงเอียงของส่วนที่เป็นพีระมิดยาว 17 นิ้ว

- 2) จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส =  $\frac{1}{2} \times \text{ความยาวรอบรูปของฐาน} \times \text{ส่วนสูงเอียง}$

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด =  $\frac{1}{2} \times (4 \times 30) \times 17 = 1,020$  ตารางนิ้ว

พื้นที่ผิวข้างของปริซึม =  $4 \times (30 \times 42) = 5,040$  ตารางนิ้ว

และ พื้นที่ฐานของปริซึม =  $30 \times 30 = 900$  ตารางนิ้ว

ดังนั้น พื้นที่ผิวของรูปจำลองนี้ = พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด + พื้นที่ผิวข้างของปริซึม + พื้นที่ฐานของปริซึม

$$= 1,020 + 5,040 + 900$$

$$= 6,960 \text{ ตารางนิ้ว}$$

## 3.2 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของกรวย (5 ชั่วโมง)

### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

1. อธิบายลักษณะและส่วนต่าง ๆ ของกรวย
2. หาปริมาตรของกรวยและนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหา
3. หาพื้นที่ผิวของกรวยและนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหา

### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

-

### Q สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

อุปกรณ์ของกิจกรรม : สำรองกรวย

### K ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของกรวย ซึ่งต้องการให้นักเรียนรู้จักส่วนประกอบต่าง ๆ ของกรวยและความหมายของกรวยในทางคณิตศาสตร์ รวมถึงให้นักเรียนทำกิจกรรมเชิงสำรวจเพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบต่าง ๆ ของกรวยที่มีขนาดแตกต่างกัน และหาพื้นที่ผิวของกรวยจากการหาพื้นที่ของรูปคลี่ของกรวย รวมทั้งการหาพื้นที่ผิวข้างโดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วน แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

1. ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับสิ่งของในชีวิตประจำวันที่มีลักษณะคล้ายกรวย และร่วมกันอภิปรายเพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับลักษณะและส่วนต่าง ๆ ของกรวย รวมถึงความหมายของกรวยในทางคณิตศาสตร์
2. ครูให้นักเรียนทำ “กิจกรรม : สำรองกรวย” ในหนังสือเรียน หน้า 135–136 โดยให้นักเรียนฝึกใช้ความรู้สึกเชิงปริภูมิและการนึกภาพในการสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางที่เกิดจากการแบ่งวงกลมที่มีรัศมีเท่ากัน กับความยาวของส่วนสูงเอียง ความสูง และพื้นที่ฐานของกรวยแต่ละอันที่สร้างขึ้น เช่น
  - ❖ กรวยสองอันที่มีสูงเอียงเท่ากัน ไม่จำเป็นต้องมีส่วนสูงเท่ากัน
  - ❖ กรวยสองอันที่มีสูงเอียงเท่ากัน กรวยที่สร้างจากกระดาศที่มีขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางมากกว่า จะมีพื้นที่ฐานมากกว่า
  - ❖ กรวยสองอันที่มีสูงเอียงเท่ากัน กรวยที่สร้างจากกระดาศที่มีขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางมากกว่า จะมีความสูงน้อยกว่า

3. ครูอาจใช้มุมเทคโนโลยี ในหนังสือเรียน หน้า 137 ในการแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างพีระมิดที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มีจำนวนด้านมาก ๆ กับกรวย เพื่อเชื่อมโยงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของกรวยและปริมาตรของทรงกระบอกที่มีพื้นที่ฐานเท่ากันและความสูงเท่ากัน เป็นไปในทำนองเดียวกับความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิดและปริมาตรของปริซึมที่มีพื้นที่ฐานเท่ากันและความสูงเท่ากัน เพื่อนำไปสู่สูตรการหาปริมาตรของกรวย
4. ครูให้นักเรียนสังเกตรูปคลี่ของกรวย และใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วน จากมุมคณิต ในหนังสือเรียน หน้า 143 เพื่อเชื่อมโยงไปสู่สูตรการหาพื้นที่ผิวของกรวย



## กิจกรรม : สักรวกรว

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนสังเกต คาคการณ์ และหาข้อสรุปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางที่เกิดจากการแบ่งวงกลมที่มีรัศมีเท่ากัน ความยาวของส่วนสูงเอียง ความสูง และพื้นที่ฐานของกรวยจากการลงมือปฏิบัติ โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

### สื่อ/อุปกรณ์

1. กระดาษ
2. วงเวียน
3. โพรแทรกเตอร์
4. กรรไกร
5. เทปใส

### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

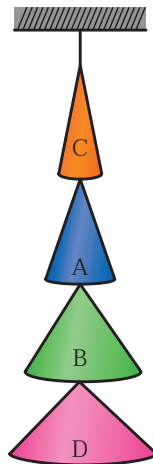
1. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 2–3 คน จากนั้นให้แต่ละกลุ่มทำตามขั้นตอนที่ 1 ของกิจกรรม : สักรวกรว ในหนังสือเรียน หน้า 135–136 แล้วร่วมกันอภิปรายเพื่อหาคำตอบในขั้น ตอนที่ 2 ของกิจกรรม
2. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางที่เกิดจากการแบ่งวงกลมที่มีรัศมีเท่ากันกับความยาวของส่วนสูงเอียง ความสูง และพื้นที่ฐานของกรวย แล้วสรุปว่ากรวยแต่ละอันสร้างมาจากกระดาษชิ้นใด



## เฉลยกิจกรรม : สำรวจกรวย

### คำถามในขั้นตอนที่ 2

- 1) เท่ากัน เนื่องจากกรวยแต่ละอันสร้างมาจากรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 10 เซนติเมตร ซึ่งรัศมีของรูปวงกลมนี้เมื่อประกอบขึ้นเป็นกรวยจะเป็นส่วนสูงเอียงของกรวยซึ่งยาว 10 เซนติเมตร เช่นเดียวกัน
- 2) ไม่เท่ากัน โดยกรวย C สูงที่สุด และกรวย D เตี้ยที่สุด
- 3) ถ้าขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของรูปวงกลมเดิมมีขนาดมากกว่าแล้วพื้นที่ฐานของกรวยจะมากกว่า
- 4) กรวย D มีพื้นที่ฐานมากที่สุด
- 5) ขอบของฐานกรวย คือ ส่วนของเส้นรอบวงของรูปวงกลมเดิม
- 6) ถ้านำกรวยทั้งสี่ที่ได้มาร้อยเรียงกันเป็นโมบาย จะเรียงลำดับกรวยที่ทำจากกระดาษ A, B, C และ D ได้ดังรูป



## เฉลยชวนคิด



ipst.me/11433

### ชวนคิด 3.4

แนวคิด คำตอบมีได้หลากหลาย เช่น

จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

จะเห็นว่า ปริมาตรของกรวยขึ้นอยู่กับ 2 องค์ประกอบ นั่นคือ พื้นที่ฐานกับความสูง

ดังนั้น เราอาจพิจารณาความสูงที่เป็นไปได้ เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณหารัศมีของฐานได้ดังตัวอย่าง  
คำตอบต่อไปนี้

จากโจทย์ ปริมาตรของกรวย  $= 1,024\pi$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

จะได้  $1,024\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย  
และ  $h$  แทนความสูงของกรวย

$$3(2)^{10} = r^2 h$$

กรวยแบบที่ 1 กำหนดความสูงของกรวยเท่ากับ 3 เซนติเมตร

นั่นคือ  $3(2)^{10} = r^2(3)$

$$r = 2^5 = 32$$

ดังนั้น กรวยแบบที่ 1 จะสูง 3 เซนติเมตร และฐานมีรัศมี 32 เซนติเมตร

กรวยแบบที่ 2 กำหนดความสูงของกรวยเท่ากับ 12 เซนติเมตร

นั่นคือ  $3(2)^{10} = r^2(12)$

$$r = 2^4 = 16$$

ดังนั้น กรวยแบบที่ 2 จะสูง 12 เซนติเมตร และฐานมีรัศมี 16 เซนติเมตร



ipst.me/11434

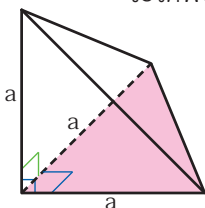
### ชวนคิด 3.5

แนวคิด สมมติให้ลูกบาศก์เดิมมีความยาวด้าน ด้านละ  $2a$  หน่วย ทำให้ได้ว่าลูกบาศก์เดิมมีปริมาตร

$$(2a)^3 = 8a^3 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

เมื่อตัดมุมของลูกบาศก์ออกด้วยระนาบให้ผ่านจุดกึ่งกลางของขอบของลูกบาศก์แต่ละด้าน

จะได้พีระมิดเอียงที่มีความยาวของฐานและความสูง ดังรูป



พิจารณาปริมาตรของพีระมิดเอียงแต่ละชิ้น

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรของพีระมิดเอียง} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} \\ &= \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times a \times a \right) \times a = \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของพีระมิดเอียงทั้ง 8 ชิ้น เท่ากับ  $8\left(\frac{a^3}{6}\right)$  ลูกบาศก์หน่วย

เนื่องจาก ปริมาตรของคิวบอคตะฮีดรอน เท่ากับ ปริมาตรของลูกบาศก์เดิมลบด้วยปริมาตรของพีระมิดเอียงทั้ง 8 ชิ้น

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ปริมาตรของคิวบอคตะฮีดรอน} &= 8a^3 - \frac{8a^3}{6} \\ &= \frac{40a^3}{6} \\ &= \frac{5}{6}(8a^3)\end{aligned}$$

ดังนั้น คิวบอคตะฮีดรอนมีปริมาตรเป็นห้าในหกเท่าของลูกบาศก์เดิม

## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 3.2 ก

ในการทำแบบฝึกหัด นักเรียนอาจได้คำตอบแตกต่างจากที่เฉลยไว้ เพราะใช้ค่าประมาณของ  $\pi$  ที่แตกต่างกัน

1. **แนวคิด** เนื่องจาก กระโจมมีลักษณะเป็นกรวยสูง 3.25 เมตร ฐานของกระโจมมีรัศมียาว 1.75 เมตร

จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ปริมาตรของอากาศภายในกระโจม} &\approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times (1.75)^2 \times 3.25 \\ &\approx 10.42 \text{ ลูกบาศก์เมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของอากาศภายในกระโจมมีอยู่ประมาณ 10.42 ลูกบาศก์เมตร

2. **แนวคิด** เนื่องจาก เทียนไขแบบทรงกระบอกมีรัศมีของฐานยาว  $\frac{3}{2} = 1.5$  เซนติเมตร และสูง 5 เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกระบอก  $= \pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐาน และ  $h$  แทนความสูง

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ปริมาตรของเทียนไขทรงกระบอก} &\approx 3.14 \times (1.5)^2 \times 5 \\ &\approx 35.325 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

เนื่องจาก เทียนไขแบบกรวยมีรัศมีของฐานยาว 2 เซนติเมตร และสูง 6 เซนติเมตร



จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูง  
 จะได้ ปริมาตรของเทียนไขแบบกรวย  $\approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times 2^2 \times 6$   
 $\approx 25.12$  ลูกบาศก์เซนติเมตร  
 ดังนั้น เทียนไขแบบทรงกระบอกจะใช้เนื้อเทียนมากกว่าเทียนไขแบบกรวย และมากกว่ากันอยู่ประมาณ  
 $35.325 - 25.12 = 10.205$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

3. **แนวคิด** เนื่องจาก รูปหอมทรงกรวยสูง 1 นิ้ว และมีรัศมีของฐานยาว  $\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$  นิ้ว

จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย  
 จะได้ ปริมาตรของรูปหอม 1 ชิ้น  $\approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 1$   
 $\approx 0.06542$  ลูกบาศก์นิ้ว

ดังนั้น รูปหอม 1 ชิ้น จะใช้ขี้เลื่อยผสมผงไม้หอมประมาณ 0.06542 ลูกบาศก์นิ้ว

เนื่องจาก ต้องการทำรูปหอมจำนวน 50,000 ชิ้น

ดังนั้น ควรเตรียมขี้เลื่อยผสมผงไม้หอมเพื่อใช้ทำรูปหอมไว้ประมาณ  $50,000 \times 0.06542$   
 $\approx 3,271$  ลูกบาศก์นิ้ว

4. **แนวคิด** เนื่องจาก ยอดของสถูปวีรชนมีลักษณะเป็นกรวยกลวงที่มีความสูงภายใน 9 เมตร และมีรัศมีภายในของฐานยาว  $\frac{2}{2} = 1$  เมตร

จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย  
 จะได้ ปริมาตรของอากาศในยอดของสถูปวีรชน  $\approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times 1^2 \times 9$   
 $\approx 9.42$  ลูกบาศก์เมตร

ดังนั้น อากาศในยอดของสถูปวีรชนมีปริมาตรประมาณ 9.42 ลูกบาศก์เมตร

5. **แนวคิด** เนื่องจาก ครีมบรรจุอยู่ในกรวยที่มีรัศมียาว 5 เซนติเมตร และสูง 10 เซนติเมตร สามารถทำดอกไม้ที่มีขนาดเท่ากันบนหน้าเค้กได้ 15 ดอก

จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย  
 จะได้ ปริมาตรของครีมในกรวย 1 อัน  $\approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times 5^2 \times 10$   
 $\approx 261.67$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก ครีมที่บรรจุในกรวย 1 อัน สามารถทำดอกไม้ที่มีขนาดเท่ากันบนหน้าเค้กได้ 15 ดอก  
 และ ต้องการทำดอกไม้ขนาดเดียวกันนี้ 180 ดอก

ดังนั้น ต้องใช้ครีมในกรวยขนาดนี้ จำนวน  $180 \div 15 = 12$  อัน

นั่นคือ ต้องใช้ครีมที่มีปริมาตรอย่างน้อยประมาณ  $12 \times 261.67 = 3,140.04$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

6. **แนวคิด** เนื่องจาก กรวยกระดาดสูง 10 เซนติเมตร และมีรัศมีของปากกรวยยาว  $\frac{8}{2} = 4$  เซนติเมตร
- จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย
- จะได้ ปริมาตรของน้ำในกรวยกระดาด 1 อัน  $\approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times 4^2 \times 10$
- $\approx 167.4667$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก นักเรียน 50 คน ดื่มน้ำจากกรวยกระดาดคนละไม่เกิน 2 ครั้ง

ดังนั้น จะใช้น้ำไม่เกิน  $50 \times 2 \times 167.4667 = 16,746.67$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

แต่น้ำดื่ม 20 ลิตร หรือ 20,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร

นั่นคือ น้ำดื่ม 20 ลิตร จะเพียงพอสำหรับทุกคน

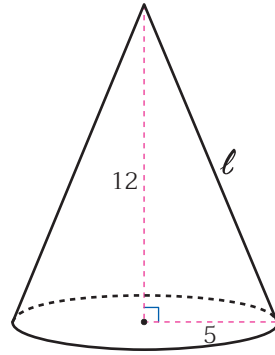
7. **แนวคิด** เนื่องจาก กรวยมีปริมาตร  $48\pi$  ลูกบาศก์เซนติเมตร และมีรัศมีของฐานยาว  $\frac{8}{2} = 4$  เซนติเมตร
- จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย
- จะได้ 
$$48\pi = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times h$$
- $h = 9$

ดังนั้น กรวยสูง 9 เซนติเมตร

8. **แนวคิด** กรวยที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถบรรจุอยู่ในพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยใช้อยอดร่วมกัน จะมีความสูงเท่ากับ ความสูงของพีระมิด และมีรัศมีของฐานยาวเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวด้านของฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- เนื่องจาก พีระมิดสูง 18 เซนติเมตร และมีฐานยาวด้านละ 15 เซนติเมตร
- จะได้ว่า กรวยที่ใหญ่ที่สุด สูง 18 เซนติเมตร และรัศมีของฐานยาว  $\frac{15}{2}$  เซนติเมตร
- จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย
- จะได้ ปริมาตรของกรวย  $\approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times \left(\frac{15}{2}\right)^2 \times 18$
- $\approx 1,059.75$  ลูกบาศก์เซนติเมตร
- ดังนั้น กรวยที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถบรรจุอยู่ในพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยใช้อยอดร่วมกันมีปริมาตรประมาณ 1,059.75 ลูกบาศก์เซนติเมตร

## แบบฝึกหัด 3.2 ข

## 1. แนวคิด



เนื่องจาก กรวยสังกะสีมีรัศมีของฐานยาว  $\frac{10}{2} = 5$  เซนติเมตร และสูง 12 เซนติเมตร

ให้  $l$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย

$$\text{จะได้ } l^2 = 5^2 + 12^2$$

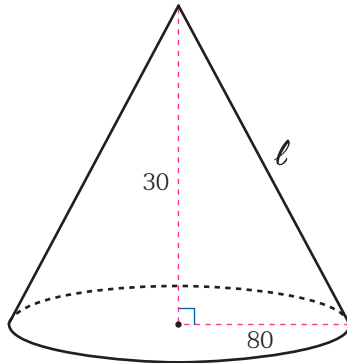
$$= 169$$

$$l = 13$$

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวย  $= \pi r l$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย

จะได้ กรวยสังกะสีมีพื้นที่ผิวข้างประมาณ  $3.14 \times 5 \times 13 = 204.1$  ตารางเซนติเมตร

## 2. แนวคิด



เนื่องจาก กระโjoinสูง 150 เซนติเมตร และส่วนล่างเป็นทรงกระบอกสูง 120 เซนติเมตร

ดังนั้น ส่วนหลังคาที่เป็นกรวยสูง 30 เซนติเมตร

เนื่องจาก รัศมีของหลังคาที่เป็นกรวยยาวเท่ากับรัศมีของฐานกระโjoinที่เป็นทรงกระบอก ซึ่งยาว 80 เซนติเมตร

จะได้ หลังคาส่วนที่เป็นกรวยสูง 30 เซนติเมตร และมีรัศมีของฐานยาว 80 เซนติเมตร

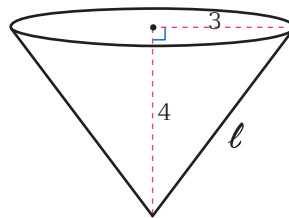
ให้  $l$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \ell^2 &= 30^2 + 80^2 \\ &= 7,300 \\ \ell &\approx 85.44\end{aligned}$$

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวย =  $\pi r \ell$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย

$$\begin{aligned}\text{จะได้ พื้นที่ที่สามารถเขียนลดทอนได้บนหลังคากระโจมมีประมาณ } &3.14 \times 80 \times 85.44 \\ &\approx 21,462.528 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

### 3. แนวคิด



ลูกตุ้มเหล็กมีลักษณะเป็นกรวยสูง 4 เซนติเมตร และมีรัศมียาว  $\frac{6}{2} = 3$  เซนติเมตร

ให้  $\ell$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \ell^2 &= 4^2 + 3^2 \\ &= 25 \\ \ell &= 5\end{aligned}$$

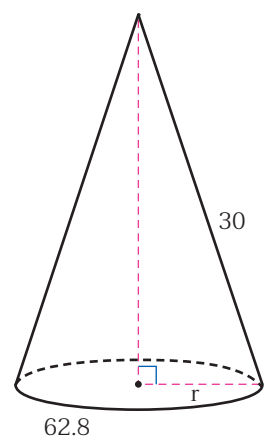
จากสูตร พื้นที่ผิวของกรวย =  $\pi r \ell + \pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย

ดังนั้น ลูกตุ้มเหล็กมีพื้นที่ผิวประมาณ  $(3.14 \times 3 \times 5) + (3.14 \times 3^2) = 75.36$  ตารางเซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของกรวย =  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $h$  แทนความสูงของกรวย

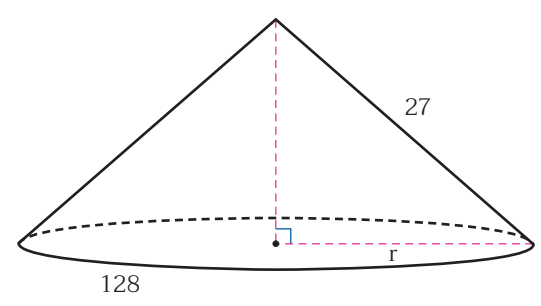
จะได้ ลูกตุ้มเหล็กมีปริมาตรประมาณ  $\frac{1}{3} \times 3.14 \times 3^2 \times 4 = 37.68$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

4. แนวคิด



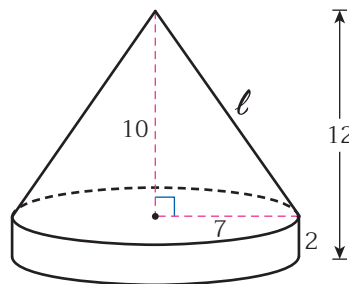
เนื่องจาก หมวกมีความยาวรอบฐานหมวก 62.8 เซนติเมตร  
จากสูตร ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม =  $2\pi r$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของวงกลม  
จะได้  $62.8 = 2\pi r$   
 $r = \frac{31.4}{\pi}$   
เนื่องจาก หมวกมีส่วนสูงเอียงยาว 30 เซนติเมตร  
จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวย =  $\pi r l$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $l$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย  
จะได้ หมวกแต่ละใบต้องใช้กระดาษอย่างน้อย  $\pi \times \frac{31.4}{\pi} \times 30 = 942$  ตารางเซนติเมตร

5. แนวคิด



เนื่องจาก หมวกมีความยาวของเส้นรอบวงของฐานหมวก 128 เซนติเมตร  
จากสูตร ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม =  $2\pi r$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของวงกลม  
จะได้  $128 = 2\pi r$   
 $r = \frac{64}{\pi}$   
เนื่องจาก หมวกรูปกรวยมีส่วนสูงเอียงยาว 27 เซนติเมตร  
จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวย =  $\pi r l$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $l$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย  
จะได้ พื้นที่ของใบลานซึ่งเป็นผิวข้างของกรวยเท่ากับ  $\pi \times \frac{64}{\pi} \times 27 = 1,728$  ตารางเซนติเมตร

## 6. แนวคิด



เนื่องจาก ฝาคอรับข้างกรวยปากหม้อมีส่วนฐานใกล้เคียงกับทรงกระบอกที่มีรัศมียาว  $\frac{14}{2} = 7$  เซนติเมตร สูง 2 เซนติเมตร และส่วนบนใกล้เคียงกับกรวยที่มีรัศมียาว 7 เซนติเมตร สูง  $12 - 2 = 10$  เซนติเมตร

ให้  $l$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } l^2 &= 10^2 + 7^2 \\ &= 149 \\ l &\approx 12.21 \end{aligned}$$

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวย  $= \pi r l$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย

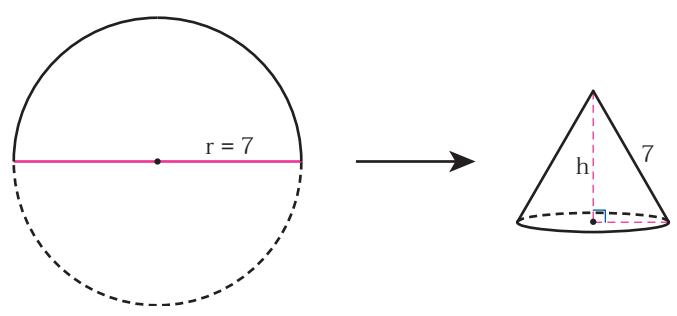
$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \text{พื้นที่ผิวภายนอกของฝาคอรับข้างกรวยปากหม้อส่วนบน} &\approx \frac{22}{7} \times 7 \times 12.21 \\ &\approx 268.62 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก  $= 2\pi r h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐาน และ  $h$  แทนความสูง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \text{พื้นที่ผิวภายนอกของฝาคอรับข้างกรวยปากหม้อส่วนฐาน} &\approx 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 2 \\ &\approx 88 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \text{พื้นที่ผิวภายนอกทั้งหมดของฝาคอรับข้างกรวยปากหม้อ} &\approx 268.62 + 88 \\ &\approx 356.62 \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

7. แนวคิด



เนื่องจาก วงกลมมีรัศมียาว 7 เซนติเมตร

จากสูตร ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม =  $2\pi r$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของวงกลม

จะได้ ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมประมาณ  $2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44$  เซนติเมตร

เนื่องจาก สร้างกรวยจากกระดาษครึ่งวงกลม

ดังนั้น ความยาวรอบฐานของกรวยที่มีพื้นที่ผิวข้างมากที่สุดจะเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม

จะได้ ความยาวรอบฐานของกรวยประมาณ  $\frac{44}{2} = 22$  เซนติเมตร

จากสูตร ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม =  $2\pi r$

จะได้  $22 \approx 2 \times \frac{22}{7} \times r$

$r \approx 3.5$

ดังนั้น ฐานของกรวยมีรัศมียาวประมาณ 3.5 เซนติเมตร

เนื่องจาก เมื่อนำครึ่งวงกลมที่มีรัศมียาว 7 เซนติเมตร มาทำเป็นกรวย จะได้รัศมีของครึ่งวงกลมเป็นส่วนสูงเอียงของกรวยซึ่งยาว 7 เซนติเมตร

ให้กรวยสูง  $h$  เซนติเมตร

จะได้  $h^2 = 7^2 - r^2$

$\approx 7^2 - (3.5)^2$

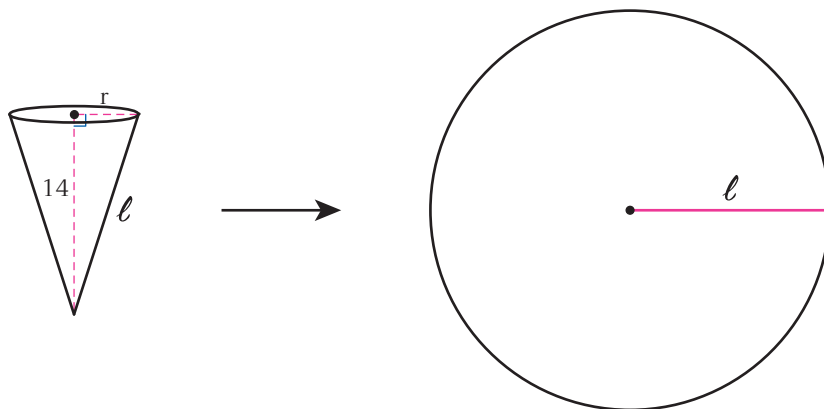
$\approx 36.75$

$h \approx 6.06$

ดังนั้น กรวยสูงประมาณ 6.06 เซนติเมตร

นั่นคือ ฐานของกรวยมีรัศมียาวประมาณ 3.5 เซนติเมตร และกรวยสูงประมาณ 6.06 เซนติเมตร

## 8. แนวคิด



เนื่องจาก เพชรต้องการทำกรวยที่มีความจุ 297 ลูกบาศก์เซนติเมตร และมีความสูง 14 เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย

$$\text{จะได้} \quad 297 \approx \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 14$$

$$r^2 \approx 20.25$$

$$r \approx 4.5$$

ดังนั้น กรวยมีรัศมีของฐานยาวประมาณ 4.5 เซนติเมตร

ให้  $l$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย

$$\text{จะได้} \quad l^2 = 14^2 + r^2$$

$$\approx 14^2 + (4.5)^2$$

$$\approx 216.25$$

$$l \approx 14.71$$

ดังนั้น กรวยมีส่วนสูงเอียงยาวประมาณ 14.71 เซนติเมตร

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวย  $= \pi r l$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย

ดังนั้น กรวยอันหนึ่งใช้สังกะสีประมาณ  $\frac{22}{7} \times 4.5 \times 14.71 \approx 208$  ตารางเซนติเมตร

เนื่องจาก ส่วนสูงเอียงของกรวยจะเท่ากับความยาวของรัศมีของวงกลมที่จะนำมาทำกรวย

นั่นคือ เพชรจะต้องตัดสังกะสีจากแผ่นสังกะสีรูปวงกลมที่มีรัศมียาวประมาณ 14.71 เซนติเมตร

จากสูตร พื้นที่ของวงกลม  $= \pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของวงกลม

$$\text{จะได้} \quad \text{พื้นที่ของแผ่นสังกะสีรูปวงกลม} \approx \frac{22}{7} \times (14.71)^2$$

$$\approx 680 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ดังนั้น แผ่นสังกะสีรูปวงกลมมีพื้นที่ประมาณ 680 ตารางเซนติเมตร

$$\text{เนื่องจาก} \quad \frac{680}{208} \approx 3.27$$

ดังนั้น เพชรจะสามารถทำกรวยจากสังกะสีที่มีพื้นที่ประมาณ 680 ตารางเซนติเมตร ได้มากที่สุด 3 อัน



### 3.3 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม (5 ชั่วโมง)

#### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

- 1. อธิบายลักษณะและส่วนต่าง ๆ ของทรงกลม
- 2. หาปริมาตรของทรงกลมและนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3. หาพื้นที่ผิวของทรงกลมและนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหา

#### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

-

#### สิ่งที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

- 1. อุปกรณ์ของกิจกรรม : ปริมาตรของทรงกลม
- 2. อุปกรณ์ของกิจกรรมเสนอแนะ 3.3 : พื้นที่ผิวของทรงกลม

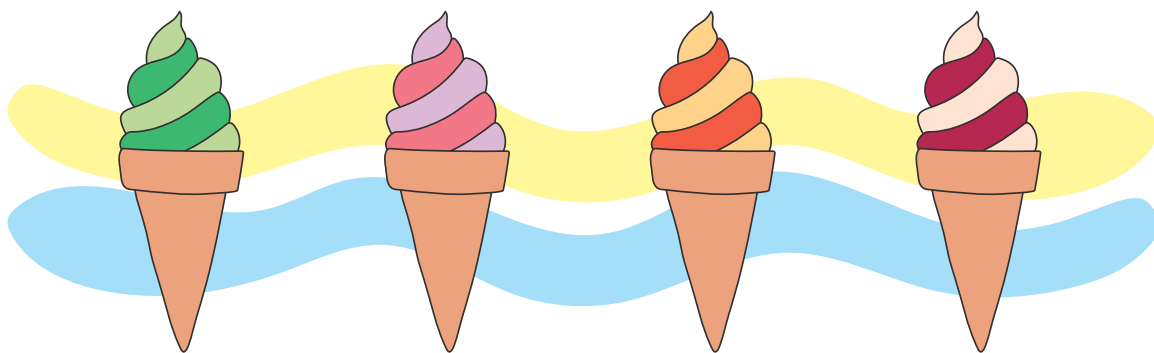
#### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม ซึ่งต้องการให้นักเรียนรู้จักส่วนประกอบต่าง ๆ ของทรงกลม และความหมายของทรงกลมในทางคณิตศาสตร์ รวมถึงให้นักเรียนทำกิจกรรมเชิงสำรวจเพื่อสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับสูตรการหาปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม โดยอาศัยความรู้เรื่องปริมาตรของทรงกระบอกและพีระมิด เพื่อให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์และที่มาของสูตรการหาปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

- 1. ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับสิ่งของในชีวิตประจำวันที่มีลักษณะคล้ายทรงกลม และร่วมกันอภิปรายเพื่อให้ได้ข้อสรุปเกี่ยวกับลักษณะและส่วนต่าง ๆ ของทรงกลม รวมถึงความหมายของทรงกลมในทางคณิตศาสตร์
- 2. ครูให้นักเรียนทำ “กิจกรรม : ปริมาตรของทรงกลม” ในหนังสือเรียน หน้า 150–151 เพื่อให้นักเรียนได้สำรวจสังเกต สร้างข้อความคาดการณ์ และหาข้อสรุปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของทรงกลมและปริมาตรของทรงกระบอกที่มีความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานและความสูงเท่ากับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม ซึ่งจะได้ว่า สามเท่าของปริมาตรของครึ่งทรงกลมเท่ากับปริมาตรของทรงกระบอก เพื่อนำไปสู่สูตรการหาปริมาตรของทรงกลม

ครูอาจใช้วัตถุที่ค้นในกรอบสื่อเสริมเพิ่มความรู้ ในหนังสือเรียน หน้า 151 แทนการทำกิจกรรมในชั้นเรียน ซึ่งยังสามารถช่วยให้นักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์ และหาข้อสรุปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของครึ่งทรงกลมกับปริมาตรของทรงกระบอก เพื่อนำไปสู่สูตรการหาปริมาตรของทรงกลมได้เช่นเดียวกัน

3. ครูให้นักเรียนสังเกตว่าในการหาพื้นที่ผิวของทรงกลม เมื่อแบ่งพื้นที่ผิวโค้งของทรงกลมออกเป็นรูปหลายเหลี่ยมหลาย ๆ รูปและมีจำนวนมากพอแล้ว จะสามารถใช้ความรู้ในเรื่องการหาปริมาตรของทรงกลมและพีระมิดมาใช้ในการให้เหตุผลประกอบ เพื่อเชื่อมโยงไปสู่สูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกลม
- ครูอาจใช้ “กิจกรรมเสนอแนะ 3.3 : พื้นที่ผิวของทรงกลม” ในคู่มือครู หน้า 216–217 เพื่อยืนยันสูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกลม ซึ่งจะทำให้นักเรียนได้มีโอกาสสำรวจ สร้างข้อความคาดการณ์ และยืนยันข้อสรุปเกี่ยวกับสูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกลม
4. ครูอาจใช้ชวนคิด 3.8 ในหนังสือเรียน หน้า 154 ให้นักเรียนได้ฝึกใช้การนึกภาพและจินตนาการ เพื่อให้ได้ข้อสรุปว่า ทรงกลมที่ใหญ่ที่สุดนี้ ควรเป็นทรงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเท่ากับความยาวของด้านของลูกบาศก์ที่กำหนดให้



## กิจกรรม : ปริมาตรของทรงกลม

กิจกรรมนี้เป็นกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลงมือสำรวจ สร้างข้อความคาดการณ์ และหาข้อสรุปเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของครึ่งทรงกลมและปริมาตรของทรงกระบอกที่มีความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานและความสูงเท่ากับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของครึ่งทรงกลม ซึ่งจะนำไปสู่สูตรการหาปริมาตรของทรงกลม โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

### สื่อ/อุปกรณ์

- 1. ลูกบอลพลาสติกผ่าครึ่ง
- 2. กระดาษแข็ง
- 3. กรรไกร
- 4. เทปใส
- 5. ทาย

### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

- 1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน จากนั้นทำกิจกรรมตามขั้นตอนการทำกิจกรรม ในหนังสือเรียน หน้า 150 โดยระหว่างการทำกิจกรรม ครูอาจตั้งคำถามให้นักเรียนสังเกตและสำรวจ เช่น

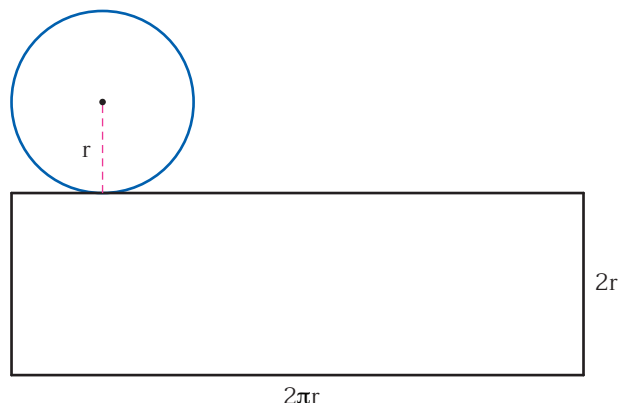
- 1) ในขั้นตอนที่ 1 นักเรียนจะมีวิธีการในการหาค่าปริมาตรของลูกบอลพลาสติกผ่าครึ่งได้อย่างไร

แนวคำตอบ

- \* วัดความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมที่เป็นขอบของครึ่งทรงกลม แล้วหารค่าปริมาตรจากสูตร  
$$\text{ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม} = 2\pi r$$
- \* วัดหน้าตัดของลูกบอลพลาสติกผ่าครึ่งลงบนกระดาษ จากนั้นตัดกระดาษที่เป็นรูปวงกลมนั้น ซึ่งเป็นหน้าตัดของลูกบอล แล้วพับครึ่งกระดาษรูปวงกลมนั้น จะได้เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม แล้วพับแบ่งครึ่งกระดาษอีกครั้ง จะได้รัศมีวงกลม
- \* วัดหน้าตัดของลูกบอลพลาสติกผ่าครึ่งลงบนกระดาษ จากนั้นหาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เป็นหน้าตัดนั้นโดยใช้ความรู้ที่ว่าเส้นที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ด จะตัดกันที่จุดศูนย์กลาง จากนั้นสร้างรัศมีจากจุดศูนย์กลางที่ได้

- 2) ในขั้นตอนที่ 2 นักเรียนจะมีวิธีการสร้างทรงกระบอกให้มีขนาดตามที่กำหนดได้อย่างไรบ้าง

แนวคำตอบ สร้างรูปคลี่ของทรงกระบอก โดยให้  $r$  เท่ากับรัศมีของวงกลมที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ดังรูป



3) ในขั้นตอนที่ 3 นักเรียนคิดว่าจะต้องเททรายจากลูกบอลพลาสติกกี่ครั้ง จึงจะเต็มทรงกระบอกพอดี  
**แนวคำตอบ** 3 ครั้ง

2. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผลที่ได้จากการทำกิจกรรม และตอบคำถามท้ายกิจกรรม ในหนังสือเรียน หน้า 151 เพื่อนำไปสู่การสรุปสูตรการหาปริมาตรของทรงกลม

**หมายเหตุ** ในการทำกิจกรรม หากนักเรียนบรรจุทรายลงในครึ่งทรงกลมแน่นเกินไปหรือไม่เต็มครึ่งทรงกลมพอดี อาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนได้ ดังนั้น ครูอาจให้นักเรียนทดลอง 2-3 ครั้ง เพื่อให้เห็นแนวโน้มที่จะนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ได้ง่ายขึ้น

## เฉลยคำถามท้ายกิจกรรม

1. 3 ครั้ง
2. คำตอบมีได้หลากหลาย เช่น
  - ❖ ปริมาตรของทรงกระบอกเป็นสามเท่าของปริมาตรของครึ่งทรงกลม เมื่อรัศมีของฐานของทรงกระบอกเท่ากับรัศมีของครึ่งทรงกลม และความสูงของทรงกระบอกเป็นสองเท่าของรัศมีของครึ่งทรงกลม
  - ❖ ปริมาตรของครึ่งทรงกลมเป็นหนึ่งในสามของปริมาตรของทรงกระบอก เมื่อรัศมีของครึ่งทรงกลมเท่ากับรัศมีของฐานของทรงกระบอก และรัศมีของครึ่งทรงกลมเป็นครึ่งหนึ่งของความสูงของทรงกระบอก

### กิจกรรมเสนอแนะ 3.3 : พื้นที่ผิวของทรงกลม

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลงมือสำรวจ สร้างข้อความคาดการณ์ และยืนยันข้อสรุปเกี่ยวกับสูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกลม โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิวของทรงกลมและวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากัน โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

#### สื่อ/อุปกรณ์

- ลูกเทนนิส
- เชือกป่าน
- อุปกรณ์สำหรับวัดเส้นผ่านศูนย์กลางของลูกเทนนิส เช่น เชือก ไม้บรรทัด เวอร์เนียคาลิเปอร์ บล็อกไม้ 2 อัน
- วงเวียน
- เทปเยื่อขาวสองหน้าแบบบาง
- เข็มหมุด
- กรรไกร

#### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

- ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4–5 คน แล้วแจกอุปกรณ์ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม จากนั้นให้นักเรียนวัดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของลูกเทนนิส โดยเลือกใช้อุปกรณ์ที่เตรียมให้ หรือวิธีการทางเรขาคณิตอื่น ๆ
- ครูให้นักเรียนใช้เชือกพันรอบลูกเทนนิสให้เต็มดั่งรูป เพื่อให้ง่ายต่อการพันเชือกอาจใช้เทปเยื่อขาวสองหน้าแบบบางพันรอบลูกเทนนิสก่อน จากนั้น ยึดปลายข้างหนึ่งของเชือกด้วยเข็มหมุดแล้วพันรอบลูกเทนนิส (ข้อเสนอนี้ : ในการพันเชือกไม่ควรดึงเชือกแน่นเกินไป หรือหลวมเกินไป เพราะจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนเพิ่มมากขึ้น)



ครูอภิปรายเพิ่มเติมกับนักเรียน เพื่อให้นักเรียนสังเกตและเข้าใจว่า บริเวณที่เชือกสัมผัสและพันรอบลูกเทนนิสเป็นพื้นที่ผิวของลูกเทนนิส

3. ครูให้นักเรียนตัดกระดาษเป็นรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับรัศมีของลูกเทนนิส แล้วใช้เชือกที่ได้จากการพันรอบลูกเทนนิสมาขดบนกระดาษรูปวงกลม เมื่อขดเต็มวงให้ตัดเชือกออก ทั้งนี้ ครูควรอธิบายเพิ่มเติมเพื่อให้นักเรียนสังเกตว่าพื้นที่ของวงกลมนี้จะเท่ากับพื้นที่ผิวบางส่วนของลูกเทนนิส แล้วให้นักเรียนลองคาดการณ์ว่า จะสามารถขดเชือกเป็นวงกลมได้กี่วง จึงจะเท่ากับพื้นที่ผิวทั้งหมดของลูกเทนนิส จากนั้น ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติเพื่อตรวจสอบข้อคาดการณ์ โดยนำเชือกที่เหลือไปขดบนกระดาษรูปวงกลมขึ้นต่อ ๆ ไปจนเชือกหมด



4. ครูให้นักเรียนอธิบายเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างผลรวมพื้นที่ของวงกลมที่ขดได้ กับพื้นที่ผิวของลูกเทนนิส ซึ่งเป็นพื้นที่ผิวของทรงกลม จนได้ข้อสรุปว่า

พื้นที่ผิวของลูกเทนนิสที่มีรัศมี  $r$  หน่วย เท่ากับ  $\pi r^2 + \pi r^2 + \pi r^2 + \pi r^2$  ตารางหน่วย

หรือเท่ากับ  $4\pi r^2$  ตารางหน่วย

ดังนั้น พื้นที่ผิวของทรงกลม =  $4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม



เฉลยชวนคิด



ipst.me/11435

ชวนคิด 3.6

แนวคิด ถ้านำระนาบมาตัดทรงกลม หน้าตัดที่ได้จะเป็นวงกลม โดยหน้าตัดที่ได้จากการตัดทรงกลมในตำแหน่งที่ห่างจากจุดศูนย์กลางของทรงกลมเท่ากัน จะได้วงกลมที่มีขนาดเท่ากันและหน้าตัดที่ได้จากการตัดทรงกลมในตำแหน่งที่ห่างจากจุดศูนย์กลางไม่เท่ากัน จะเป็นวงกลมที่มีขนาดไม่เท่ากัน



ipst.me/11436

ชวนคิด 3.7

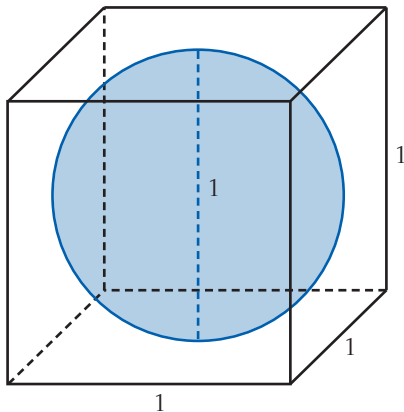
แนวคิด วงกลมใหญ่ของทรงกลมมีได้นับไม่ถ้วน  
ถ้ากำหนดจุดจุดหนึ่งบนทรงกลม จะมีวงกลมใหญ่ผ่านจุดนี้ได้นับไม่ถ้วนเช่นกัน



ipst.me/11437

ชวนคิด 3.8

แนวคิด ทรงกลมที่ใหญ่ที่สุดที่สร้างจากลูกบาศก์ขนาด  $1 \times 1 \times 1$  ลูกบาศก์เมตร คือทรงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 เมตร ที่แนบในลูกบาศก์นั้น แสดงได้ดังรูป



ปริมาตรของหินอ่อนที่แกะสลักออกไป เท่ากับ ปริมาตรของลูกบาศก์ลบด้วยปริมาตรของทรงกลมแนบใน

จะได้ ปริมาตรของหินอ่อนที่แกะสลักออกไป

$$\begin{aligned} &= 1^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &\approx 1 - \left[ \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right] \\ &\approx 1 - \frac{11}{21} \\ &\approx \frac{10}{21} \end{aligned}$$

ดังนั้น ช่างตนัยสกัดหินอ่อนออกไปคิดเป็นปริมาตรประมาณ  $\frac{10}{21}$  ลูกบาศก์เมตร

## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 3.3 ก

ในการทำแบบฝึกหัด นักเรียนอาจได้คำตอบแตกต่างจากที่เฉลยไว้ เพราะใช้ค่าประมาณของ  $\pi$  ที่แตกต่างกัน

1. **แนวคิด** เนื่องจาก ลูกท่อน้ำหนักเหล็กทรงกลมมีรัศมียาว  $\frac{18}{2} = 9$  เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม =  $\frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ปริมาตรของลูกท่อน้ำหนักเหล็ก} &\approx \frac{4}{3} \times 3.14 \times 9^3 \\ &\approx 3,052.08 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

2. **แนวคิด** เนื่องจาก กรวยแรกมีไอศกรีมที่มีลักษณะเป็นทรงกลม 2 ลูก แต่ละลูกมีรัศมี 2.5 เซนติเมตร และกรวยที่สองมีไอศกรีมที่มีลักษณะเป็นทรงกลม 3 ลูก แต่ละลูกมีรัศมี 1.5 เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม =  $\frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ปริมาตรของไอศกรีมในกรวยแรก} &\approx 2 \times \left[ \frac{4}{3} \times 3.14 \times (2.5)^3 \right] \\ &\approx 130.83 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ ปริมาตรของไอศกรีมในกรวยที่สอง} &\approx 3 \times \left[ \frac{4}{3} \times 3.14 \times (1.5)^3 \right] \\ &\approx 42.39 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

ดังนั้น กรวยแรกมีไอศกรีมมากกว่ากรวยที่สอง

3. **แนวคิด** เนื่องจาก ลูกฟุตบอลวัดความยาวรอบวงกลมใหญ่ได้ 69 เซนติเมตร

จากสูตร ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม =  $2\pi r$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของวงกลม

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad 69 &\approx 2 \times \frac{22}{7} \times r \\ r &\approx 11\end{aligned}$$

นั่นคือ ลูกฟุตบอลมีรัศมีภายนอกยาวประมาณ 11 เซนติเมตร

เนื่องจาก ลูกฟุตบอลทำด้วยหนังที่มีความหนา 0.5 เซนติเมตร

ดังนั้น ลูกฟุตบอลมีรัศมีภายในยาวประมาณ  $11 - 0.5 = 10.5$  เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม =  $\frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

$$\text{จะได้ ลูกฟุตบอลจะจุลมได้ประมาณ } \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (10.5)^3 \approx 4,851 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$



4. **แนวคิด** เนื่องจาก แดงโมมีความยาวรอบวงกลมใหญ่ 55 เซนติเมตร  
 จากสูตร ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม  $= 2\pi r$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของวงกลม  
 จะได้ 
$$55 \approx 2 \times \frac{22}{7} \times r$$
  

$$r \approx 8.75$$
  
 นั่นคือ แดงโมมีรัศมีภายนอกยาวประมาณ 8.75 เซนติเมตร  
 เนื่องจาก เปลือกแดงโมนา 1 เซนติเมตร  
 ดังนั้น แดงโมส่วนที่เป็นเนื้อแดงมีรัศมียาวประมาณ  $8.75 - 1 = 7.75$  เซนติเมตร  
 จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม  
 จะได้ เนื้อแดงของแดงโมจะมีปริมาตรประมาณ  $\frac{4}{3} \times 3.14 \times (7.75)^3 = 1,948.83$  ลูกบาศก์เซนติเมตร
5. **แนวคิด** เนื่องจาก อีกลูทำด้วยก้านน้ำแข็งซึ่งมีความหนาประมาณ 20 เซนติเมตร หรือ 0.2 เมตร และมีลักษณะเป็นครึ่งทรงกลมสูงประมาณ 2 เมตร  
 ดังนั้น อีกลูครึ่งทรงกลมมีรัศมีภายในประมาณ  $2 - 0.2 = 1.8$  เมตร  
 จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม  
 จะได้ ปริมาตรของอากาศภายในอีกลู  $\approx \frac{1}{2} \times \left[ \frac{4}{3} \times 3.14 \times (1.8)^3 \right]$   

$$\approx 12.21$$
 ลูกบาศก์เมตร
6. **แนวคิด** เนื่องจาก กะปิทอดมีลักษณะเป็นก้อนทรงกลมมีรัศมีประมาณ  $\frac{1}{2}$  เซนติเมตร  
 จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม  
 ดังนั้น กะปิทอด 1 ลูก จะมีปริมาตรประมาณ  $\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{11}{21}$  ลูกบาศก์เซนติเมตร  
 เนื่องจาก กะปิทอดแต่ละลูกมีกะปิเป็นส่วนประกอบประมาณ 5%  
 ดังนั้น กะปิทอดแต่ละลูกจะใช้กะปิประมาณ  $\frac{5}{100} \times \frac{11}{21} = \frac{11}{420}$  ลูกบาศก์เซนติเมตร  
 เนื่องจาก กะปิ 1 ถ้วยตวง มีปริมาตร 240 ลูกบาศก์เซนติเมตร  
 ดังนั้น จะทำกะปิทอดได้ประมาณ  $240 \div \frac{11}{420} \approx 9,163.64$  ลูก  
 นั่นคือ กะปิ 1 ถ้วยตวง จะทำกะปิทอดได้ประมาณ 9,163 ลูก

7. **แนวคิด** เนื่องจาก ห้องฉายดาวมียอดโดมเป็นครึ่งทรงกลมมีรัศมีภายในยาว  $\frac{20.6}{2} = 10.3$  เมตร

และ ฐานโดมเป็นทรงกระบอกที่มีรัศมีภายในยาว 10.3 เมตร สูง 3 เมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม =  $\frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ปริมาตรของอากาศภายในยอดโดม} &\approx \frac{1}{2} \times \left[ \frac{4}{3} \times 3.14 \times (10.3)^3 \right] \\ &\approx 2,287.44 \text{ ลูกบาศก์เมตร}\end{aligned}$$

จากสูตร ปริมาตรของทรงกระบอก =  $\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐาน และ  $h$  แทนความสูง

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ปริมาตรของอากาศภายในฐานโดม} &\approx 3.14 \times (10.3)^2 \times 3 \\ &\approx 999.37 \text{ ลูกบาศก์เมตร}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น ปริมาตรของอากาศภายในห้องฉายดาว} &\approx 2,287.44 + 999.37 \\ &\approx 3,286.81 \text{ ลูกบาศก์เมตร}\end{aligned}$$

8. **แนวคิด** เนื่องจาก ก้อนซีฟิ่งทรงกลมสามลูกแต่ละลูกมีรัศมียาว 2 เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม =  $\frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ปริมาตรของก้อนซีฟิ่งสามลูก} &= 3 \times \left( \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 \right) \\ &= 32\pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

เมื่อให้ความร้อนจนก้อนซีฟิ่งหลอมเหลวเป็นเนื้อเดียวกันอยู่ในแก้วทรงกระบอกที่มีรัศมีภายใน 2 เซนติเมตร

จะได้ ซีฟิ่งในแก้วทรงกระบอกมีปริมาตร  $32\pi$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรทรงกระบอก =  $\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐาน และ  $h$  แทนความสูง

$$\text{จะได้ } 32\pi = \pi \times 2^2 \times h$$

$$32\pi = 4\pi \times h$$

$$h = 8 \text{ เซนติเมตร}$$

ดังนั้น ซีฟิ่งจะสูงจากก้นแก้วทรงกระบอก 8 เซนติเมตร

### แบบฝึกหัด 3.3 ข

ในการทำแบบฝึกหัด นักเรียนอาจได้คำตอบแตกต่างจากที่เฉลยไว้ เพราะใช้ค่าประมาณของ  $\pi$  ที่แตกต่างกัน

1. 1) **แนวคิด** เนื่องจาก พื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม 2 ส่วน = พื้นที่ผิวของทรงกลม

จากรูป จะได้ พื้นที่ผิวของรูปเรขาคณิตสามมิติ = พื้นที่ผิวของทรงกลม + พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก

เนื่องจาก ทรงกลมและฐานของทรงกระบอกมีรัศมียาว 6 เซนติเมตร

จากสูตรพื้นที่ผิวของทรงกลม =  $4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

จะได้ พื้นที่ผิวของทรงกลม  $\approx 4 \times 3.14 \times 6^2$

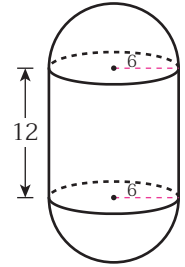
$$\approx 452.16 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก =  $2\pi rh$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐาน และ  $h$  แทนความสูง

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก  $\approx 2 \times 3.14 \times 6 \times 12$

$$\approx 452.16 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ดังนั้น รูปเรขาคณิตสามมิตินี้มีพื้นที่ผิวประมาณ  $452.16 + 452.16 = 904.32$  ตารางเซนติเมตร



- 2) **แนวคิด** จากรูป พื้นที่ผิวของรูปเรขาคณิตสามมิติ = พื้นที่ผิวข้างของกรวย + พื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม

กรวยสูง 12 เซนติเมตร และมีส่วนสูงเอียงยาว 13 เซนติเมตร

ให้  $r$  แทนความยาวของรัศมีของฐานของกรวยซึ่งเท่ากับความยาวของรัศมีของครึ่งทรงกลม

จะได้  $r^2 = 13^2 - 12^2$

$$= 25$$

$$r = 5$$

ดังนั้น กรวยและครึ่งทรงกลมมีรัศมียาว 5 เซนติเมตร

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวย =  $\pi r l$  เมื่อ  $l$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของกรวย  $\approx 3.14 \times 5 \times 13$

$$\approx 204.1 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

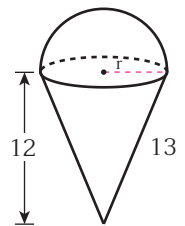
จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม =  $4\pi r^2$

จะได้ พื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม  $\approx \frac{1}{2} \times (4 \times 3.14 \times 5^2)$

$$\approx 157 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ดังนั้น รูปเรขาคณิตสามมิตินี้มีพื้นที่ผิวประมาณ  $204.1 + 157$

$$\approx 361.1 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$



- 3) **แนวคิด** จากรูป พื้นที่ผิวของรูปเรขาคณิตสามมิติ = พื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม + พื้นที่ผิวข้างของกรวย  
ครึ่งทรงกลมมีรัศมียาว 4.5 เซนติเมตร

จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม =  $4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

$$\begin{aligned}\text{จะได้ พื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม} &\approx \frac{1}{2} \times [4 \times 3.14 \times (4.5)^2] \\ &\approx 127.17 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

กรวยสูง 6 เซนติเมตร และรัศมีของฐานของกรวยยาว 4.5 เซนติเมตร

ให้  $\ell$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย

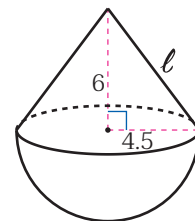
$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \ell^2 &= 6^2 + (4.5)^2 \\ &= 56.25\end{aligned}$$

$$\ell = 7.5$$

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวย =  $\pi r \ell$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย

$$\begin{aligned}\text{จะได้ พื้นที่ผิวข้างของกรวย} &\approx 3.14 \times 4.5 \times 7.5 \\ &\approx 105.975 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น รูปเรขาคณิตสามมิติมีพื้นที่ผิวประมาณ } &127.17 + 105.975 \\ &\approx 233.145 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$



- 4) **แนวคิด** จากรูป พื้นที่ผิวของรูปเรขาคณิตสามมิติ

$$= \text{พื้นที่ฐานของทรงกระบอก} + \text{พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก} + \text{พื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม}$$

ฐานของทรงกระบอกและครึ่งทรงกลมมีรัศมียาว 5 เซนติเมตร และทรงกระบอกสูง 10 เซนติเมตร

จากสูตร พื้นที่ของวงกลม =  $\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของวงกลม

$$\begin{aligned}\text{จะได้ พื้นที่ฐานของทรงกระบอก} &\approx 3.14 \times 5^2 \\ &\approx 78.5 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

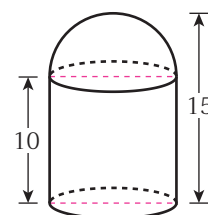
จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก =  $2\pi rh$  เมื่อ  $h$  แทนความสูง

$$\begin{aligned}\text{จะได้ พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก} &\approx 2 \times 3.14 \times 5 \times 10 \\ &\approx 314 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม =  $4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

$$\begin{aligned}\text{จะได้ พื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม} &\approx \frac{1}{2} \times (4 \times 3.14 \times 5^2) \\ &\approx 157 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น รูปเรขาคณิตสามมิติมีพื้นที่ผิวประมาณ } 78.5 + 314 + 157 = 549.5 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$



2. **แนวคิด** จากรูป จะเห็นว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ยาวเท่ากับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม

ให้  $x$  แทนความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม

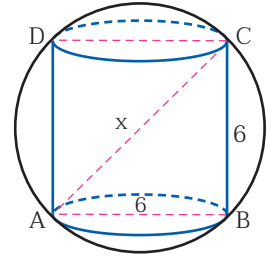
$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad x^2 &= 6^2 + 6^2 \\ &= 72 \\ x &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ทรงกลมมีรัศมียาว  $\frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$  เซนติเมตร

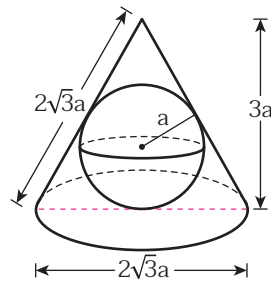
จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม  $= 4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม  
จะได้ พื้นที่ผิวของทรงกลม  $\approx 4 \times 3.14 \times (3\sqrt{2})^2$   
 $\approx 226.08$  ตารางเซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม  
จะได้ ปริมาตรของทรงกลม  $\approx \frac{4}{3} \times 3.14 \times (3\sqrt{2})^3$   
 $\approx 319.68$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น ทรงกลมมีพื้นที่ผิวประมาณ 226.08 ตารางเซนติเมตร  
และมีปริมาตรประมาณ 319.68 ลูกบาศก์เซนติเมตร



3.



- 1) **แนวคิด** จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม  $= 4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม  
จะได้ พื้นที่ผิวของทรงกลม  $= 4\pi a^2$  ตารางเซนติเมตร
- จากสูตร พื้นที่ผิวของกรวย  $= \pi r \ell + \pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย  
และ  $\ell$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย
- จะได้ พื้นที่ผิวของกรวย  $= \left[ \pi \times \frac{2\sqrt{3}a}{2} \times 2\sqrt{3}a \right] + \left[ \pi \times \left( \frac{2\sqrt{3}a}{2} \right)^2 \right]$   
 $= 6\pi a^2 + 3\pi a^2$   
 $= 9\pi a^2$  ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น อัตราส่วนของพื้นที่ผิวของทรงกลมต่อพื้นที่ผิวของกรวยเท่ากับ  $4\pi a^2 : 9\pi a^2 = 4 : 9$

2) **แนวคิด** จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi r^3$

จะได้ ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi a^3$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $h$  แทนความสูงของกรวย

จะได้ ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{2\sqrt{3}a}{2}\right)^2 \times 3a$   
 $= 3\pi a^3$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น อัตราส่วนของปริมาตรของทรงกลมต่อปริมาตรของกรวยเท่ากับ  $\frac{4}{3}\pi a^3 : 3\pi a^3 = 4 : 9$

4. 1) **แนวคิด** เนื่องจาก โลกมีรัศมียาวประมาณ  $\frac{12,640}{2} = 6,320$  กิโลเมตร

จากสูตร ความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม  $= 2\pi r$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของวงกลม

จะได้ ความยาวของเส้นศูนย์สูตรประมาณ  $2 \times 3.14 \times 6,320 = 39,689.6$  กิโลเมตร

2) **แนวคิด** จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม  $= 4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

จะได้ พื้นที่ผิวของโลก  $\approx 4 \times 3.14 \times (6,320)^2$

$\approx 501,676,544$  ตารางกิโลเมตร

เนื่องจาก ผิวโลกส่วนที่ปกคลุมด้วยน้ำมีพื้นที่ประมาณ  $\frac{3}{4}$  ของพื้นที่ผิวของโลกทั้งหมด

ดังนั้น พื้นที่ผิวของโลกส่วนที่ไม่ได้ปกคลุมด้วยน้ำมีประมาณ  $\frac{1}{4}$  ของพื้นที่ผิวของโลกทั้งหมด

$\approx \frac{1}{4} \times 501,676,544$

$\approx 125,419,136$  ตารางกิโลเมตร

3) เนื่องจาก ประเทศไทยมีพื้นที่ประมาณ 513,115 ตารางกิโลเมตร หรือประมาณ 500,000 ตารางกิโลเมตร และ พื้นที่ผิวของโลกส่วนที่ไม่ปกคลุมด้วยน้ำมีประมาณ 125,419,136 ตารางกิโลเมตร หรือประมาณ 125,000,000 ตารางกิโลเมตร

ดังนั้น ประเทศไทยมีพื้นที่ประมาณ  $\frac{500,000}{125,000,000} = \frac{1}{250}$  ของพื้นที่ผิวของโลกส่วนที่ไม่ได้ปกคลุมด้วยน้ำ

**หมายเหตุ** คำตอบของนักเรียนอาจแตกต่างจากที่ให้ไว้

5. **แนวคิด** เนื่องจาก ลูกบอลมีรัศมียาว 26 เซนติเมตร

จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม  $= 4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

$$\begin{aligned}\text{จะได้ พื้นที่ผิวของลูกบอล} &\approx 4 \times 3.14 \times 26^2 \\ &\approx 8,490.56 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

เนื่องจาก ส่วนผิวโค้งที่เป็นพลาสติกมี 3 สีสลับกัน รวมทั้งหมด 9 แถบ และแต่ละแถบบมีพื้นที่ผิวเท่ากัน

$$\text{ดังนั้น พื้นที่ผิวของแต่ละแถบ} \approx \frac{8,490.56}{9}$$

$$\approx 943.4 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

นั่นคือ พื้นที่ผิวของพลาสติกแต่ละแถบบประมาณ 943.4 ตารางเซนติเมตร

6. **แนวคิด** เนื่องจาก ชั้นเงินรูปครึ่งทรงกลมมีพื้นที่ผิว 1,413 ตารางเซนติเมตร

จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม  $= 4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

จะได้ พื้นที่ผิวของครึ่งทรงกลม  $= 2\pi r^2$

$$\text{ดังนั้น} \quad 1,413 \approx 2 \times 3.14 \times r^2$$

$$r^2 \approx 225$$

$$r \approx 15$$

นั่นคือ เส้นผ่านศูนย์กลางของชั้นเงินใบนี้ยาวประมาณ 30 เซนติเมตร

## เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

ในการทำแบบฝึกหัด นักเรียนอาจได้คำตอบแตกต่างจากที่เฉลยไว้ เพราะใช้ค่าประมาณของ  $\pi$  ที่แตกต่างกัน

1. **แนวคิด** หลังคาบ้านมีลักษณะเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีฐานยาวด้านละ 6 เมตร และส่วนสูงเอียงยาว 4 เมตร

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $= \frac{1}{2} \times$  ความยาวรอบรูปของฐาน  $\times$  ส่วนสูงเอียง

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของหลังคาบ้าน  $= \frac{1}{2} \times (4 \times 6) \times 4 = 48$  ตารางเมตร

เนื่องจาก แผ่นยางมะตอย 1 ห่อ สามารถใช้ปูทับหลังคาได้ 0.25 ตารางเมตร

ดังนั้น จะต้องซื้อแผ่นยางมะตอยอย่างน้อย  $\frac{48}{0.25} = 192$  ห่อ

และเนื่องจาก แผ่นยางมะตอย 1 ห่อ ราคา 300 บาท

ดังนั้น จะต้องซื้อแผ่นยางมะตอยคิดเป็นเงิน  $192 \times 300 = 57,600$  บาท

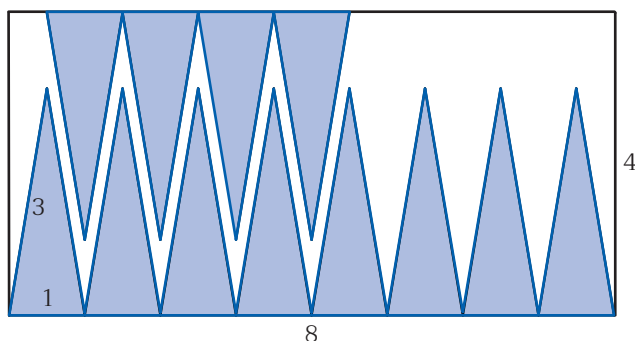
นั่นคือ ต้องซื้อแผ่นยางมะตอยอย่างน้อย 192 ห่อ และคิดเป็นเงิน 57,600 บาท

2. **แนวคิด** ต้องการสร้างอาคารกระจกรับแสงสว่างให้มีกระจกด้านข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวน 12 ชิ้น แต่ละชิ้นมีฐานยาว 1 เมตร และมีส่วนสูงเอียงยาว 3 เมตร

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐาน 12 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า  $= \frac{1}{2} \times$  ความยาวรอบรูปของฐาน  $\times$  ส่วนสูงเอียง

จะได้ พื้นที่ของกระจกที่ต้องใช้  $= \frac{1}{2} \times (12 \times 1) \times 3 = 18$  ตารางเมตร

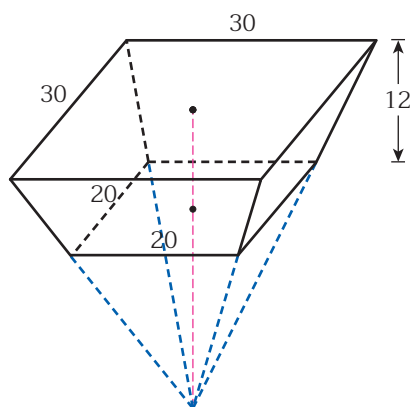
ดังนั้น จะสามารถตัดกระจกรูปสามเหลี่ยมทั้งสิบสองชิ้นจากแผ่นกระจกที่กว้าง 4 เมตร และยาว 8 เมตร ได้ดังรูป



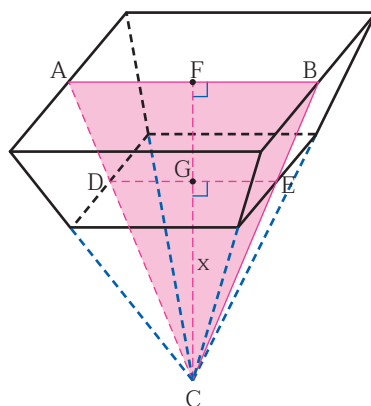
**หมายเหตุ** คำตอบของนักเรียนอาจแตกต่างจากที่ให้ไว้



3. **แนวคิด** การคำนวณหาปริมาตรของพีระมิดยอดตัด ทำได้โดยพิจารณาให้เป็นส่วนหนึ่งของพีระมิดก่อนตัดยอด ดังรูป



ถ้าใช้ระนาบตัดพีระมิดในแนวตั้งฉากกับฐานผ่านยอดของพีระมิด ดังรูป



จะได้ว่า  $\triangle ABC$  เป็นหน้าตัดบนระนาบ และเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$\triangle BFC$  และ  $\triangle EGC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่  $\triangle BFC \sim \triangle EGC$

จากโจทย์ กำหนดให้  $DE = 20$  นิ้ว  $AB = 30$  นิ้ว และ  $FG = 12$  นิ้ว

จะได้  $GE = \frac{20}{2} = 10$  นิ้ว และ  $FB = \frac{30}{2} = 15$  นิ้ว

ให้  $x$  แทนความสูงของพีระมิดส่วนที่ถูกตัดออก นั่นคือ  $GC = x$

เนื่องจาก  $\triangle BFC \sim \triangle EGC$

$$\text{จะได้} \quad \frac{FB}{GE} = \frac{FC}{GC}$$

$$\frac{15}{10} = \frac{x + 12}{x}$$

$$15x = 10(x + 12)$$

$$5x = 120$$

$$x = 24$$

นั่นคือ ความสูงของพีระมิดส่วนที่ถูกตัดออก 24 นิ้ว

ดังนั้น ความสูงของพีระมิดก่อนตัดยอด =  $12 + 24 = 36$  นิ้ว

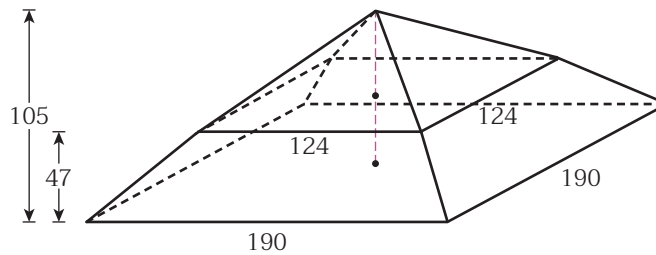
จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด =  $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ ปริมาตรของพีระมิดก่อนตัดยอดออก} &= \frac{1}{3} \times 30^2 \times 36 \\ &= 10,800 \text{ ลูกบาศก์นิ้ว} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ ปริมาตรของพีระมิดส่วนที่ยอดถูกตัด} &= \frac{1}{3} \times 20^2 \times 24 \\ &= 3,200 \text{ ลูกบาศก์นิ้ว} \end{aligned}$$

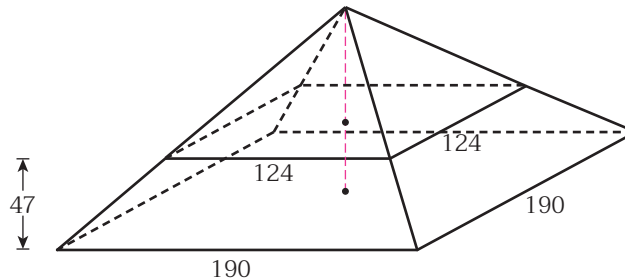
ดังนั้น ปริมาตรของดินที่ใส่กระถางใบนี้ได้เต็มพอดีเท่ากับ  $10,800 - 3,200 = 7,600$  ลูกบาศก์นิ้ว

#### 4. แนวคิด จากโจทย์ พีระมิดหังกอมีลักษณะดังรูป ก



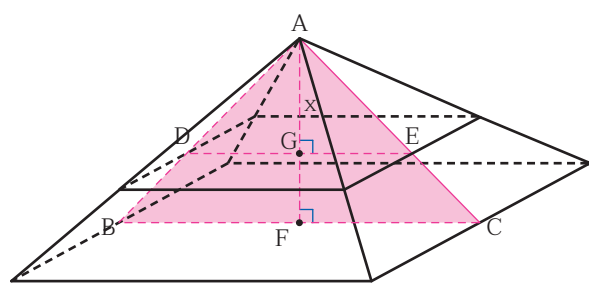
รูป ก

ถ้าไม่ได้เปลี่ยนแบบการก่อสร้าง พีระมิดหังกอควรจะมีลักษณะดังรูป ข



รูป ข

ถ้าใช้ระนาบตัดพีระมิดรูป ข ในแนวตั้งฉากกับฐานผ่านยอดของพีระมิด ดังรูป ค



รูป ค

จะได้ว่า  $\triangle ABC$  เป็นหน้าตัดบนระนาบ และเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  
 $\triangle AFC$  และ  $\triangle AGE$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่  $\triangle AFC \sim \triangle AGE$   
จากโจทย์ จะได้  $BC = 190$  เมตร  $DE = 124$  เมตร และ  $GF = 47$  เมตร  
ดังนั้น  $FC = \frac{190}{2} = 95$  เมตร และ  $GE = \frac{124}{2} = 62$  เมตร

ให้  $x$  แทนความสูงของพีระมิดส่วนบนของพีระมิดรูป ค นั่นคือ  $AG = x$   
เนื่องจาก  $\triangle AFC \sim \triangle AGE$

จะได้

$$\frac{FC}{GE} = \frac{AF}{AG}$$
$$\frac{95}{62} = \frac{x + 47}{x}$$
$$95x = 62(x + 47)$$
$$33x = 2,914$$
$$x \approx 88.3$$

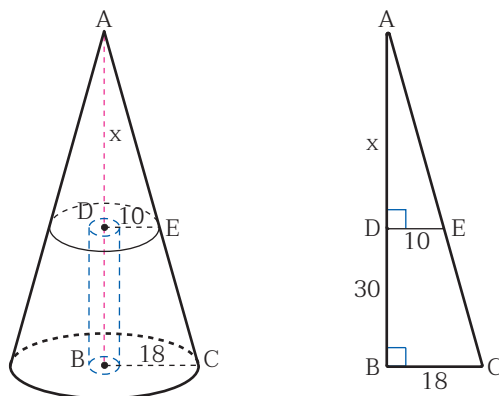
นั่นคือ ความสูงของพีระมิดส่วนบนของพีระมิดรูป ค ประมาณ 88.3 เมตร  
ดังนั้น ถ้าไม่ได้เปลี่ยนแบบการก่อสร้าง พีระมิดหังกอควรจะมีความสูงประมาณ  $47 + 88.3$   
 $\approx 135.3$  เมตร

จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด  $= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$   
จะได้ ปริมาตรของพีระมิดส่วนบนของพีระมิดรูป ค  $\approx \frac{1}{3} \times 124^2 \times 88.3$   
 $\approx 452,566.93$  ลูกบาศก์เมตร

เนื่องจาก ความสูงของพีระมิดหังกอส่วนบน  $= 105 - 47 = 58$  เมตร  
จะได้ ปริมาตรของพีระมิดหังกอส่วนบน  $= \frac{1}{3} \times 124^2 \times 58$   
 $\approx 297,269.33$  ลูกบาศก์เมตร

ดังนั้น ถ้าไม่ได้เปลี่ยนแบบการก่อสร้าง พีระมิดทั้งก่อควรจะมีปริมาตรมากกว่าปัจจุบันประมาณ  
 $452,566.93 - 297,269.33 = 155,297.6$  ลูกบาศก์เมตร

5. แนวคิด จากโจทย์ กรวยก่อนตัดยอดมีลักษณะดังรูป



ให้  $x$  แทนความสูงของกรวยส่วนที่ถูกตัดออก นั่นคือ  $AD = x$

จากรูป พบว่า  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \frac{AD}{AB} &= \frac{DE}{BC} \\ \frac{x}{30+x} &= \frac{10}{18} \\ 18x &= 10(30+x) \\ 8x &= 300 \\ x &= \frac{75}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความสูงของกรวยก่อนตัดยอด  $= 30 + \frac{75}{2} = \frac{135}{2}$  เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \text{ปริมาตรของกรวยก่อนตัดยอด} &= \frac{1}{3}\pi \times 18^2 \times \frac{135}{2} \\ &= 7,290\pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \text{ปริมาตรของกรวยส่วนที่ถูกตัดออก} &= \frac{1}{3}\pi \times 10^2 \times \frac{75}{2} \\ &= 1,250\pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

เนื่องจาก รูททรงกระบอกที่เจาะมีรัศมียาว  $\frac{4.2}{2} = 2.1$  เซนติเมตร และมีความสูงเท่ากับความสูงของกรวยยอดตัด

จากสูตร ปริมาตรของทรงกระบอก =  $\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐาน และ  $h$  แทนความสูงของทรงกระบอก

จะได้ ปริมาตรของรูทรงกระบอก =  $\pi \times (2.1)^2 \times 30$

$$= 132.3\pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

ดังนั้น ปริมาตรของคอนกรีตที่นำมาหล่อกรวยยอดตัด =  $7,290\pi - (1,250\pi + 132.3\pi)$

$$= 5,907.7\pi$$

$$\approx 5,907.7 \times 3.14$$

$$\approx 18,550.178 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

6. **แนวคิด** เนื่องจาก ลูกตุ้มเหล็กทรงกลมมีรัศมียาว 3 เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม =  $\frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

จะได้ ปริมาตรของลูกตุ้มเหล็ก 1 ลูก =  $\frac{4}{3}\pi \times 3^3$

$$= 36\pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

ดังนั้น ปริมาตรของลูกตุ้มเหล็ก 5 ลูก =  $5 \times 36\pi = 180\pi$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก ต้องการนำลูกตุ้มมาหลอมเป็นกรวยตันที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานกรวยยาว 6 เซนติเมตร และสูง 6 เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของกรวย =  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย

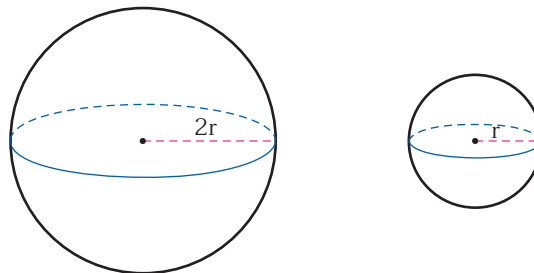
จะได้ ปริมาตรของกรวยขนาดที่ต้องการ 1 กรวย =  $\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 6$

$$= 18\pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

เนื่องจาก  $\frac{\text{ปริมาตรของลูกตุ้มเหล็ก 5 ลูก}}{\text{ปริมาตรของกรวย 1 กรวย}} = \frac{180\pi}{18\pi} = 10$

ดังนั้น ลูกตุ้มเหล็ก 5 ลูก นำมาหลอมเป็นกรวยได้ 10 อัน

7. **แนวคิด**



ให้รัศมีของตะกั่วทรงกลมลูกเล็กยาว  $r$  หน่วย

ดังนั้น รัศมีของตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่จะยาว  $2r$  หน่วย

1) จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

จะได้ ปริมาตรของตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก  $= \frac{4}{3}\pi r^3$  ลูกบาศก์หน่วย

และ ปริมาตรของตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่  $= \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$  ลูกบาศก์หน่วย

เนื่องจาก  $\frac{\text{ปริมาตรของตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่}}{\text{ปริมาตรของตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก}} = \frac{8\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 8$

ดังนั้น ปริมาตรของตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่เป็น 8 เท่าของปริมาตรของตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก

2) จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม  $= 4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

จะได้ พื้นที่ผิวของตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก  $= 4\pi r^2$  ลูกบาศก์หน่วย

และ พื้นที่ผิวของตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่  $= 4\pi(2r)^2 = 4(4\pi r^2)$  ลูกบาศก์หน่วย

เนื่องจาก  $\frac{\text{พื้นที่ผิวของตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่}}{\text{พื้นที่ผิวของตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก}} = \frac{4(4\pi r^2)}{4\pi r^2} = 4$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของตะกั่วทรงกลมลูกใหญ่เป็น 4 เท่าของพื้นที่ผิวของตะกั่วทรงกลมลูกเล็ก

8. แนวคิด เนื่องจาก ท่อนเหล็กทรงกระบอกกลวงมีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในยาว 7 เซนติเมตร มีเส้นผ่านศูนย์กลาง

ภายนอก ยาว 9 เซนติเมตร และท่อนเหล็กยาว 121.5 เซนติเมตร

นั่นคือ รัศมีภายในยาว  $\frac{7}{2}$  เซนติเมตร และรัศมีภายนอกยาว  $\frac{9}{2}$  เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกระบอก  $= \pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐาน และ  $h$  แทนความสูง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ ปริมาตรของท่อนเหล็กทรงกระบอกกลวง} &= \left[ \pi \left( \frac{9}{2} \right)^2 \times 121.5 \right] - \left[ \pi \left( \frac{7}{2} \right)^2 \times 121.5 \right] \\ &= 121.5\pi \left[ \left( \frac{9}{2} \right)^2 - \left( \frac{7}{2} \right)^2 \right] \\ &= 121.5\pi(8) \\ &= 972\pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

เนื่องจาก ปริมาตรของทรงกลมตัน  $=$  ปริมาตรของท่อนเหล็กทรงกระบอกกลวง

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \frac{4}{3}\pi r^3 &= 972\pi \\ r^3 &= 729 \\ r &= 9 \end{aligned}$$

ดังนั้น ทรงกลมตันมีรัศมี 9 เซนติเมตร

จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม  $= 4\pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

จะได้ ทรงกลมตันมีพื้นที่ผิว  $\approx 4 \times 3.14 \times 9^2$

$\approx 1,017.36$  ตารางเซนติเมตร

9. **แนวคิด** เนื่องจาก ลูกเหล็กทรงกลมตันที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 เซนติเมตร จะมีรัศมียาว 7 เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

จะได้ ปริมาตรของลูกเหล็กทรงกลมตัน  $= \frac{4}{3}\pi(7^3)$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก ต้องการนำลูกเหล็กนี้มาหลอมเป็นทรงกลมกลวงลูกเล็กที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกยาว 4 เซนติเมตร

นั่นคือ ทรงกลมกลวงลูกเล็กจะมีรัศมีภายนอกยาว 2 เซนติเมตร

ให้ทรงกลมกลวงมีรัศมีภายในยาว  $x$  เซนติเมตร

จะได้ ปริมาตรของทรงกลมกลวงแต่ละลูก  $= \frac{4}{3}\pi(2^3) - \frac{4}{3}\pi(x^3)$

$= \frac{4}{3}\pi(8 - x^3)$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก ปริมาตรของทรงกลมกลวง 49 ลูก  $=$  ปริมาตรของลูกเหล็กทรงกลมตัน

จะได้  $49 \times \frac{4}{3}\pi(8 - x^3) = \frac{4}{3}\pi(7^3)$

$49(8 - x^3) = 7^3$

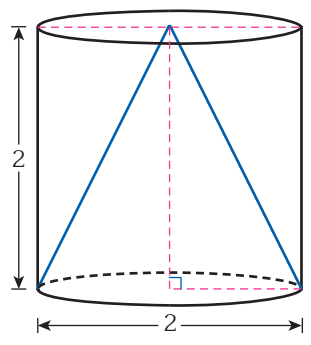
$x^3 = 1$

$x = 1$

ดังนั้น ทรงกลมกลวงลูกเล็กมีรัศมีภายในยาว 1 เซนติเมตร

นั่นคือ ทรงกลมกลวงลูกเล็กมีความหนา  $2 - 1 = 1$  เซนติเมตร

10. **แนวคิด**



ถ้านำแท่งไม้ทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 2 นิ้ว และสูง 2 นิ้ว มากลึงเป็นกรวยให้ได้ฐานกรวยใหญ่ที่สุดและมีความสูงมากที่สุด

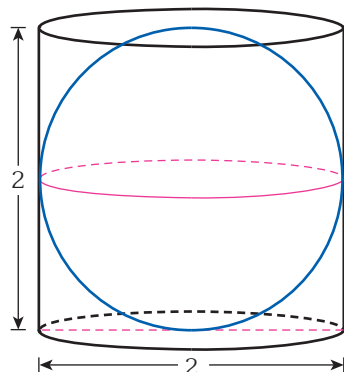
ดังนั้น ฐานของกรวยจะมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 2 นิ้ว และกรวยสูง 2 นิ้ว

นั่นคือ ฐานของกรวยนี้มีรัศมียาว 1 นิ้ว

จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย

ดังนั้น ปริมาตรของกรวยนี้  $= \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 2 = \frac{2}{3}\pi$  ลูกบาศก์นิ้ว

## 11. แนวคิด

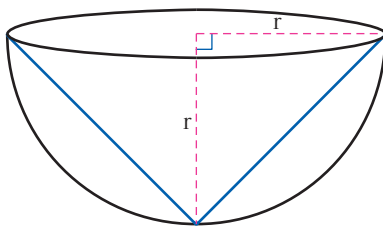


ถ้านำแท่งไม้ทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 2 นิ้ว และสูง 2 นิ้ว มากลึงเป็นทรงกลมที่มีขนาดใหญ่ที่สุด  
 ดังนั้น ทรงกลมจะมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 2 นิ้ว  
 นั่นคือ ทรงกลมนี้นี้มีรัศมียาว 1 นิ้ว

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น ปริมาตรของทรงกลมนี้} &= \frac{4}{3}\pi \times 1^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi \text{ ลูกบาศก์นิ้ว}\end{aligned}$$

## 12. แนวคิด



เนื่องจาก ชั้นน้ำครึ่งทรงกลมและกรวยกรอกน้ำมีเส้นผ่านศูนย์กลางของปากชั้นและปากกรวยเท่ากัน และ  
 ความสูงของกรวยกรอกน้ำ (ไม่นับส่วนที่ยื่นออกมาเป็นทรงกระบอก) เท่ากับรัศมีของชั้นน้ำ  
 ให้รัศมีของชั้นน้ำครึ่งทรงกลมายาว  $r$  หน่วย

จะได้ รัศมีของกรวยกรอกน้ำยาว  $r$  หน่วย และกรวยกรอกน้ำสูง  $r$  หน่วย

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม  $= \frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของทรงกลม

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ความจุของชั้นน้ำครึ่งทรงกลม} &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}\end{aligned}$$



จากสูตร ปริมาตรของกรวย  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย  
 จะได้ ความจุของกรวยกรอกน้ำ  $= \frac{1}{3}\pi r^2 \times r$   
 $= \frac{1}{3}\pi r^3$  ลูกบาศก์หน่วย

เนื่องจาก  $\frac{\text{ความจุของชั้นน้ำครึ่งทรงกลม}}{\text{ความจุของกรวยกรอกน้ำ}} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi r^3} = 2$

ดังนั้น ชั้นน้ำจุน้ำได้ 2 เท่าของกรวยกรอกน้ำ



## กิจกรรมท้ายบท : โรงงานช็อกโกแลตมหัศจรรย์

กิจกรรมนี้เป็นกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับการหาปริมาตรและพื้นที่ผิวของรูปเรขาคณิตสามมิติ ซึ่งได้แก่ กรวย ทรงกลม และพีระมิดปรกติ กิจกรรมนี้จะช่วยให้นักเรียนพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาและการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ โดยมีขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์



### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

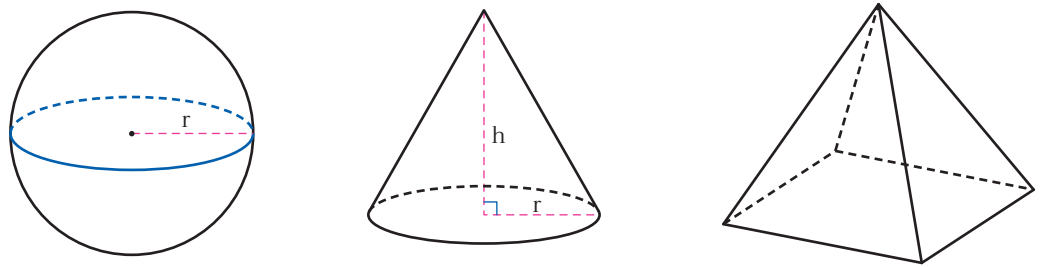
1. ครูแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4–5 คน ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำ “กิจกรรมท้ายบท : โรงงานช็อกโกแลตมหัศจรรย์” ในหนังสือเรียน หน้า 160
2. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอวิธีคิดและคำตอบที่ได้จากการทำกิจกรรม ซึ่งจะมีวิธีคิดและคำตอบที่หลากหลาย
3. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายผลที่ได้จากการทำกิจกรรมของนักเรียนในประเด็นต่อไปนี้
  - 1) คำตอบของคำถามแต่ละข้อมีหลากหลาย และแตกต่างกันตามเงื่อนไขของแต่ละกลุ่มกำหนด เช่น ปริมาตรของช็อกโกแลตเหลวที่ใช้ในแต่ละแบบ ขนาดของช็อกโกแลตแต่ละแบบ หรือจำนวนชิ้นที่กำหนด
  - 2) ปริมาตรของช็อกโกแลตที่เหลือน้อยที่สุดของแต่ละกลุ่ม อาจไม่ใช่ปริมาตรของช็อกโกแลตที่เหลือน้อยที่สุดในทางคณิตศาสตร์ แต่เป็นปริมาตรที่เหลือน้อยที่สุดภายใต้เงื่อนไขของแต่ละกลุ่มกำหนด และสอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดที่ว่า ปริมาตรและจำนวนชิ้นของแต่ละแบบต้องใกล้เคียงกัน
4. ครูอาจตั้งประเด็นคำถามเพิ่มเติมเพื่อให้นักเรียนร่วมกันคิดว่า จะมีวิธีอื่นใดนอกเหนือจากวิธีที่ใช้ในชั้นเรียนนี้ที่จะทำให้ปริมาตรของช็อกโกแลตที่เหลือน้อยกว่าปริมาตรของช็อกโกแลตของกลุ่มที่เหลือน้อยที่สุด และให้นักเรียนนำเสนอแนวคิดนั้น

# เฉลยกิจกรรมท้ายบท : โรงงานช็อกโกแลตมหัศจรรย์

คำตอบนี้เป็นเพียงตัวอย่างหนึ่งของคำตอบเท่านั้น นักเรียนสามารถแสดงคำตอบได้อย่างหลากหลาย ครูควรเน้นที่กระบวนการที่ได้มาของคำตอบและการให้เหตุผลของนักเรียน

ตัวอย่างแนวคิดและคำตอบ (กำหนด  $\pi \approx 3.14$ )

1. แนวคิด



เงื่อนไขของกิจกรรม คือ ต้องการช็อกโกแลตเหลว 1 ลิตร ใส่พิมพ์เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ ได้แก่ กรวย ทรงกลม และพีระมิดฐานปรกติ โดยแต่ละแบบจะต้องมีปริมาตรและจำนวนชั้นใกล้เคียงกัน และให้มีช็อกโกแลตเหลวเหลือน้อยที่สุด

เนื่องจาก 1 ลิตร เท่ากับ 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น ช็อกโกแลตแต่ละแบบจะมีปริมาตรประมาณ 333 ลูกบาศก์เซนติเมตร

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างทรงกลมและกรวย เมื่อกำหนดทรงกลมรัศมี  $r$  หน่วย และกำหนดรัศมีของฐานกรวยเท่ากับรัศมีของทรงกลม เพื่อหาความสูงของกรวย ( $h$ )

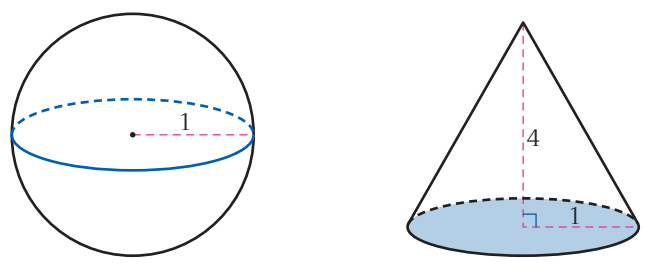
จากสูตร ปริมาตรของทรงกลมรัศมี  $r$  หน่วย เท่ากับ  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ลูกบาศก์หน่วย

และปริมาตรของกรวยที่ฐานมีรัศมี  $r$  หน่วย และสูง  $h$  หน่วย เท่ากับ  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$  ลูกบาศก์หน่วย

จะได้สมการเป็น  $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

นั่นคือ  $h = 4r$

ดังนั้น กรวยที่ฐานมีรัศมียาว  $r$  หน่วย จะมีปริมาตรเท่ากับทรงกลมที่มีรัศมี  $r$  หน่วย เมื่อกรวยสูงเป็น 4 เท่าของรัศมี ถ้าออกแบบให้แม่พิมพ์ทรงกลมมีรัศมี 1 เซนติเมตร จะได้ว่า ควรออกแบบให้แม่พิมพ์ที่เป็นกรวยมีรัศมีของฐาน 1 เซนติเมตร และสูง 4 เซนติเมตร ดังรูป



จะได้ว่า ปริมาตรของซ็อกโกแลตแบบทรงกลมและซ็อกโกแลตแบบกรวยแต่ละชิ้นจะเท่ากับ  $\frac{4}{3}\pi$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก ปริมาตรของซ็อกโกแลตแบบพีระมิดปกติจะต้องเท่ากับปริมาตรของซ็อกโกแลตแบบทรงกลม

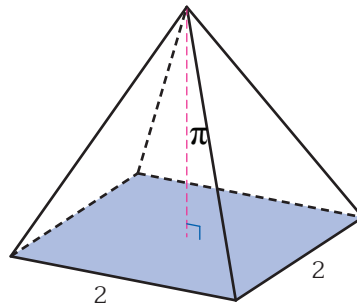
ดังนั้น ปริมาตรของซ็อกโกแลตแบบพีระมิดปกติมีปริมาตรเท่ากับ  $\frac{4}{3}\pi$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด =  $\frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

จะได้  $\frac{4}{3}\pi = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

$$\frac{1}{3} \times 4 \times \pi = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$$

ดังนั้น ควรออกแบบแม่พิมพ์เป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ฐานเท่ากับ 4 ตารางเซนติเมตร และสูง  $\pi$  เซนติเมตร ดังรูป



พิจารณาหาจำนวนชิ้นของซ็อกโกแลตแต่ละแบบ

ให้  $n$  แทนจำนวนชิ้นของซ็อกโกแลต

จะได้สมการเป็น  $\frac{4}{3} \times 3.14 \times n = 333$

$$n \approx 79.54$$

เนื่องจาก  $n$  แทนจำนวนชิ้นของซ็อกโกแลต ดังนั้น  $n$  จึงต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

ทำให้ได้ว่า จำนวนชิ้นของซ็อกโกแลตแต่ละแบบเท่ากับ 79 ชิ้น

ดังนั้น ปริมาตรของซ็อกโกแลตโดยรวมประมาณ  $3 \times 79 \times \frac{4}{3} \times 3.14 = 992.24$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

นั่นคือ จะเหลือซ็อกโกแลตประมาณ  $1,000 - 992.24 = 7.76$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

จากซ็อกโกแลตแต่ละแบบมีปริมาตรประมาณ  $\frac{4}{3} \times 3.14 \approx 4.19$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น จะสามารถผลิตซ็อกโกแลตแบบใดก็ได้อีก 1 ชิ้น

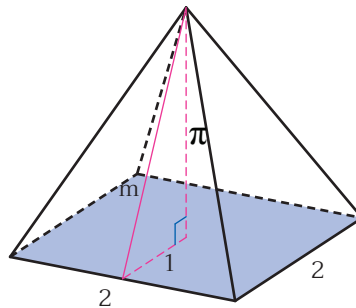
โดยผลิตซ็อกโกแลตแบบใดก็ได้ 80 ชิ้น และอีกสองแบบที่เหลือแบบละ 79 ชิ้น

จากสูตร พื้นที่ผิวของกรวย =  $\pi r \ell + \pi r^2$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานกรวย และ  $\ell$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย

จะได้ พื้นที่ผิวของซ็อกโกแลตกรวย  $\approx (3.14 \times 1 \times 4.12) + (3.14 \times 1^2) = 16.08$  ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น ซ็อกโกแลตกรวย 1 อัน มีพื้นที่ผิวประมาณ 16.08 ตารางเซนติเมตร

3) **แนวคิด** พื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีฐานยาวด้านละ 2 เซนติเมตร และมีความสูง  $\pi$  เซนติเมตร



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$m^2 \approx 3.14^2 + 1^2$$

$$\approx 10.8596$$

$$m \approx 3.30 \text{ เซนติเมตร}$$

จากสูตร พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ผิวข้าง + พื้นที่ฐาน

$$\text{จะได้} \quad \text{พื้นที่ผิวของพีระมิด} \approx 4 \times \left( \frac{1}{2} \times 2 \times 3.30 \right) + (2 \times 2)$$

$$\approx 17.20 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ดังนั้น ซ็อกโกแลตพีระมิด 1 อัน มีพื้นที่ผิวประมาณ 17.20 ตารางเซนติเมตร

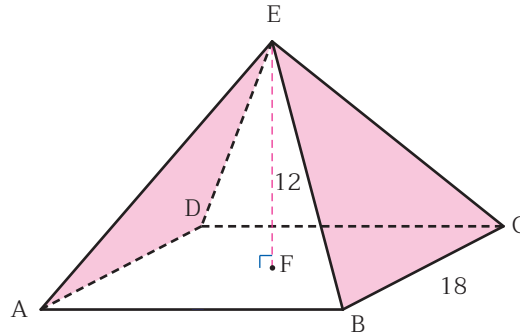
เนื่องจาก ซ็อกโกแลตแบบทรงกลมมีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด

ดังนั้น ถ้านำซ็อกโกแลตแต่ละชิ้นไปเคลือบด้วยคาราเมลที่มีความหนาเท่ากัน ซ็อกโกแลตแบบพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสจะใช้คาราเมลมากที่สุด และซ็อกโกแลตแบบทรงกลมจะใช้คาราเมลน้อยที่สุด

## ตัวอย่างแบบทดสอบท้ายบท

- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

5. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งสูง 12 เซนติเมตร มีพื้นที่ผิว 788 ตารางเซนติเมตร โดยหน้าหนึ่งของพีระมิดเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาว 18 เซนติเมตร และมีพื้นที่ 130 ตารางเซนติเมตร ดังรูป



- 1) ฐานของพีระมิดนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากชนิดใด (3 คะแนน)

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- 2) พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดเท่ากับเท่าไร (2 คะแนน)

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



6. ต้มใช้ขันน้ำครึ่งทรงกลมที่มีรัศมียาว 3 นิ้ว ตักน้ำใส่ลงในภาชนะ 2 แบบ ดังนี้
- ❖ แบบที่ 1 ภาชนะรูปกรวยที่มีรัศมีของฐานเท่ากับรัศมีของขันน้ำ แต่สูงเป็นสองเท่าของรัศมีของขันน้ำ
  - ❖ แบบที่ 2 ภาชนะรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีฐานยาวด้านละ 6 นิ้ว และสูงเป็นสี่เท่าของรัศมีของขันน้ำ
- จงหาจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดที่ใช้ขันนี้ตักน้ำใส่ภาชนะแต่ละแบบจนเต็มภาชนะ พร้อมทั้งแสดงวิธีคิด (6 คะแนน)

7. พระมณฑปประดิษฐานสี่เหลี่ยม มีผิวข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และฐานยาวด้านละ 12 เซนติเมตร พระมณฑปนี้มีพื้นที่ผิวเท่าใด (3 คะแนน)

8. กล่องใส่การบูรเหลวมีลักษณะเป็นพีระมิดปรกติฐานสี่เหลี่ยมที่มีความยาวรอบฐานเท่ากับ 16 เซนติเมตร และผิวข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ต้องเทการบูรเหลวลงในกล่องที่ลูกบาศก์เซนติเมตรจึงจะเต็มกล่องนี้พอดี (3 คะแนน)

9. แผ่นเหล็กตันแผ่นหนึ่งกว้าง 20 เซนติเมตร ยาว 55 เซนติเมตรหนา 3 เซนติเมตร สามารถนำมาหลอมให้เป็นที่ทับกระดาษรูปกรวยที่มีรัศมีของฐานยาว 3 เซนติเมตร ได้ 25 อัน โดยแต่ละอันมีความสูงเท่ากัน ถ้าต้องการออกแบบกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากสำหรับบรรจุที่ทับกระดาษรูปกรวยตั้งแต่ละอันเพื่อส่งไปจำหน่าย กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้ควรมีขนาดเท่าไร โดยความยาวฐานของกล่องมากกว่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานกรวยและมีความสูงของกล่องมากกว่าความสูงของกรวย 1 เซนติเมตร (กำหนด  $\pi \approx \frac{22}{7}$ ) (3 คะแนน)







## 3. กำหนดลักษณะ 3 แบบ ดังนี้

ลักษณะ A เป็นทรงกลมที่มีรัศมียาว  $r$  หน่วย

ลักษณะ B เป็นกรวยที่ฐานมีความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ  $2r$  หน่วย และสูง  $2r$  หน่วย

ลักษณะ C เป็นทรงกระบอกที่มีรัศมีของฐานยาว  $r$  หน่วย และสูง  $2r$  หน่วย

พิจารณาข้อความในแต่ละข้อต่อไปนี้ ถ้าเป็นจริงให้ทำเครื่องหมาย ✓ ในช่องเป็นจริง และถ้าเป็นเท็จให้ทำเครื่องหมาย ✗ ในช่องเป็นเท็จ (5 คะแนน)

| ข้อที่ | ข้อความ                                                                                       | เป็นจริง | เป็นเท็จ |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|
| 1)     | ลักษณะ C มีปริมาตรเป็นสามเท่าของลักษณะ B                                                      | ✓        |          |
| 2)     | อัตราส่วนของปริมาตรของลักษณะ A ต่อ ปริมาตรของลักษณะ B ต่อ ปริมาตรของลักษณะ C เป็น $2 : 1 : 3$ | ✓        |          |
| 3)     | ลักษณะ A มีพื้นที่ผิวมากกว่าลักษณะ C                                                          |          | ✓        |
| 4)     | พื้นที่ผิวของลักษณะ B เท่ากับ $(\sqrt{5} + 1)\pi r^2$ ตารางหน่วย                              | ✓        |          |
| 5)     | ถ้าเพิ่มความสูงของลักษณะ B อีกสองเท่า จะทำให้ลักษณะ B มีปริมาตรเท่ากับลักษณะ A                | ✓        |          |

**แนวคิด** 1) จากลักษณะ B เป็นกรวยที่ฐานมีความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ  $2r$  หน่วย และสูง  $2r$  หน่วย ดังนั้น ลักษณะ B เป็นกรวยที่มีรัศมีของฐานยาว  $r$  หน่วย

$$\text{จะได้ ปริมาตรของลักษณะ B} = \frac{1}{3}\pi r^2(2r) = \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

จากลักษณะ C เป็นทรงกระบอกที่มีรัศมีของฐานยาว  $r$  หน่วย และสูง  $2r$  หน่วย

$$\text{จะได้ ปริมาตรของลักษณะ C} = \pi r^2(2r) = 2\pi r^3 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \frac{\text{ปริมาตรของลักษณะ C}}{\text{ปริมาตรของลักษณะ B}} &= \frac{2\pi r^3}{\frac{2}{3}\pi r^3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น ลักษณะ C มีปริมาตรเป็นสามเท่าของลักษณะ B

2) จากลักษณะ A เป็นทรงกลมที่มีรัศมียาว  $r$  หน่วย

$$\text{จะได้ ปริมาตรของลักษณะ A} = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

จากปริมาตรของลักษณะ B และปริมาตรของลักษณะ C เท่ากับ  $\frac{2}{3}\pi r^3$  และ  $2\pi r^3$  ลูกบาศก์หน่วย ตามลำดับ

ดังนั้น อัตราส่วนของปริมาตรของลักษณะ A ต่อ ปริมาตรของลักษณะ B ต่อ ปริมาตรของลักษณะ C เป็น  $\frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3$  หรือ  $2 : 1 : 3$

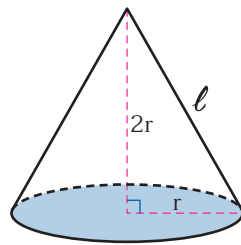


นั่นคือ อัตราส่วนของปริมาตรของภาชนะ A ต่อ ปริมาตรของภาชนะ B ต่อ ปริมาตรของภาชนะ C เป็น 2 : 1 : 3

$$\begin{aligned} 3) \quad \text{พื้นที่ผิวของภาชนะ A} &= 4\pi r^2 \text{ ตารางหน่วย} \\ \text{พื้นที่ผิวของภาชนะ C} &= \text{พื้นที่ผิวข้าง} + \text{พื้นที่ฐานทั้งสอง} \\ &= (2\pi r \times 2r) + 2\pi r^2 \\ &= 6\pi r^2 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

ดังนั้น ภาชนะ A มีพื้นที่ผิวน้อยกว่าภาชนะ C

4) วาดภาพแทนภาชนะ B ดังรูป



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad l^2 &= r^2 + (2r)^2 \\ &= 5r^2 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad l = \sqrt{5}r$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \text{พื้นที่ผิวของภาชนะ B} &= \pi r l + \pi r^2 \\ &= \pi r(\sqrt{5}r) + \pi r^2 \\ &= \sqrt{5}\pi r^2 + \pi r^2 \\ &= (\sqrt{5} + 1)\pi r^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของภาชนะ B เท่ากับ  $(\sqrt{5} + 1)\pi r^2$  ตารางหน่วย

5) ถ้าเพิ่มความสูงของภาชนะ B อีกสองเท่า แล้วภาชนะ B จะสูง  $2 \times 2r = 4r$  หน่วย

$$\text{จะได้} \quad \text{ปริมาตรของภาชนะ B} = \frac{1}{3}\pi r^2(4r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad \text{ปริมาตรของภาชนะ A} = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

ดังนั้น เมื่อเพิ่มความสูงของภาชนะ B อีกสองเท่า จะทำให้ภาชนะ B มีปริมาตรเท่ากับภาชนะ A

#### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 1 นักเรียนสามารถหาปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 5 คะแนน ข้อละ 1 คะแนน

ตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ

ได้ 0 คะแนน

4. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสสูง  $h$  เมตร ถ้าวัดความสูงจากฐานขึ้นไป  $\frac{h}{2}$  เมตร แล้วตัดยอดออกในแนวขนานกับฐาน ส่วนยอดที่ตัดออกเป็นพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความสูงเท่ากับ  $\frac{h}{2}$  เมตร พีระมิดใหม่ที่ได้มีปริมาตรเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ของปริมาตรของพีระมิดเดิม (1 คะแนน)
- ก. 12.5%                      ข. 15%                      ค. 16.5%                      ง. 20%

**แนวคิด** ให้แต่ละด้านของฐานของพีระมิดเดิยาว  $a$  เมตร

จะได้ แต่ละด้านของฐานของพีระมิดใหม่ที่เกิดจากการตัดยอดพีระมิดเดิยาว  $\frac{a}{2}$  เมตร

ดังนั้น พื้นที่ฐานของพีระมิดเดิมเท่ากับ  $a^2$  ตารางเมตร

และพื้นที่ฐานของพีระมิดใหม่ที่เกิดจากการตัดยอดพีระมิดเดิมเท่ากับ  $\left(\frac{a}{2}\right)^2$  ตารางเมตร

จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด  $= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง}$

จะได้ ปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเดิม  $= \frac{1}{3} \times a^2 \times h$

และ ปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสใหม่ที่เกิดจากการตัดยอดพีระมิดเดิม  $= \frac{1}{3} \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times \frac{h}{2}$

$$= \frac{1}{24} a^2 h$$

ดังนั้น ปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสใหม่ที่เกิดจากการตัดยอดพีระมิดเดิม คิดเป็น

$$\frac{\frac{1}{24} a^2 h}{\frac{1}{3} a^2 h} \times 100 = 12.5 \text{ เปอร์เซ็นต์ของปริมาตรของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสเดิม}$$

#### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 1 คะแนน

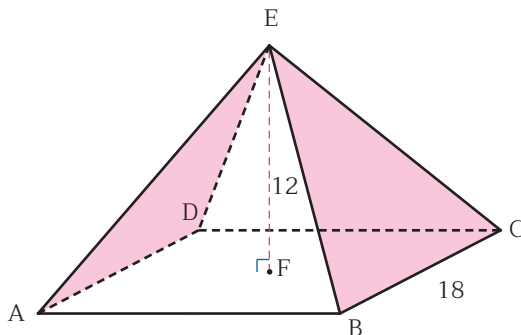
ตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

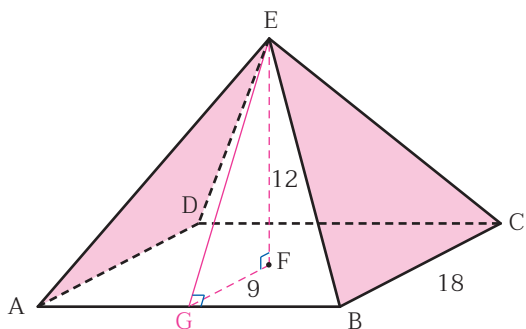
ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ

ได้ 0 คะแนน

5. พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งสูง 12 เซนติเมตร มีพื้นที่ผิว 788 ตารางเซนติเมตร โดยหน้าหนึ่งของพีระมิดเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาว 18 เซนติเมตร และมีพื้นที่ 130 ตารางเซนติเมตร ดังรูป



- 1) ฐานของพีระมิดนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากชนิดใด (3 คะแนน)  
แนวคิด



จากโจทย์  $EF = 12$  เซนติเมตร และ  $BC = 18$  เซนติเมตร  
จะได้  $GF = 9$  เซนติเมตร

พิจารณา  $\triangle EFG$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$EG^2 = 12^2 + 9^2$$

$$= 225$$

$$EG = 15$$

จาก พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง

$$\text{จะได้} \quad \text{พื้นที่ผิวของพีระมิด} = 18(AB) + \left[ 2(130) + 2\left(\frac{1}{2} \times AB \times 15\right) \right]$$

$$788 = 18(AB) + 260 + 15(AB)$$

$$528 = 33(AB)$$

$$AB = 16$$

ดังนั้น ฐานของพีระมิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

- 2) พื้นที่ผิวข้างของพีระมิดเท่ากับเท่าไร (2 คะแนน)

แนวคิด จาก พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด  $= 2\left[\frac{1}{2}(15)(16) + 130\right]$   
 $= 500$  ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด เท่ากับ 500 ตารางเซนติเมตร

หมายเหตุ ในการหาพื้นที่ผิวข้าง นักเรียนอาจหาได้จาก  
พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด = พื้นที่ผิว - พื้นที่ฐาน

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 5 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

ข้อ 1) คะแนนเต็ม 3 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

- ✧ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และหาคำตอบถูกต้อง ได้ 3 คะแนน
- ✧ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ✧ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ✧ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน ได้ 0 คะแนน

ข้อ 2) คะแนนเต็ม 2 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

- ✧ เขียนแสดงแนวคิด และหาคำตอบถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ✧ เขียนแสดงแนวคิดถูกต้อง แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ✧ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน ได้ 0 คะแนน

6. ต้มใช้ขันน้ำครึ่งทรงกลมที่มีรัศมียาว 3 นิ้ว ตักน้ำใส่ลงในภาชนะ 2 แบบ ดังนี้

- ✧ แบบที่ 1 ภาชนะรูปกรวยที่มีรัศมีของฐานเท่ากับรัศมีของขันน้ำ แต่สูงเป็นสองเท่าของรัศมีของขันน้ำนี้
  - ✧ แบบที่ 2 ภาชนะรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีฐานยาวด้านละ 6 นิ้ว และสูงเป็นสี่เท่าของรัศมีของขันน้ำนี้
- จงหาจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดที่ใช้ขันนี้ตักน้ำใส่ภาชนะแต่ละแบบจนเต็มภาชนะ พร้อมทั้งแสดงวิธีคิด (6 คะแนน)

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด} \quad \text{เนื่องจาก ความจุของขันครึ่งทรงกลม} &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{2}{3} \pi r^3 \quad \text{ลูกบาศก์นิ้ว} \end{aligned}$$

**พิจารณาภาชนะแบบที่ 1** ภาชนะรูปกรวยที่มีรัศมีของฐานเท่ากับรัศมีของขันน้ำ แต่สูงเป็นสองเท่าของรัศมีของขันน้ำนี้

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด 1} \quad \text{จำนวนครั้งในการตักน้ำ} &= \frac{\text{ความจุของภาชนะรูปกรวย}}{\text{ความจุของขันน้ำครึ่งทรงกลม}} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \pi r^2 (2r)}{\frac{2}{3} \pi r^3} \\ &= 1 \quad \text{ครั้ง} \end{aligned}$$

**แนวคิด 2** เนื่องจาก ภาชนะรูปกรวยมีรัศมีของฐานเท่ากับรัศมีของชั้นครึ่งทรงกลม และมีความสูงเป็นสองเท่าของรัศมีของชั้นครึ่งทรงกลม

ดังนั้น ความจุของชั้นน้ำและความจุของภาชนะรูปกรวย ต่างก็เป็นหนึ่งในสามของความจุของทรงกระบอกที่มีพื้นที่ฐานและความสูงเท่ากับภาชนะรูปกรวย  
จะได้ว่า ความจุของชั้นน้ำเท่ากับ ความจุของภาชนะรูปกรวย  
นั่นคือ ต้มใช้ชั้นน้ำตักน้ำเทใส่ภาชนะแบบที่ 1 เพียง 1 ครั้ง จะเต็มพอดี

**พิจารณาภาชนะแบบที่ 2** ภาชนะรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีฐานยาวด้านละ 6 นิ้ว และสูงเป็นสี่เท่าของรัศมีของชั้นน้ำ

จะได้ พีระมิดฐานนี้สูง  $4(3) = 12$  นิ้ว

$$\begin{aligned} \text{จำนวนครั้งในการตักน้ำ} &= \frac{\text{ความจุของภาชนะรูปพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส}}{\text{ความจุของชั้นน้ำครึ่งทรงกลม}} \\ &\approx \frac{\frac{1}{3}(6)^2(12)}{\frac{2}{3}(3.14)(3)^3} \\ &\approx 2.55 \end{aligned}$$

ดังนั้น ต้มใช้ชั้นน้ำตักน้ำเทใส่ภาชนะแบบที่ 2 จำนวน 3 ครั้ง จึงจะเต็มพอดี

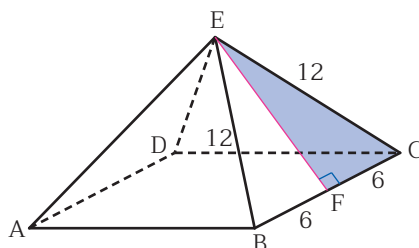
**ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน**

ข้อ 2 นักเรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลมในการแก้ปัญหา

|                                                                                            |                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| <b>เกณฑ์การให้คะแนน</b>                                                                    | คะแนนเต็ม 6 คะแนน ภาชนะแบบละ 3 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้ |
| ✦ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และหาคำตอบถูกต้อง                                                 | ได้ 3 คะแนน                                                       |
| ✦ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบถูกต้อง | ได้ 2 คะแนน                                                       |
| ✦ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง     | ได้ 1 คะแนน                                                       |
| ✦ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน                                      | ได้ 0 คะแนน                                                       |

7. พีระมิดปรกติฐานสี่เหลี่ยม มีผิวข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และฐานยาวด้านละ 12 เซนติเมตร พีระมิดนี้มีพื้นที่ผิวเท่าใด (3 คะแนน)

แนวคิด จากโจทย์ พีระมิดนี้มีผิวข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และฐานยาวด้านละ 12 เซนติเมตร ดังรูป



พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก CEF ที่มีมุม F เป็นมุมฉาก

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$\begin{aligned} EF^2 &= EC^2 - FC^2 \\ &= 12^2 - 6^2 \\ &= 108 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $EF = 6\sqrt{3}$

นั่นคือ รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีความสูง  $6\sqrt{3}$  เซนติเมตร

จาก พื้นที่ผิวของพีระมิด = พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ พื้นที่ผิวของพีระมิด} &= (12 \times 12) + 4\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 6\sqrt{3}\right) \\ &= 144 + 144\sqrt{3} \\ &= 144(1 + \sqrt{3}) \text{ ตารางเซนติเมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้น พีระมิดนี้มีพื้นที่ผิวเท่ากับ  $144(1 + \sqrt{3})$  ตารางเซนติเมตร

หมายเหตุ ในการหาพื้นที่ผิวข้าง นักเรียนอาจใช้ความรู้เรื่องพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

$$\text{จากสูตร พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{ความยาวของด้าน}^2$$

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

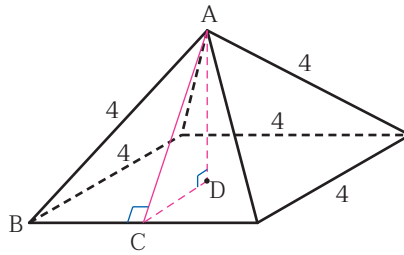
ข้อ 1 นักเรียนสามารถหาปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 3 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

- |                                                       |             |
|-------------------------------------------------------|-------------|
| ✦ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และหาคำตอบถูกต้อง            | ได้ 3 คะแนน |
| ✦ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง         |             |
| หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบถูกต้อง          | ได้ 2 คะแนน |
| ✦ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง         |             |
| หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง              | ได้ 1 คะแนน |
| ✦ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน | ได้ 0 คะแนน |

8. กล่องใส่การบูรเหลวมีลักษณะเป็นพีระมิดปรกติฐานสี่เหลี่ยมที่มีความยาวรอบฐานเท่ากับ 16 เซนติเมตร และผิวข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ต้องเทการบูรเหลวลงในกล่องกี่ลูกบาศก์เซนติเมตรจึงจะเต็มกล่องนี้พอดี (3 คะแนน)

แนวคิด จากโจทย์ พีระมิดปรกติฐานสี่เหลี่ยม คือ พีระมิดตรงฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีความยาวรอบฐานเท่ากับ 16 เซนติเมตร  
นั่นคือ แต่ละด้านยาว 4 เซนติเมตร และผิวข้างเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  
ดังนั้น สันของพีระมิดยาว 4 เซนติเมตร แสดงได้ดังรูป



พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACB ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก จะได้ BC เท่ากับ 2 เซนติเมตร

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 - BC^2 \\ &= 4^2 - 2^2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $AC = 2\sqrt{3}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC ที่มีมุม D เป็นมุมฉาก จะได้ CD เท่ากับ 2 เซนติเมตร

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 - CD^2 \\ &= 12 - 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $AD = 2\sqrt{2}$

นั่นคือ กล่องพีระมิดมีความสูงเท่ากับ  $2\sqrt{2}$  เซนติเมตร

เนื่องจาก การบูรเหลวที่จะเทลงในกล่อง จะเท่ากับปริมาตรของกล่องพีระมิด

$$\begin{aligned} \text{จะได้ การบูรเหลวที่จะเทลงในกล่อง} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐานของพีระมิด} \times \text{ความสูงของพีระมิด} \\ &= \frac{1}{3} \times 4^2 \times 2\sqrt{2} \\ &= \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้น ต้องเทการบูรเหลวลงในกล่อง  $\frac{32\sqrt{2}}{3}$  ลูกบาศก์เซนติเมตร จึงจะเต็มกล่องนี้พอดี

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 3 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

- ✦ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และหาคำตอบถูกต้อง ได้ 3 คะแนน
- ✦ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ✦ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ✦ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน ได้ 0 คะแนน

9. แผ่นเหล็กตันแผ่นหนึ่งกว้าง 20 เซนติเมตร ยาว 55 เซนติเมตร หนา 3 เซนติเมตร สามารถนำมาหลอมให้เป็นที่ทับกระดาษรูปกรวยที่มีรัศมีของฐานยาว 3 เซนติเมตร ได้ 25 อัน โดยแต่ละอันมีความสูงเท่ากัน ถ้าต้องการออกแบบกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากสำหรับบรรจุที่ทับกระดาษรูปกรวยตั้งแต่ละอันเพื่อส่งไปจำหน่าย กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้ควรมีขนาดเท่าไร โดยความยาวฐานของกล่องมากกว่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานกรวยและมีความสูงของกล่องมากกว่าความสูงของกรวย 1 เซนติเมตร (กำหนด  $\pi \approx \frac{22}{7}$ ) (3 คะแนน)

**แนวคิด** พิจารณาปริมาตรของแผ่นเหล็กตันกว้าง 20 เซนติเมตร ยาว 55 เซนติเมตร หนา 3 เซนติเมตร

จะได้ ปริมาตรของแผ่นเหล็กตันเท่ากับ  $20 \times 55 \times 3 = 3,300$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

เนื่องจาก นำแผ่นเหล็กตันมาทำเป็นที่ทับกระดาษรูปกรวยที่มีรัศมีของฐานยาว 3 เซนติเมตร ได้ 25 อัน

จะได้ ปริมาตรของที่ทับกระดาษรูปกรวยแต่ละอัน  $= \frac{3,300}{25} = 132$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

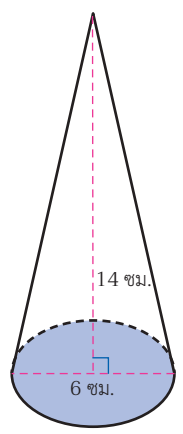
เนื่องจาก ปริมาตรของกรวย 1 อัน  $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$  เมื่อ  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย และ  $h$  แทนความสูงของกรวย

จะได้  $132 \approx \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3^2 \times h$

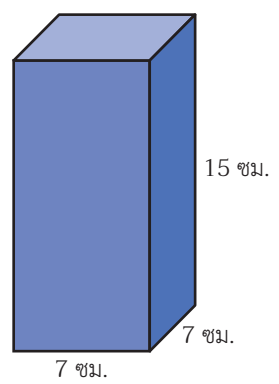
$h \approx 14$

ดังนั้น ที่ทับกระดาษรูปกรวยแต่ละอันจะมีรัศมีของฐานยาว 3 เซนติเมตร และสูง 14 เซนติเมตร ดังรูป





เนื่องจาก ต้องการทำกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากสำหรับบรรจุที่ทับกระดาษรูปกรวยต้นนี้ ให้ความยาว  
ฐานของกล่องมากกว่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานของกรวย และมีความสูง  
ของกล่องมากกว่าความสูงของกรวย 1 เซนติเมตร  
ดังนั้น กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้ต้องมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ  $6 + 1 = 7$  เซนติเมตร  
และสูง  $14 + 1 = 15$  เซนติเมตร ดังรูป



ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม  
ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 3 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

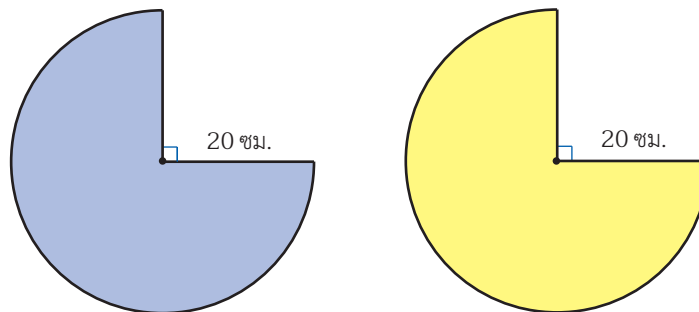
- |                                                                                               |             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| ✦ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และหาคำตอบถูกต้อง                                                    | ได้ 3 คะแนน |
| ✦ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง<br>หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบถูกต้อง | ได้ 2 คะแนน |
| ✦ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง<br>หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง     | ได้ 1 คะแนน |
| ✦ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน                                         | ได้ 0 คะแนน |

10. ครอบครัวของน้ำต้องการฉลองวันเกิดให้กับน้องเหนื่อ โดยพื่อน้ำอาสา  
ทำหมวกให้ทุกคนในครอบครัว พื่อน้ำจึงวัดความยาวรอบศีรษะของทุกคน  
ซึ่งได้ข้อมูลมาดังตาราง



| ชื่อ                  | น้องเหนื่อ | พื่อน้ำ | แม่นุ่น | พ่อนนท์ |
|-----------------------|------------|---------|---------|---------|
| ความยาวรอบศีรษะ (ซม.) | 35         | 42      | 49      | 56      |

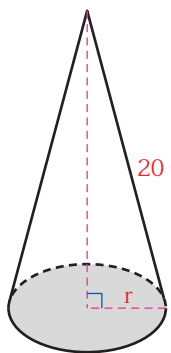
พื่อน้ำทำหมวกจากกระดาษเหลือใช้ที่มีขนาดดังรูป



พื่อน้ำทำหมวกให้ทุกคน โดยตัดกระดาษตามแนวรัศมี แล้วนำมาประกอบเป็นกรวย จึงตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมแสดง  
แนวคิด (กำหนด  $\pi \approx \frac{22}{7}$ )

- 1) กระดาษที่นำมาใช้ทำหมวกสำหรับทุกคน เพียงพอหรือไม่ ถ้าเพียงพอ จะเหลือกระดาษที่มีพื้นที่ประมาณ  
เท่าไร แต่ถ้าไม่เพียงพอจะขาดกระดาษที่มีพื้นที่ประมาณเท่าไร (3 คะแนน)

**แนวคิด 1** พิจารณาจากพื้นที่ผิวข้าง



กระดาษที่ใช้ทำหมวกของน้องเหนื่อ มีความยาวของส่วนโค้งของวงกลม 35 เซนติเมตร

ให้  $r$  แทนรัศมีของฐานของกรวย ซึ่งเป็นหมวกน้องเหนื่อ

$$\text{จะได้ } 2\pi r = 35$$

$$r = \frac{35}{2\pi}$$

ดังนั้น รัศมีของฐานหมวกของน้องเหนื่อยาว  $\frac{35}{2\pi}$  เซนติเมตร

ในทำนองเดียวกัน จะได้ รัศมีของฐานของหมวกของแต่ละคนในบ้าน เป็นดังนี้

| ชื่อ                                  | น้องเหนือ         | พี่น้ำ           | แม่นุ่น           | พ่อนนท์          |
|---------------------------------------|-------------------|------------------|-------------------|------------------|
| ความยาวรอบศีรษะ (ซม.)                 | 35                | 42               | 49                | 56               |
| รัศมีของฐานของหมวก<br>โดยประมาณ (ซม.) | $\frac{35}{2\pi}$ | $\frac{21}{\pi}$ | $\frac{49}{2\pi}$ | $\frac{28}{\pi}$ |

จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของกรวย =  $\pi r l$  เมื่อ  $l$  แทนส่วนสูงเอียงของกรวย

จะได้ พื้นที่ผิวข้างของหมวกของน้องเหนือ =  $\pi \times \frac{35}{2\pi} \times 20$   
= 350 ตารางเซนติเมตร

ในทำนองเดียวกัน จะได้ พื้นที่ผิวข้างของหมวกของแต่ละคนในบ้าน เป็นดังนี้

| ชื่อ                                        | น้องเหนือ         | พี่น้ำ           | แม่นุ่น           | พ่อนนท์          |
|---------------------------------------------|-------------------|------------------|-------------------|------------------|
| ความยาวรอบศีรษะ (ซม.)                       | 35                | 42               | 49                | 56               |
| รัศมีของฐานของหมวก<br>โดยประมาณ (ซม.)       | $\frac{35}{2\pi}$ | $\frac{21}{\pi}$ | $\frac{49}{2\pi}$ | $\frac{28}{\pi}$ |
| พื้นที่ผิวข้างของหมวก<br>โดยประมาณ (ตร.ซม.) | 350               | 420              | 490               | 560              |

เนื่องจาก กระดาษแต่ละแผ่นมีพื้นที่ =  $\frac{3}{4}\pi r^2$   
=  $\frac{3}{4} \times \frac{22}{7} \times 20^2$   
 $\approx 942.86$  ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น หมวกของพ่อนนท์จะต้องใช้กระดาษแผ่นเดียวกับน้องเหนือ

คิดเป็นพื้นที่  $560 + 350 = 910$  ตารางเซนติเมตร

(หมวกของพ่อนนท์ไม่สามารถใช้กระดาษแผ่นเดียวกับพี่น้ำหรือแม่นุ่นได้ เพราะผลบวกของพื้นที่ผิวข้างของหมวกของทั้งสองคนเกินกระดาษที่มี)

และกระดาษอีกแผ่นหนึ่งใช้ทำหมวกให้แม่นุ่นและพี่น้ำคิดเป็นพื้นที่  $490 + 420$

= 910 ตารางเซนติเมตร

ดังนั้น กระดาษที่เหลือมีพื้นที่ประมาณ  $2(942.86 - 910) = 65.72$  ตารางเซนติเมตร

นั่นคือ กระดาษที่นำมาใช้ทำหมวกเพียงพอสำหรับทุกคน และเหลือกระดาษที่มีพื้นที่

65.72 ตารางเซนติเมตร

**แนวคิด 2** เปรียบเทียบความยาวรอบศีรษะกับความยาวของเส้นรอบวงของกระดาษ

$$\begin{aligned}\text{ความยาวของเส้นรอบวงของกระดาษแต่ละแผ่น} &= \frac{3}{4}(2\pi r) \text{ เมื่อ } r \text{ แทนรัศมีของวงกลม} \\ &\approx \frac{3}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 20 \\ &\approx 94.29 \text{ เซนติเมตร}\end{aligned}$$

ถ้าหมวกของพ่อนนท์กับน้องเหนือใช้กระดาษแผ่นเดียวกัน จะสามารถใช้กระดาษสี่ใต้อีกหนึ่งหมวกพอดี เพราะความยาวรอบศีรษะของทั้งสองคน รวมกันได้  $56 + 35 = 91$  เซนติเมตร

(หมวกของพ่อนนท์ไม่สามารถใช้กระดาษแผ่นเดียวกับพี่น้องได้ เพราะผลบวกของความยาวรอบศีรษะของทั้งสองคนเกินกระดาษที่มี)

และกระดาษอีกสี่หนึ่งทำหมวกให้แม่หนุนกับพี่น้องได้

เนื่องจาก ความยาวรอบศีรษะของทั้งสองคน รวมกันได้  $49 + 42 = 91$  เซนติเมตร

และเหลือความยาวของส่วนโค้งของวงกลมอีกประมาณ  $2(94.29 - 91) = 6.58$  เซนติเมตร

$$\begin{aligned}\text{เนื่องจาก ความยาวเส้นรอบวงของวงกลม} &= 2\pi r \text{ เมื่อ } r \text{ แทนรัศมีของวงกลม} \\ &= 2 \times \pi \times 20 \\ &= 40\pi \text{ เซนติเมตร}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น กระดาษส่วนที่เหลือมีพื้นที่} &= \frac{6.58}{40\pi} \pi r^2 \\ &= \frac{6.58}{40\pi} \pi (20)^2 \\ &= 65.8 \text{ ตารางเซนติเมตร}\end{aligned}$$

นั่นคือ กระดาษที่นำมาใช้ทำหมวกเพียงพอสำหรับทุกคน และเหลือกระดาษที่มีพื้นที่ 65.8 ตารางเซนติเมตร

2) ใครบ้างที่ได้หมวกสี่เดียวกัน (1 คะแนน)

พ่อนนท์ได้หมวกสี่เดียวกันกับน้องเหนือ และแม่หนุนได้หมวกสี่เดียวกันกับพี่น้อง

ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

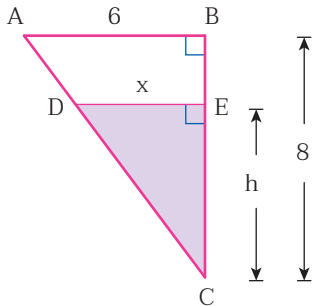
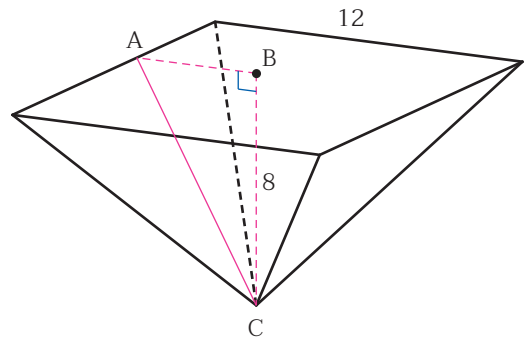
ข้อ 2 นักเรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 4 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

- ข้อ 1) คะแนนเต็ม 3 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้
- |                                                                                            |             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| ✿ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และหาคำตอบถูกต้อง                                                 | ได้ 3 คะแนน |
| ✿ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบถูกต้อง | ได้ 2 คะแนน |
| ✿ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง     | ได้ 1 คะแนน |
| ✿ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน                                      | ได้ 0 คะแนน |
- ข้อ 2) คะแนนเต็ม 1 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้
- |                                   |             |
|-----------------------------------|-------------|
| ✿ สรุปคำตอบได้ถูกต้อง             | ได้ 1 คะแนน |
| ✿ สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่สรุป | ได้ 0 คะแนน |

11. แบนต้องการหล่อเทียนลงในแบบหล่อเทียนที่มีลักษณะเป็นพีระมิด ฐานภายในเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 12 เซนติเมตร สูงภายใน 8 เซนติเมตร ในการหล่อเทียนครั้งนี้ จะใช้เทียนมาผสม 2 สี และเทียนแต่ละเล่มจะต้องใช้เทียนแต่ละสีปริมาตรเท่ากัน ถ้าแบนเทเทียนสีแรกลงไปแบบหล่อเทียนให้สูงจากยอด 5 เซนติเมตร อยากทราบว่า แบนจะได้เทียนตามที่ต้องการหรือไม่ ถ้าไม่ได้ จงหาว่าแบนจะต้องเทเทียนสีแรกสูงประมาณเท่าใด จึงจะทำให้ปริมาตรของเทียนแต่ละสีเท่ากัน (กำหนด  $\sqrt[3]{4} \approx 1.6$  และ  $\sqrt[3]{2} \approx 1.25$ ) (7 คะแนน)

แนวคิด



เนื่องจาก แบบหล่อเทียนมีลักษณะเป็นพีระมิด ที่มีฐานภายในเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 12 เซนติเมตร สูงภายใน 8 เซนติเมตร

$$\begin{aligned}\text{จะได้ ความจุของแบบหล่อเทียน} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐานของพีระมิด} \times \text{ความสูงของพีระมิด} \\ &= \frac{1}{3} \times 12^2 \times 8 \\ &= 384 \quad \text{ลูกบาศก์เซนติเมตร}\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น ปริมาตรของเทียนแต่ละสีที่ต้องใช้} = \frac{384}{2} = 192 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

พิจารณา  $\triangle ABC$  และ  $\triangle DEC$

ให้  $h$  แทนความสูงของเทียนสีแรกที่สูงในแบบหล่อเทียน

และ  $x$  แทนครึ่งหนึ่งของความยาวของฐานของพีระมิดที่ได้จากการทเทเทียนสีแรก

เนื่องจาก  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad \frac{x}{6} &= \frac{h}{8} \\ x &= \frac{3}{4}h \quad \text{_____ ①}\end{aligned}$$

เนื่องจาก ปริมาตรของเทียนสีแรก  $= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐานของพีระมิด} \times \text{ความสูงของพีระมิด}$

$$\text{จะได้} \quad 192 = \frac{1}{3} \times (2x)^2 \times h \quad \text{_____ ②}$$

แทน  $x$  ด้วย  $\frac{3}{4}h$  ในสมการ ② จะได้

$$192 = \frac{1}{3} \times \left(2 \times \frac{3}{4}h\right)^2 \times h$$

$$192 = \frac{3}{4}h^3$$

$$h^3 = 256$$

$$h = 4 \times \sqrt[3]{4}$$

$$\approx 4 \times 1.6$$

$$\approx 6.4$$

ดังนั้น เทียนสีแรกสูงประมาณ 6.4 เซนติเมตร

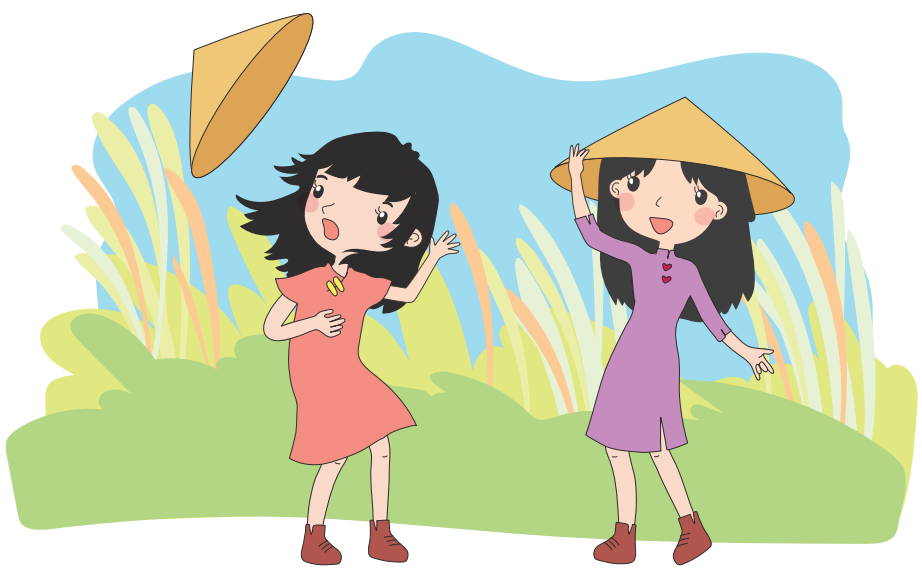
ถ้าแบบทเทเทียนสีแรกลงไปแบบหล่อเทียนให้สูงจากยอด 5 เซนติเมตร จะไม่สามารถได้เทียนตามที่ต้องการ นั่นคือ แบบจะต้องทเทเทียนสีแรกสูงประมาณ 6.4 เซนติเมตร จึงจะทำให้ปริมาตรของเทียนแต่ละสีเท่ากัน

ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด กรวย และทรงกลม ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 7 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

|           |                                                                                            |             |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| ส่วนที่ 1 | การหาปริมาตรของเทียนแต่ละสี                                                                |             |
|           | ✦ เขียนแสดงแนวคิด และหาคำตอบถูกต้อง                                                        | ได้ 2 คะแนน |
|           | ✦ เขียนแสดงแนวคิดถูกต้อง แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง     | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✦ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน                                      | ได้ 0 คะแนน |
| ส่วนที่ 2 | การหาความสูงของเทียนสีแรก                                                                  |             |
|           | ✦ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และหาคำตอบถูกต้อง                                                 | ได้ 3 คะแนน |
|           | ✦ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบถูกต้อง | ได้ 2 คะแนน |
|           | ✦ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง     | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✦ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน                                      | ได้ 0 คะแนน |
| ส่วนที่ 3 | การสรุปคำตอบ                                                                               |             |
|           | ✦ สรุปคำตอบถูกต้องครบถ้วน                                                                  | ได้ 2 คะแนน |
|           | ✦ สรุปคำตอบถูกต้องบางส่วน                                                                  | ได้ 1 คะแนน |
|           | ✦ สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่สรุป                                                          | ได้ 0 คะแนน |



| บทที่                                                                             | 4 | ความน่าจะเป็น                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------|
|  |   | ในบทความน่าจะเป็นนี้ ประกอบด้วยหัวข้อย่อย ดังต่อไปนี้                             |
|                                                                                   |   | <div>4.1 โอกาสของเหตุการณ์ 2 ชั่วโมง</div> <div>4.2 ความน่าจะเป็น 6 ชั่วโมง</div> |



### สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 3 สถิติและความน่าจะเป็น

มาตรฐาน ค 3.2 เข้าใจหลักการนับเบื้องต้น ความน่าจะเป็น และนำไปใช้



### ตัวชี้วัด

เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่มและนำผลที่ได้ไปหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์



### จุดประสงค์ของบทเรียน

นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่าเหตุการณ์ที่กำหนดให้มีโอกาสเกิดขึ้นมากหรือน้อย
2. หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้
3. นำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้ในการแก้ปัญหา



### ความเชื่อมโยงระหว่างตัวชี้วัดกับจุดประสงค์ของบทเรียน

เนื่องจากตัวชี้วัดนี้ กล่าวถึงการเข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่มและนำผลที่ได้ไปหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ ดังนั้น เพื่อให้การเรียนรู้ของนักเรียนในเรื่องความน่าจะเป็นสอดคล้องกับตัวชี้วัด ครูควรจัดประสบการณ์ให้นักเรียนสามารถ

1. เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม สะท้อนได้จากการที่นักเรียนสามารถบอก อธิบาย หรือเปรียบเทียบโอกาสการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้ รวมทั้งสามารถอธิบายเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม และระบุผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองสุ่ม



2. นำผลที่ได้จากการทดลองสุ่มไปใช้ในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สะท้อนได้จากการที่นักเรียนสามารถนำความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่มไปใช้ในการหาผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดจากการทดลองสุ่ม การหาผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่สนใจ และการหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ รวมถึงนำความรู้เกี่ยวกับการหาความน่าจะเป็นไปใช้ในการแก้ปัญหา

 **ความคิดรวบยอดของบทเรียน**

ความน่าจะเป็น เป็นจำนวนที่ใช้เพื่อบอกโอกาสที่เหตุการณ์หนึ่ง ๆ จะเกิดขึ้น ซึ่งมี 3 ลักษณะ คือ ไม่เกิดขึ้นอย่างแน่นอน จะมีค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ 0 อาจเกิดขึ้นหรือไม่ก็ได้ จะมีค่าความน่าจะเป็นอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 และเกิดขึ้นอย่างแน่นอน จะมีค่าความน่าจะเป็นเท่ากับ 1 ทั้งนี้ ในการบอกค่าความน่าจะเป็นอาจเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วน ทศนิยม หรือร้อยละ เราสามารถใช้ความน่าจะเป็นช่วยในการคาดการณ์ สร้างข้อสรุป และตัดสินใจแก้ปัญหา

 **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์**

| ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์            | 4.1<br>โอกาสของเหตุการณ์ | 4.2<br>ความน่าจะเป็น | กิจกรรมท้ายบท/<br>แบบฝึกหัดท้ายบท |
|-------------------------------------------|--------------------------|----------------------|-----------------------------------|
| การแก้ปัญหา                               | ✱                        | ✱                    | ✱                                 |
| การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ |                          | ✱                    |                                   |
| การเชื่อมโยง                              |                          |                      | ✱                                 |
| การให้เหตุผล                              | ✱                        |                      | ✱                                 |
| การคิดสร้างสรรค์                          |                          |                      |                                   |

## ความเชื่อมโยงของความรู้

### ความรู้พื้นฐาน

- ❖ การใช้เศษส่วนในการสื่อความหมายและเปรียบเทียบเศษส่วน เพื่อเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้ความหมายของความน่าจะเป็น และเปรียบเทียบค่าของความน่าจะเป็น
- ❖ การเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปเปอร์เซ็นต์ เพื่อใช้ในการสื่อความหมายของค่าความน่าจะเป็นในหลากหลายรูปแบบ

### ความรู้ ในบทเรียน

- ❖ โอกาสที่เหตุการณ์หนึ่ง ๆ จะเกิดขึ้นนั้น เป็นไปได้ 3 ลักษณะ คือ เกิดขึ้นอย่างแน่นอน หรือ อาจเกิดขึ้นหรือไม่ก็ได้ หรือ ไม่เกิดขึ้นอย่างแน่นอน อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว
- ❖ การกระทำที่ไม่สามารถบอกล่วงหน้าได้แน่นอนว่า ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการกระทำจะเป็นอะไร แต่สามารถบอกได้ว่ามีผลลัพธ์อะไรบ้างที่เกิดขึ้นได้ เรียกว่า การทดลองสุ่ม
- ❖ เหตุการณ์ คือ สิ่งที่น่าสนใจจะพิจารณาจากการทดลองสุ่ม และผลลัพธ์ทั้งหมดของสิ่งที่สนใจที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม เรียกว่า ผลลัพธ์ของเหตุการณ์
- ❖ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ หาได้จาก
 
$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์} = \frac{\text{จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์}}{\text{จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม}}$$
 เมื่อผลลัพธ์แต่ละแบบที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน
- ❖ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หนึ่ง ๆ จะเป็นจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 แต่ไม่เกิน 1

### ความรู้ในอนาคต

การหาผลลัพธ์ของเหตุการณ์จากการทดลองสุ่มหนึ่ง ๆ เป็นความรู้พื้นฐานในการเรียนเรื่องหลักการนับ ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่มีเงื่อนไขมากขึ้น

### ลำดับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของบทเรียน



## 4.1 โอกาสของเหตุการณ์ (2 ชั่วโมง)

### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถบอก อธิบาย หรือเปรียบเทียบโอกาสการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้

### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

-

### สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

-

### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องโอกาสของเหตุการณ์ ซึ่งเน้นให้นักเรียนได้วิเคราะห์สถานการณ์หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตจริงที่สื่อความหมายเกี่ยวกับโอกาสของเหตุการณ์ และใช้ความรู้สึกเชิงจำนวนในการอธิบายโอกาสการเกิดขึ้นของเหตุการณ์นั้น ๆ รวมถึงใช้โอกาสของเหตุการณ์ในการคาดการณ์ สร้างข้อสรุป และตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล ดังนั้น ครูจึงควรฝึกให้นักเรียนได้วิเคราะห์สถานการณ์หรือเหตุการณ์ที่หลากหลาย และต่างบริบทกัน เพื่อให้การเรียนรู้ของนักเรียนเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

1. ครูและนักเรียนสนทนาเกี่ยวกับข้อความ หรือคำพูดต่าง ๆ ในชีวิตจริงที่มีคำสำคัญซึ่งบ่งบอกถึงแนวโน้มหรือโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์นั้น ๆ ขึ้น ว่ามีมากหรือน้อยเพียงใด เพื่อนำไปสู่การอภิปรายถึงความหมายของโอกาสของเหตุการณ์ รวมถึงความเข้าใจเกี่ยวกับโอกาสของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอย่างแน่นอน หรือ อาจจะเกิดขึ้นหรือไม่ก็ได้ หรือ ไม่เกิดขึ้นอย่างแน่นอน โดยใช้สถานการณ์การไขตู้ลูกอมและข้อคำถามจากตารางในหนังสือเรียน หน้า 168 ประกอบ



ตู้ที่ 1 มีลูกอม 30 เม็ด  
เป็นสีฟ้าทั้งหมด



ตู้ที่ 2 มีลูกอม 50 เม็ด  
เป็นสีแดงทั้งหมด



ตู้ที่ 3 มีลูกอม 40 เม็ด  
เป็นสีฟ้า 25 เม็ด และสีแดง 15 เม็ด

โอกาสการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ในแต่ละข้อเป็นดังนี้

| ข้อที่ | เหตุการณ์                        | โอกาสของเหตุการณ์   |                           |                        |
|--------|----------------------------------|---------------------|---------------------------|------------------------|
|        |                                  | เกิดขึ้นอย่างแน่นอน | อาจจะเกิดขึ้นหรือไม่ก็ได้ | ไม่เกิดขึ้นอย่างแน่นอน |
| 1      | ป๋องไขได้ลูกอมสีฟ้าจากตู้ที่ 1   | ✓                   |                           |                        |
| 2      | พลอยไขได้ลูกอมสีขาวจากตู้ที่ 2   |                     |                           | ✓                      |
| 3      | ผิงไขได้ลูกอมสีแดงจากตู้ที่ 3    |                     | ✓                         |                        |
| 4      | ฮอมไขได้ลูกอมสีแดงจากตู้ที่ 1    |                     |                           | ✓                      |
| 5      | หวานไขได้ลูกอมสีแดงจากตู้ที่ 2   | ✓                   |                           |                        |
| 6      | ปรางไขได้ลูกอมสีฟ้าจากตู้ที่ 3   |                     | ✓                         |                        |
| 7      | ป๋องไขได้ลูกอมสีเขียวจากตู้ที่ 3 |                     |                           | ✓                      |

- จากตาราง ครูควรชี้ให้นักเรียนเห็นว่าโอกาสที่เหตุการณ์หนึ่ง ๆ จะเกิดขึ้น เป็นไปได้ 3 ลักษณะ คือ เกิดขึ้นอย่างแน่นอน หรือ อาจจะเกิดขึ้นหรือไม่ก็ได้ หรือ ไม่เกิดขึ้นอย่างแน่นอน อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น
2. ครูควรให้นักเรียนได้ฝึกนำความรู้เรื่องโอกาสของเหตุการณ์มาใช้ในการคาดการณ์ สร้างข้อสรุป และตัดสินใจจากข้อมูลหรือสถานการณ์ที่มีความเหมาะสม เช่น ขวณคิด 4.1 ในหนังสือเรียน หน้า 168 ข้อมูลเกี่ยวกับขยะทะเลในหนังสือเรียน หน้า 169–170 หรือแบบฝึกหัด 4.1 ในหนังสือเรียน หน้า 170–172



## เฉลยชวนคิด



ipst.me/11438

### ชวนคิด 4.1

1. ตู้ที่ 1
2. ตู้ที่ 1 ได้ลูกอมสีฟ้าทั้งสามเม็ด  
ตู้ที่ 2 ได้ลูกอมสีแดงทั้งสามเม็ด  
ตู้ที่ 3 คำตอบมีได้หลากหลาย ได้แก่
  - ❖ ได้ลูกอมสีฟ้าทั้งสามเม็ด
  - ❖ ได้ลูกอมสีฟ้า 2 เม็ด สีแดง 1 เม็ด
  - ❖ ได้ลูกอมสีฟ้า 1 เม็ด สีแดง 2 เม็ด
  - ❖ ได้ลูกอมสีแดงทั้งสามเม็ด

## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 4.1

#### สถานการณ์ที่ 1

- 1) ไม่ใช่ เพราะในกล่องที่มีลูกปิงปองสีเหลืองและสีชมพูอยู่ด้วย  
ดังนั้น คาวูดจึงมีโอกาสหยิบได้ลูกปิงปองสีเหลือง หรือสีชมพู หรือสีขาว อย่างใดอย่างหนึ่ง
- 2) ไม่ใช่ เพราะในกล่องที่มีลูกปิงปองสีชมพูน้อยกว่าลูกปิงปองสีเหลือง  
ดังนั้น คาวูดจึงมีโอกาสหยิบได้ลูกปิงปองสีเหลืองมากกว่าสีชมพู
- 3) ไม่ใช่ เพราะในกล่องที่ไม่มีลูกปิงปองสีเขียว  
ดังนั้น คาวูดจึงไม่มีโอกาสหยิบได้ลูกปิงปองสีเขียวอย่างแน่นอน
- 4) ไม่ใช่ เพราะในกล่องที่มีลูกปิงปองสีชมพูอยู่ด้วย  
ดังนั้น คาวูดจึงยังโอกาสหยิบได้ลูกปิงปองสีชมพู
- 5) สีเหลือง เพราะในกล่องที่มีลูกปิงปองสีเหลืองอยู่มากที่สุด

#### สถานการณ์ที่ 2

- 1) ไม่ใช่ เพราะบนหน้าลูกเต๋ามีแต้ม 1 ถึง 6  
ดังนั้น คำบ่อจึงมีโอกาสทอดลูกเต๋าคือได้แต้มเป็นเท่าใดก็ได้ ตั้งแต่ 1 ถึง 6
- 2) ใช่ เพราะบนหน้าลูกเต๋ามีแต้ม 1 ถึง 6 ไม่มีแต้ม 10  
ดังนั้น คำบ่อจึงไม่มีโอกาสที่จะทอดลูกเต๋าคือแล้วขึ้นแต้ม 10 อย่างแน่นอน

- 3) ใช่ เพราะบนหน้าลูกเต๋ามีแต้ม 1 ถึง 6  
ดังนั้น คำบอจึงมีโอกาสทอดลูกเต๋า แล้วขึ้นแต้มใดแต้มหนึ่ง จากแต้ม 1 ถึง 6 อย่างแน่นอน

### สถานการณ์ที่ 3

- 1) ไม่ใช่ เพราะผู้แทนประเทศไทย มีทั้งผู้ที่ได้รับเหรียญทอง เหรียญเงิน และเหรียญทองแดง  
ดังนั้น ผู้แทนที่ลุ่มซื้อขึ้นมานี้จึงมีโอกาสเป็นผู้ที่ได้รับรางวัลใดก็ได้
- 2) ใช่ เพราะมีผู้แทนประเทศไทยที่ได้รับเหรียญทองมากกว่าเหรียญทองแดง  
ดังนั้น ผู้แทนที่ลุ่มซื้อขึ้นมานี้จึงมีโอกาสเป็นผู้ที่ได้รับเหรียญทองมากกว่าเหรียญทองแดง
- 3) ไม่ใช่ เพราะมีผู้แทนประเทศไทยที่ได้รับเหรียญเงินมากกว่าเหรียญทอง  
ดังนั้น ผู้แทนที่ลุ่มซื้อขึ้นมานี้จึงมีโอกาสเป็นผู้ที่ได้รับเหรียญเงินมากกว่าเหรียญทอง

### สถานการณ์ที่ 4

- 1) กัมบี้จะมีโอกาสได้เค้กส้มมากกว่าเค้กช็อกโกแลต เพราะในขณะที่ร้านเค้กนุ่มแบ่งเค้กใส่กล่องนั้น จะมีเค้กส้ม 4 กล่อง มากกว่าเค้กช็อกโกแลต ซึ่งมี 3 กล่อง
- 2) อันนามีโอกาสที่จะหยิบได้เค้กส้มทั้งสองกล่อง เท่า ๆ กับ หยิบได้เค้กช็อกโกแลตทั้งสองกล่อง เพราะเมื่อกัมบี้ หยิบได้เค้กส้มไปแล้ว 1 กล่อง ทำให้เค้กส้มและเค้กช็อกโกแลตต่างเหลืออยู่ชนิดละ 3 กล่อง
- 3) ไม่ใช่ เพราะถ้าเค้กที่อันนาซื้อไปเป็นเค้กชนิดเดียวกันทั้งสองกล่อง แสดงว่าที่ร้านจะเหลือเค้กชนิดเดียวกับที่อันนาซื้อไปอยู่อีก 1 กล่อง และเป็นเค้กอีกชนิดหนึ่ง 3 กล่อง  
ดังนั้น นักเรียนอาจจะหยิบได้เค้กชนิดเดียวกันทั้งสองกล่อง หรือต่างชนิดกันก็ได้



## 4.2 ความน่าจะเป็น (6 ชั่วโมง)

### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

1. ระบุผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม และผลลัพธ์ของเหตุการณ์
2. หาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ หาข้อสรุป และแก้ปัญหา

### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

-

### สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. อุปกรณ์ของกิจกรรม : แต้มเดียวกันไหม
2. อุปกรณ์ของกิจกรรมเสนอแนะ 4.2 : หยิบจับลูกกวาดสี

### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องความน่าจะเป็น ซึ่งเน้นให้นักเรียนได้เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม สามารถเขียนแจกแจงผลลัพธ์ที่เกิดจากการทดลองสุ่มด้วยวิธีการที่หลากหลาย และเข้าใจเกี่ยวกับเหตุการณ์ที่สนใจ รวมทั้งสามารถหาผลลัพธ์ของเหตุการณ์เพื่อนำไปสู่การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ รวมทั้งใช้ความรู้ดังกล่าวในการแก้ปัญหา เพื่อให้การเรียนรู้ของนักเรียนเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทำได้ดังนี้

1. ครูควรให้นักเรียนได้ทำความเข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม จากตัวอย่างสถานการณ์ที่หลากหลาย ดังเช่นสถานการณ์ในหนังสือเรียน หน้า 174 และอาจใช้แนวคิด 4.2 ในหนังสือเรียน หน้า 175 เพื่อตรวจสอบความเข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม จากนั้น แนะนำวิธีการแจกแจงผลลัพธ์ที่เกิดจากการทดลองสุ่ม ซึ่งสามารถทำได้หลายวิธี เช่น แผนภาพต้นไม้ ตาราง แผนภาพเชิงรูปภาพ หรือกราฟของจุด

ในการทดลองสุ่ม ครูควรชี้ให้นักเรียนเห็นว่าสิ่งของที่ใช้ในการทดลองสุ่มแตกต่างกัน ดังนั้น ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่มจะต้องพิจารณาอันดับของสิ่งของนั้นด้วย ดังบทสนทนาของข้าวกล้องกับข้าวปุ้น ในหนังสือเรียน หน้า 177

นอกจากนี้ ในการสุ่มหยิบจะให้ผลลัพธ์เปลี่ยนแปลงไปตามลักษณะของการสุ่มหยิบ เช่น การสุ่มหยิบพร้อมกัน การสุ่มหยิบแล้วไม่ใส่คืน หรือการสุ่มหยิบแล้วใส่คืน ครูจึงควรเน้นย้ำให้นักเรียนพิจารณาอันดับของการสุ่มหยิบนั้นด้วย ทั้งนี้ ครูอาจใช้ “กิจกรรมเสนอแนะ 4.2 : หยิบจับลูกกวาดสี” ในคู่มือครู หน้า 278–279 เพื่อให้นักเรียนเห็นภาพของการสุ่มหยิบในแต่ละลักษณะ รวมถึงผลของการสุ่มหยิบนั้น



2. ครูแนะนำเกี่ยวกับสิ่งที่สนใจจากการทดลองสุ่ม หรือที่เรียกว่า “เหตุการณ์” และฝึกให้นักเรียนได้ลองหาผลลัพธ์ของเหตุการณ์ โดยให้นักเรียนสังเกตว่า ผลลัพธ์ของเหตุการณ์อาจเป็นส่วนหนึ่ง หรือเท่ากับผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม ซึ่งความรู้ความเข้าใจในเรื่องนี้จะพื้นฐานในการหาความน่าจะเป็น
3. ในการสอนเรื่องความน่าจะเป็น ครูควรให้นักเรียนได้เชื่อมโยงความรู้จากเรื่องความหมายของเศษส่วน เพื่อนำไปสู่การอธิบายและแปลความหมายเกี่ยวกับความน่าจะเป็น แล้วจึงเชื่อมโยงไปสู่สูตรในการหาค่าความน่าจะเป็น  
สำหรับในขั้นนี้ นักเรียนจะเริ่มเรียนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สามารถหาผลลัพธ์ของการทดลองสุ่มได้จากการแจกแจง และนักเรียนควรทราบว่าความน่าจะเป็นจะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 รวมถึงความหมายของค่าความน่าจะเป็น
4. สำหรับการสอนเกี่ยวกับความน่าจะเป็นในทางทฤษฎีและความน่าจะเป็นในทางปฏิบัติ ครูควรใช้ “กิจกรรม : แต้มเดียวกันไหม” ในหนังสือเรียน หน้า 195–196 เพื่อแสดงให้นักเรียนเห็นว่า ในสถานการณ์จริงนั้น ความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่มอาจไม่ตรงกับค่าความน่าจะเป็นที่คำนวณได้ตามทฤษฎี และควรชี้ให้นักเรียนเห็นถึงปัจจัยที่ทำให้ค่าดังกล่าวต่างกัน เช่น ความเที่ยงตรงของอุปกรณ์ที่นำมาใช้ในการทดลองสุ่ม หรือจำนวนครั้งในการทดลอง ซึ่งยังมีจำนวนครั้งในการทดลองมากขึ้น ผลที่ได้จะใกล้เคียงกับความน่าจะเป็นในทางทฤษฎีมากขึ้น



## กิจกรรม : แต้้มเดียวกันไหม

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้ทดลองและเก็บข้อมูลจริง แล้วหาความน่าจะเป็นในทางปฏิบัติ เพื่อจะเชื่อมโยงไปสู่การเปรียบเทียบกับความน่าจะเป็นในทางทฤษฎี และอภิปรายผลที่ได้นั้น โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนในการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

ลูกเต๋าคู่ที่ต่างกัน 2 ลูก/คน (หากใช้ลูกเต๋าคู่เหมือนกัน ให้ทำสัญลักษณ์เพื่อให้เห็นความแตกต่างของลูกเต๋าคู่ทั้งสองลูก) หรืออาจใช้ลูกเต๋าคู่จำลองจากไฟล์ GSP ในมุมเทคโนโลยี ในหนังสือเรียน หน้า 195



### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนทำ “กิจกรรม : แต้้มเดียวกันไหม” ตามขั้นตอนในหนังสือเรียน หน้า 195–196 แล้วตอบคำถามท้ายกิจกรรม
2. ครูร่วมกันอภิปรายกับนักเรียนเกี่ยวกับความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าคู่หงายขึ้นแต้ม 6 พร้อมกันทั้งสองลูก จากผลการทดลองของตนเองกับเพื่อน ๆ ว่าเหมือนหรือต่างกันอย่างไร และเพราะเหตุใดผลการทดลองของนักเรียนแต่ละคนจึงต่างกัน
3. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายและเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าคู่หงายขึ้นแต้ม 6 พร้อมกันทั้งสองลูก ระหว่างความน่าจะเป็นที่ได้จากผลการทดลองของตนเองกับความน่าจะเป็นที่ได้จากผลการทดลองของนักเรียนทั้งห้อง พร้อมทั้งชี้ให้นักเรียนเห็นว่า เมื่อจำนวนครั้งของการทดลองยิ่งมากขึ้น ความน่าจะเป็นที่ได้ก็จะยิ่งใกล้เคียงกับความน่าจะเป็นในทางทฤษฎี

## เฉลยคำถามท้ายกิจกรรม : แต้้มเดียวกันไหม

1.  $\frac{1}{36}$
2. คำตอบขึ้นอยู่กับผลจากการทอดลูกเต๋าคู่ของนักเรียนแต่ละคน และของนักเรียนทั้งห้อง
3. คำตอบขึ้นอยู่กับผลจากการทอดลูกเต๋าคู่ ซึ่งคำตอบที่ควรได้คือ ความน่าจะเป็นจากการทดลองของนักเรียนทั้งห้อง มีค่าใกล้เคียงกับความน่าจะเป็นในทางทฤษฎีมากกว่าความน่าจะเป็นจากการทดลองของนักเรียนแต่ละคน

กิจกรรมเสนอแนะ 4.2 : หยบจับลูกกวาดสี

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมความเข้าใจในเรื่องของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดจากการสุ่มหยบสิ่งของทั้งแบบหยบแล้วใส่คืน หยบแล้วไม่ใส่คืน และหยบพร้อมกัน โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

สื่อ/อุปกรณ์

- 1. ลูกอมต่างชนิด จำนวน 3 ชนิด ชนิดละ 1 เม็ด
- 2. ขวดโหลทึบ

ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

- 1. ครูนำลูกอมที่เตรียมไว้ทั้งหมดใส่ลงในขวดโหลทึบ แล้วให้นักเรียนออกมาสุ่มหยบลูกอมครั้งละ 1 เม็ด จำนวน 2 ครั้ง โดยหยบแล้วใส่คืนก่อนที่จะหยบครั้งที่ 2 จากนั้นบันทึกผลลงในตารางบนกระดาน (กำหนดให้ A, B และ C แทนลูกอมชนิดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ) ดังนี้

| นักเรียน<br>คนที่ | ลูกอมที่สุ่มหยิบได้ |   |   |            |   |   | สรุปผลลัพธ์ |
|-------------------|---------------------|---|---|------------|---|---|-------------|
|                   | ครั้งที่ 1          |   |   | ครั้งที่ 2 |   |   |             |
|                   | A                   | B | C | A          | B | C |             |
| 0                 | -                   | ✓ | - | -          | ✓ | - | (B, B)      |
| 1                 |                     |   |   |            |   |   |             |
| 2                 |                     |   |   |            |   |   |             |
| 3                 |                     |   |   |            |   |   |             |
| ⋮                 |                     |   |   |            |   |   |             |

2. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมตามขั้นตอนในข้อ 1 โดยหยิบทีละเม็ดแล้วไม่ใส่คืน จากนั้นบันทึกผลลงในตารางบนกระดาน (กำหนดให้ A, B และ C แทนลูกอมชนิดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ) ดังนี้

| นักเรียน<br>คนที่ | ลูกอมที่สุ่มหยิบได้ |   |   |            |   |   | สรุปผลลัพธ์ |
|-------------------|---------------------|---|---|------------|---|---|-------------|
|                   | ครั้งที่ 1          |   |   | ครั้งที่ 2 |   |   |             |
|                   | A                   | B | C | A          | B | C |             |
| 0                 | -                   | - | ✓ | -          | ✓ | - | (C, B)      |
| 1                 |                     |   |   |            |   |   |             |
| 2                 |                     |   |   |            |   |   |             |
| 3                 |                     |   |   |            |   |   |             |
| ⋮                 |                     |   |   |            |   |   |             |

3. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมตามขั้นตอนในข้อ 1 โดยให้หยิบลูกอม 2 เม็ด พร้อมกัน จากนั้นบันทึกผลลงในตารางบนกระดาน (กำหนดให้ A, B และ C แทนลูกอมชนิดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ) ดังนี้

| นักเรียน<br>คนที่ | ลูกอมที่สุ่มหยิบได้ |   |   | สรุปผลลัพธ์ |
|-------------------|---------------------|---|---|-------------|
|                   | A                   | B | C |             |
| 0                 | ✓                   | - | ✓ | A กับ C     |
| 1                 |                     |   |   |             |
| 2                 |                     |   |   |             |
| 3                 |                     |   |   |             |
| ⋮                 |                     |   |   |             |

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงความแตกต่างของผลที่ได้จากการสุ่มหยิบทั้งสามลักษณะ ซึ่งนักเรียนควรได้เห็นว่า การสุ่มหยิบทั้งสามลักษณะนั้น ให้ผลลัพธ์ที่แตกต่างกัน และการสุ่มหยิบพร้อมกันไม่จำเป็นต้องพิจารณาถึงอันดับของผลลัพธ์

เฉลยชวนคิด



ชวนคิด 4.2

1. เป็น

2. เป็น

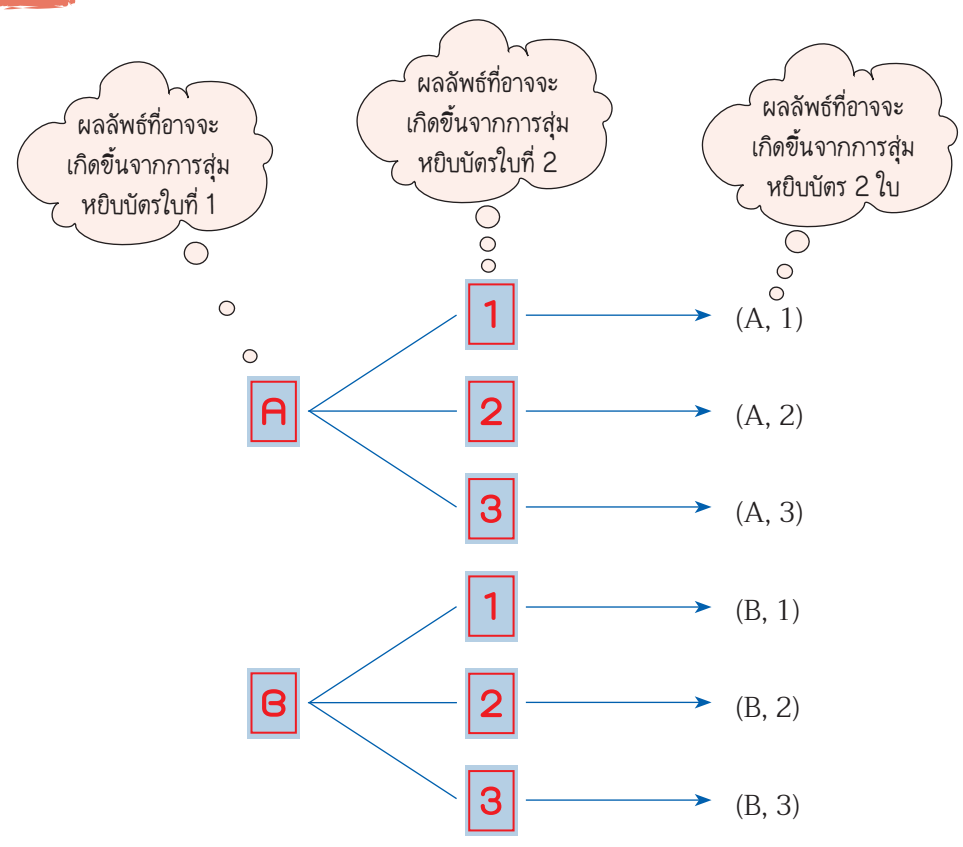
3. ไม่เป็น
4. ไม่เป็น

5. เป็น

6. ไม่เป็น



ชวนคิด 4.3



ชวนคิด 4.4

- ผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่หยิบบัตร 2 ใบ โดยหยิบทีละใบแบบใส่คืน แล้วผลบวกของหมายเลขบนบัตรทั้งสองใบเท่ากับ 5 คือ (1, 4) , (2, 3) , (3, 2) และ (4, 1)
- ผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่หยิบบัตร 2 ใบ โดยหยิบทีละใบแบบใส่คืน แล้วผลบวกของหมายเลขบนบัตรทั้งสองใบเท่ากับ 6 คือ (2, 4) , (3, 3) และ (4, 2)
- ผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่หยิบบัตร 2 ใบ โดยหยิบทีละใบแบบไม่ใส่คืน แล้วผลบวกของหมายเลขบนบัตรทั้งสองใบเท่ากับ 6 คือ (2, 4) และ (4, 2)



ipst.me/11442

### ชวนคิด 4.5

(โคล่า, กาแฟ), (โคล่า, โกโก้), (โคล่า, มินต์), (กาแฟ, โคล่า), (กาแฟ, โกโก้), (กาแฟ, มินต์), (โกโก้, โคล่า), (โกโก้, กาแฟ), (โกโก้, มินต์), (มินต์, โคล่า), (มินต์, กาแฟ) และ (มินต์, โกโก้)



ipst.me/11443

### ชวนคิด 4.6

- เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งขึ้นแต้มที่มีผลลัพธ์ 3 แบบ คือ 1, 3, 5 จากผลลัพธ์ทั้งหมด 6 แบบ  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งขึ้นแต้มที่เท่ากับ  $\frac{3}{6}$  หรือ  $\frac{1}{2}$
- เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งขึ้นแต้มที่มากกว่า 4 มีผลลัพธ์ 2 แบบ คือ 5, 6 จากผลลัพธ์ทั้งหมด 6 แบบ  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งขึ้นแต้มที่มากกว่า 4 เท่ากับ  $\frac{2}{6}$  หรือ  $\frac{1}{3}$
- เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งขึ้นแต้มที่หารด้วย 3 ลงตัว มีผลลัพธ์ 2 แบบ คือ 3, 6 จากผลลัพธ์ทั้งหมด 6 แบบ  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทิ้งขึ้นแต้มที่หารด้วย 3 ลงตัว เท่ากับ  $\frac{2}{6}$  หรือ  $\frac{1}{3}$

## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 4.2 ก

- (ชาย, ชาย), (ชาย, หญิง), (หญิง, ชาย), (หญิง, หญิง)
  - |                         |                         |                       |
|-------------------------|-------------------------|-----------------------|
| ใส่เผือก กับ ใส่มะพร้าว | ใส่เผือก กับ ใส่ถั่ว    | ใส่เผือก กับ ใส่กล้วย |
| ใส่มะพร้าว กับ ใส่ถั่ว  | ใส่มะพร้าว กับ ใส่กล้วย | ใส่ถั่ว กับ ใส่กล้วย  |
  - |                          |                          |                         |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
| ทีมกระทิง กับ ทีมเสือดาว | ทีมกระทิง กับ ทีมหมูป่า  | ทีมกระทิง กับ ทีมโลมา   |
| ทีมกระทิง กับ ทีมม้าลาย  | ทีมเสือดาว กับ ทีมหมูป่า | ทีมเสือดาว กับ ทีมโลมา  |
| ทีมเสือดาว กับ ทีมม้าลาย | ทีมหมูป่า กับ ทีมโลมา    | ทีมหมูป่า กับ ทีมม้าลาย |
| ทีมโลมา กับ ทีมม้าลาย    |                          |                         |

- แนวคิด อาจแจกแจงผลลัพธ์โดยใช้แผนภาพต้นไม้

- |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| HHHH | HHHT | HHTH | HHTT | HTHH | HTHT |
| HTTH | HTTT | THHH | THHT | THTH | THTT |
| TTHH | TTHT | TTTH | TTTT |      |      |
- |      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| HHHT | HHTH | HTHH | THHH |
|------|------|------|------|
- |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| HTTT | THTT | TTHT | TTTH | TTTT |
|------|------|------|------|------|

|         |      |      |      |      |      |
|---------|------|------|------|------|------|
| 4) HTTT | THTT | TTHT | TTTH | TTTT |      |
| 5) HHTT | HTHT | HTTH | THHT | THTH | TTHH |

3.
- 1) -3 กับ -4  
-1 กับ -4  
2 กับ -4

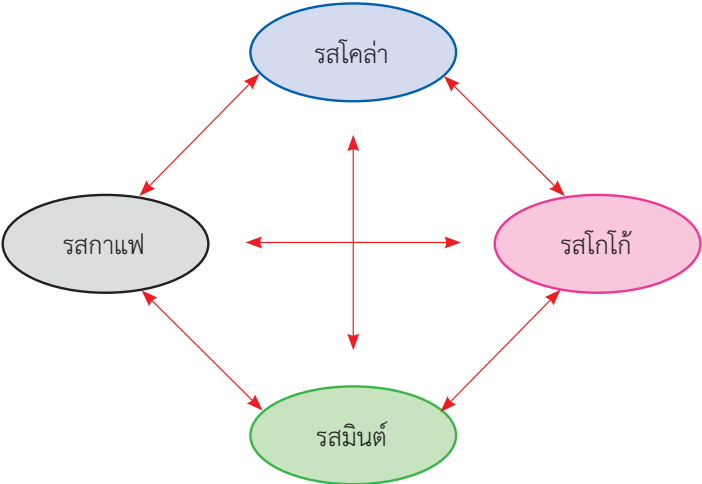
-3 กับ 5  
-1 กับ 5  
2 กับ 5

-3 กับ 6  
-1 กับ 6  
2 กับ 6
- 2) -3 กับ -4

-1 กับ -4

2 กับ -4
- 3) 2 กับ 6
- 4) ไม่มี

4. แนวคิด อาจใช้การเขียนแผนภาพ เช่น



ดังนั้น เพื่อนของสายฟ้าอาจจะได้รับลูกอม รสโคล่ากับรสกาแฟ รสโคล่ากับรสโกโก้ รสโคล่ากับรสมินต์ รสกาแฟกับรสโกโก้ รสกาแฟกับรสมินต์ หรือ รสโกโก้กับรสมินต์

5. แนวคิด อาจแจกแจงผลลัพธ์โดยใช้แผนภาพต้นไม้
- จะได้ว่า ในฤดูอาจจะเป็นส้มโอพันธุ์ต่าง ๆ ดังนี้
- ทองดี ทับทิมสยาม และขาวพวง

ทองดี ทับทิมสยาม และขาวน้ำผึ้ง

ทองดี ขาวพวง และขาวน้ำผึ้ง

ทับทิมสยาม ขาวพวง และขาวแตงกวา

ทับทิมสยาม ขาวแตงกวา และขาวน้ำผึ้ง
- ทองดี ทับทิมสยาม และขาวแตงกวา

ทองดี ขาวพวง และขาวแตงกวา

ทองดี ขาวแตงกวา และขาวน้ำผึ้ง

ทับทิมสยาม ขาวพวง และขาวน้ำผึ้ง

หรือ ขาวพวง ขาวแตงกวา และขาวน้ำผึ้ง

## แบบฝึกหัด 4.2 ข

- ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง มี 6 แบบ คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6
  - เหตุการณ์ที่ลูกเต๋ายกขึ้นแต้ม 3 มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 1  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{1}{6}$
  - เหตุการณ์ที่ลูกเต๋ายกขึ้นแต้มเป็นจำนวนคี่ มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 3  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{3}{6}$  หรือ  $\frac{1}{2}$
  - เหตุการณ์ที่ลูกเต๋ายกขึ้นแต้มเป็นจำนวนที่เป็นตัวประกอบของ 12 มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 5  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{5}{6}$
  - เหตุการณ์ที่ลูกเต๋ายกขึ้นแต้มเป็นจำนวนที่ไม่น้อยกว่า 4 มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 3  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{3}{6}$  หรือ  $\frac{1}{2}$
- แนวคิด** กำหนดให้  $o_1, o_2, o_3, o_4$  แทน อาลัวสีขาว สีนํ้าตาล สีเขียว และสีชมพู ตามลำดับ  
 $w_1, w_2$  แทน วุ้นกรอบสีแดง และสีเหลือง ตามลำดับ  
 ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการสุ่มหยิบขนม 2 ชิ้นพร้อมกัน จากถุงที่มีขนม 6 ชิ้น มี 15 แบบ  
 คือ  $o_1$  กับ  $o_2$      $o_1$  กับ  $o_3$      $o_1$  กับ  $o_4$      $o_1$  กับ  $w_1$      $o_1$  กับ  $w_2$   
            $o_2$  กับ  $o_3$      $o_2$  กับ  $o_4$      $o_2$  กับ  $w_1$      $o_2$  กับ  $w_2$      $o_3$  กับ  $o_4$   
            $o_3$  กับ  $w_1$      $o_3$  กับ  $w_2$      $o_4$  กับ  $w_1$      $o_4$  กับ  $w_2$      $w_1$  กับ  $w_2$ 
  - เหตุการณ์ที่จินาหยิบได้ขนมต่างประเภทกัน มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 8  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{8}{15}$
  - เหตุการณ์ที่จินาหยิบได้อาลัวทั้งสองชิ้น มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 6  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{6}{15}$  หรือ  $\frac{2}{5}$
  - เหตุการณ์ที่จินาหยิบได้วุ้นกรอบทั้งสองชิ้น มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 1  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{1}{15}$
  - เหตุการณ์ที่จินาหยิบได้อาลัวสีส้มนั้น ไม่มีผลลัพธ์เกิดขึ้น  
จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 0  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{0}{15}$  หรือ 0



3. ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้ง มี 36 แบบ คือ

|        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

- เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทงายขึ้นแต้มรวมกันเป็น 7 มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 6  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{6}{36}$  หรือ  $\frac{1}{6}$
- เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทงายขึ้นแต้มต่างกัน 2 มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 8  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{8}{36}$  หรือ  $\frac{2}{9}$
- เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทงายขึ้นแต้มรวมกันไม่น้อยกว่า 2 มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 36  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{36}{36}$  หรือ 1
- เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทงายขึ้นแต้มรวมกันไม่เกิน 9 มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 30  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{30}{36}$  หรือ  $\frac{5}{6}$
- เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทงายขึ้นแต้มต่างกันไม่น้อยกว่า 6 มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 0  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{0}{36}$  หรือ 0
- เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทงายขึ้นแต้มเดียวกัน มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 6  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{6}{36}$  หรือ  $\frac{1}{6}$

4. 1) ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการสุ่มหยิบไพ่ 2 ใบพร้อมกัน จากไพ่ที่กำหนดให้ 4 ใบ มี 6 แบบ คือ



จะได้ว่า เหตุการณ์ที่หยิบไพ่ 2 ใบพร้อมกัน แล้วได้ไพ่สีเดียวกัน มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 2  
ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{2}{6}$  หรือ  $\frac{1}{3}$

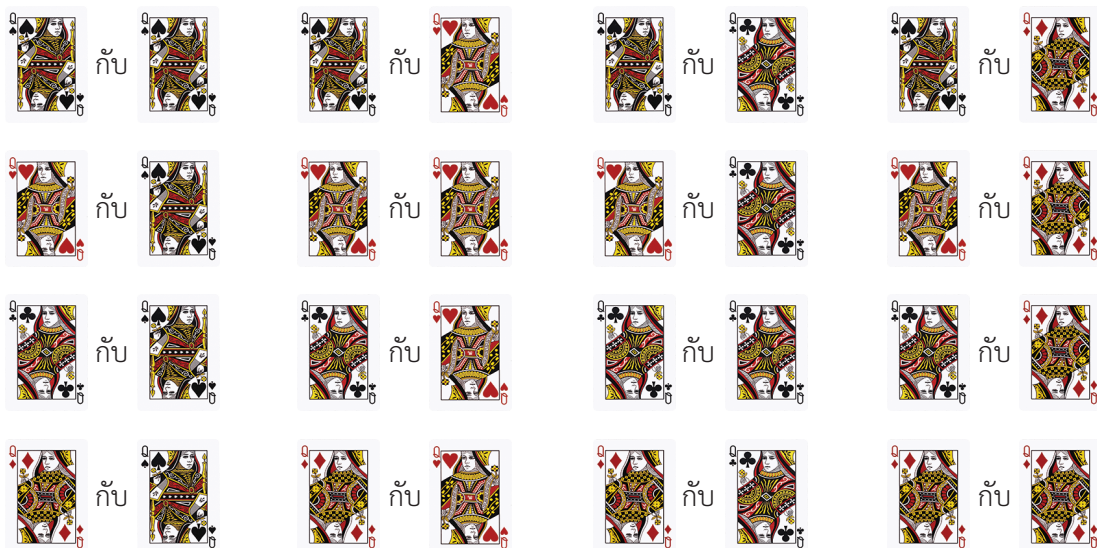
- 2) ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการสุ่มหยิบไพ่ทีละใบ 2 ครั้ง แบบไม่ใส่คืน จากไพที่กำหนดให้ 4 ใบ มี 12 แบบ คือ



จะได้ว่า เหตุการณ์ที่หยิบไพ่ทีละใบ 2 ครั้ง แบบไม่ใส่คืน แล้วได้ไพ่ใบใดใบหนึ่งเป็น  $Q♥$  มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 6

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{6}{12}$  หรือ  $\frac{1}{2}$

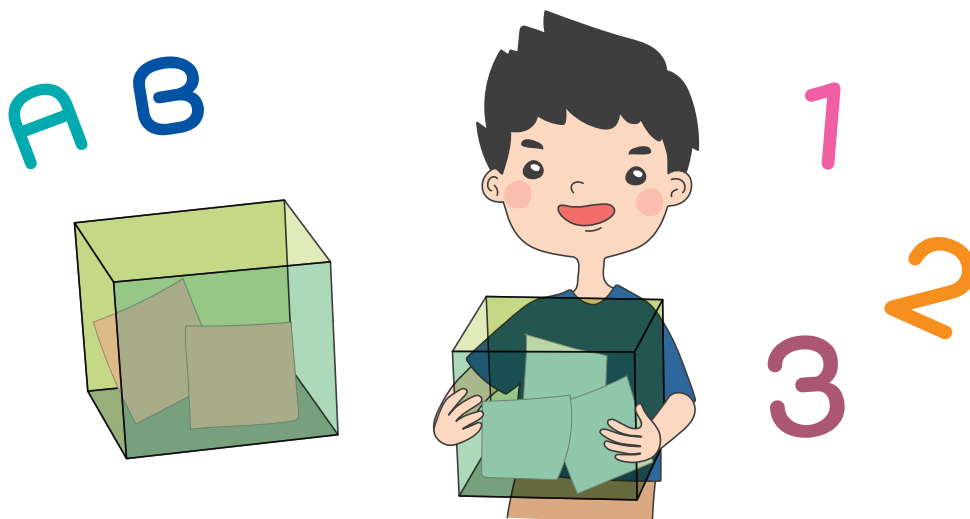
- 3) ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการสุ่มหยิบไพ่ทีละใบ 2 ครั้ง แบบใส่คืน จากไพที่กำหนดให้ 4 ใบ มี 16 แบบ คือ



จะได้ว่า เหตุการณ์ที่หยิบไพ่ทีละใบ 2 ครั้ง แบบใส่คืน แล้วได้ไพ่ใบเดียวกัน มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 4

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{4}{16}$  หรือ  $\frac{1}{4}$

- 4) จากข้อ 2) ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการสุ่มหยิบไพ่ทีละใบ 2 ครั้ง แบบไม่ใส่คืน จากไพ่ที่กำหนดให้ 4 ใบ มี 12 แบบ
- จะได้ว่า เหตุการณ์ที่หยิบไพ่ทีละใบ 2 ครั้ง แบบไม่ใส่คืน แล้วได้ไพ่สีเดียวกัน มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 4
- ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{4}{12}$  หรือ  $\frac{1}{3}$



## กิจกรรมท้ายบท : วางหมากกลเกม

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการวางแผนการเล่นเกม โดยนักเรียนต้องพิจารณาโอกาสการเกิดขึ้นของผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋า 2 ลูก ที่ทำให้เบี้ยของตนเองถูกหยิบออกจากกระดาน ซึ่งจะทำให้ นักเรียนเห็นว่า ความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นจากการทดลองจริงนั้น ไม่สามารถควบคุมได้ และหากเล่นเกมโดยใช้หลักการที่เรียนมา เพียงอย่างเดียวก็อาจไม่ชนะเสมอไป แต่ต้องพิจารณาปัจจัยอื่นที่อาจทำให้ผลที่เกิดขึ้นไม่เป็นไปตามทฤษฎี โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

### สื่อ/อุปกรณ์

1. เบี้ย 10 ตัว/คน
2. ลูกเต๋า 2 ลูก/กลุ่ม
3. กระดานวางหมากกลเกม 1 กระดาน/คน

### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 3–4 คน แจกอุปกรณ์ แล้วให้นักเรียนศึกษากติกาการเล่นจากหนังสือเรียน หน้า 200 และวางแผนการเล่นของตนเอง
2. ครูให้นักเรียนเริ่มเล่นเกมตามกติกาดังกล่าว
3. ครูร่วมกันอภิปรายกับนักเรียนถึงผลที่เกิดขึ้นจากการเล่นเกมในประเด็นดังตัวอย่างต่อไปนี้

- ❖ จากกระดานวางหมากกลเกม นักเรียนคิดว่าผลรวมของแต้มเป็นเท่าใด ที่ไม่ควรวางเบี้ย และผลรวมของแต้มเป็นเท่าใด ที่ควรวางเบี้ยมากที่สุด เพราะเหตุใด

**แนวคำตอบ** ผลรวมของแต้มเป็น 1 เป็นช่องที่ไม่ควรวางเบี้ย เพราะมีความน่าจะเป็นเท่ากับ 0 และผลรวมของแต้มเป็น 7 เป็นช่องที่ควรวางเบี้ยมากที่สุด เพราะมีความน่าจะเป็นมากที่สุด คือ  $\frac{1}{6}$

- ❖ ผลการเล่นเป็นไปตามแผนที่วางไว้หรือไม่ อย่างไร
- ❖ หากผลไม่เป็นไปตามที่นักเรียนวางแผนไว้ นักเรียนคิดว่าเป็นเพราะอะไร
- ❖ จากความรู้ในเรื่องความน่าจะเป็น เราทราบว่าผลรวมของแต้มลูกเต๋าทิ้งท้ายขึ้น มีโอกาสเป็น 7 มากที่สุด หากนักเรียนวางเบี้ยที่ผลรวมของแต้มเป็น 7 ทั้งสิบตัว นักเรียนจะมีโอกาสชนะมากกว่าเพื่อนคนอื่น ๆ หรือไม่ เพราะเหตุใด

**แนวคำตอบ** นักเรียนน่าจะมีโอกาสชนะน้อยกว่าเพื่อนคนอื่น ๆ เพราะแม้ว่าผลรวมของแต้มเป็น 7 จะเป็นผลรวมที่มีความน่าจะเป็นมากที่สุด คือ  $\frac{1}{6}$  แต่จะเห็นว่า ผลรวมของแต้มอื่น ๆ ที่เหลือยังมีความน่าจะเป็นรวมกันมากถึง  $\frac{5}{6}$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

1. แนวคิด

1) เนื่องจาก สลากกินแบ่งรัฐบาลจะมีหมายเลขที่แตกต่างกัน 1,000,000 หมายเลข คือ 000000 ถึง 999999

ดังนั้น ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการสุ่มออกรางวัลแต่ละรางวัลจึงมี 1,000,000 แบบ

และจากการที่ออรรคซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาลมา 3 ใบ ที่มีหมายเลขแตกต่างกัน

ทำให้ได้ว่า เหตุการณ์ที่สลากที่ออรรคซื้อจะถูกรางวัลที่ 1 มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 3

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{3}{1,000,000}$
- 2) เนื่องจาก สลากกินแบ่งรัฐบาลจะมีเลขท้าย 2 ตัว ที่แตกต่างกัน 100 หมายเลข คือ 00 ถึง 99

ดังนั้น ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการสุ่มออกรางวัลแต่ละรางวัลจึงมี 100 แบบ

และจากการที่ออรรคซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาลมา 3 ใบ ที่มีเลขท้าย 2 ตัว แตกต่างกัน

ทำให้ได้ว่า เหตุการณ์ที่สลากที่ออรรคซื้อจะถูกรางวัลเลขท้าย 2 ตัว มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 3

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{3}{100}$
2. แนวคิด

1) เนื่องจาก ไนโหลมีใบดำ 38 ใบ และใบแดง 50 ใบ รวมเป็น 88 ใบ

จะได้ ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการจับสลากเป็นคนแรก เป็น 88

และ เหตุการณ์ที่วาริชจับสลากเป็นคนแรก แล้วจับได้ใบดำ มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 38

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{38}{88}$  หรือ  $\frac{19}{44}$

2) เนื่องจาก คนที่ 1 ถึง 9 จับได้ใบดำไปแล้ว 3 ใบ ทำให้ไนโหลเหลือใบดำ 35 ใบ และใบแดง 44 ใบ

รวมเป็น 79 ใบ

จะได้ ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการจับสลากเป็นคนที 10 เป็น 79

และเหตุการณ์ที่วาริชจับสลากเป็นคนที 10 แล้วจับได้ใบแดง มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 44

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{44}{79}$
3. แนวคิด

กำหนดให้  $A_1, A_2, A_3, A_4$  แทน ช่องที่มีดาว 1 ดวง ซึ่งมี 4 ช่อง

$B_1, B_2, B_3$  แทน ช่องที่มีดาว 2 ดวง ซึ่งมี 3 ช่อง

$C$  แทน ช่องที่มีดาว 3 ดวง ซึ่งมีเพียงช่องเดียว



5. **แนวคิด** ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการที่แม่ค้าตักกับข้าวราดข้าว 2 อย่าง และตักขนม 1 ถ้วย มี 12 แบบ คือ

|          |            |            |          |            |        |
|----------|------------|------------|----------|------------|--------|
| ไข่เจียว | ต้มยำไก่   | หับทิมกรอบ | ไข่เจียว | ต้มยำไก่   | บัวลอย |
| ไข่เจียว | ปลาทอด     | หับทิมกรอบ | ไข่เจียว | ปลาทอด     | บัวลอย |
| ไข่เจียว | กะเพราหมึก | หับทิมกรอบ | ไข่เจียว | กะเพราหมึก | บัวลอย |
| ต้มยำไก่ | ปลาทอด     | หับทิมกรอบ | ต้มยำไก่ | ปลาทอด     | บัวลอย |
| ต้มยำไก่ | กะเพราหมึก | หับทิมกรอบ | ต้มยำไก่ | กะเพราหมึก | บัวลอย |
| ปลาทอด   | กะเพราหมึก | หับทิมกรอบ | ปลาทอด   | กะเพราหมึก | บัวลอย |

- 1) เหตุการณ์ที่เงินจुได้รับประทานกับข้าวเป็นไข่เจียวกับต้มยำไก่ และขนมเป็นหับทิมกรอบ มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 1
- ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{1}{12}$
- 2) เหตุการณ์ที่เงินจुได้รับประทานกับข้าวที่มีอย่างหนึ่งเป็นกะเพราหมึก และขนมเป็นบัวลอย มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 3
- ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{3}{12}$  หรือ  $\frac{1}{4}$
- 3) เหตุการณ์ที่เงินจुได้รับประทานกับข้าวเป็นต้มยำไ้กับปลาทอด และขนมเป็นหับทิมกรอบ หรือ กับข้าวเป็นไข่เจียวกับปลาทอด และขนมเป็นหับทิมกรอบ มีจำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 2
- ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{2}{12}$  หรือ  $\frac{1}{6}$



## ตัวอย่างแบบทดสอบท้ายบท

1. จากการสำรวจอาชีพผู้ปกครองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ห้องหนึ่ง พบว่ามีผู้ปกครองของนักเรียนประกอบอาชีพดังนี้

| อาชีพ         | จำนวน (คน) |
|---------------|------------|
| วิศวกร        | 3          |
| พยาบาล        | 2          |
| นักธุรกิจ     | 10         |
| ตำรวจ ทหาร    | 3          |
| ค้าขาย        | 12         |
| พนักงานบริษัท | 5          |

จากข้อมูลข้างต้น จงตอบคำถามต่อไปนี้

(5 คะแนน)

- 1) หากสุ่มถามนักเรียน 1 คน จากห้องเรียนนี้ ถึงอาชีพผู้ปกครอง มีโอกาสที่จะสุ่มได้นักเรียนที่ผู้ปกครองประกอบอาชีพเป็นพยาบาลหรือไม่

ตอบ .....

- 2) หากสุ่มถามนักเรียน 1 คน จากห้องเรียนนี้ ถึงอาชีพผู้ปกครอง มีโอกาสที่จะสุ่มได้นักเรียนที่ผู้ปกครองประกอบอาชีพค้าขายหรือไม่

ตอบ .....

- 3) หากสุ่มถามนักเรียน 1 คน จากห้องเรียนนี้ ถึงอาชีพผู้ปกครอง มีโอกาสที่จะสุ่มได้นักเรียนที่ผู้ปกครองประกอบอาชีพนักบินหรือไม่

ตอบ .....

- 4) หากสุ่มถามนักเรียน 1 คน จากห้องเรียนนี้ ถึงอาชีพผู้ปกครอง ผู้ปกครองของนักเรียนคนนี้น่าจะประกอบอาชีพใดมากที่สุด

ตอบ .....

- 5) หากสุ่มถามนักเรียน 1 คน จากห้องเรียนนี้ ถึงอาชีพผู้ปกครอง ผู้ปกครองของนักเรียนคนนี้น่าจะประกอบอาชีพวิศวกรหรือพนักงานบริษัทมากกว่ากัน

ตอบ .....



2. ตู้หยอดเหรียญของเล่นตู้หนึ่งมีของเล่นอยู่ 2 ชนิด ถ้านานะเห็นหุ่นยนต์จิ๋วและลูกแก้วในตัวรวมกัน 25 ชิ้น โดยเป็นหุ่นยนต์จิ๋วอยู่อย่างน้อย 13 ตัว หากนานะหยอดเหรียญเพื่อกดให้ได้ของเล่นในตู้นี้ นานะคาดว่าตนเองจะมีโอกาสกดได้หุ่นยนต์จิ๋วหรือลูกแก้วมากกว่ากัน เพราะเหตุใด (2 คะแนน)

.....

.....

3. โหลแก้วใบหนึ่งใส่ลูกอมจำนวน 3 เม็ด ประกอบด้วยลูกอมรสส้ม 2 เม็ด และลูกอมรสกาแฟ 1 เม็ด หากนักเรียนสุ่มหยิบลูกอมในโหลแก้วนี้ ครั้งละ 1 เม็ด 2 ครั้ง จงตอบคำถามต่อไปนี้ (6 คะแนน)

1) ในการหยิบลูกอมครั้งแรก นักเรียนคิดว่าจะได้ลูกอมรสใดมากที่สุด เพราะเหตุใด

.....

.....

2) ถ้านักเรียนสุ่มหยิบลูกอมครั้งแรกได้ลูกอมรสกาแฟ นักเรียนคิดว่าในครั้งที่สองจะสุ่มหยิบได้ลูกอมรสใด เพราะเหตุใด

.....

.....

3) ถ้านักเรียนสุ่มหยิบลูกอมครั้งแรกได้ลูกอมรสส้ม นักเรียนคิดว่าในครั้งที่สองจะได้ลูกอมรสใด เพราะเหตุใด

.....

.....

4. ถ้าทอดลูกเต๋า 1 ลูก จำนวน 1 ครั้ง จงตอบคำถามต่อไปนี้ (10 คะแนน)

1) มีโอกาสที่ลูกเต๋าคจะหงายขึ้นแต้ม 1 หรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

.....

2) มีโอกาสที่ลูกเต๋าคจะหงายขึ้นแต้ม 1 หรือ 2 หรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

.....

3) มีโอกาสที่ลูกเต๋าคจะหงายขึ้นแต้ม 5 หรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

.....

4) มีโอกาสที่ลูกเต๋าคจะหงายขึ้นแต้ม 7 หรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

.....

5) มีโอกาสที่ลูกเต๋าคจะหงายขึ้นแต้ม 3 และ 4 พร้อมกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

.....

.....

5. ปริมได้รับขนมปังสอดไส้ 1 กล่อง โดยในกล่องนี้มีขนมปังสอดไส้ครีม 3 ชิ้น ไส้ข้าวโพด 6 ชิ้น และไส้ใบเตย 1 ชิ้น ซึ่งขนมปังทุกชิ้นบรรจุอยู่ในถุงที่เหมือนกัน ถ้าปริมสุ่มหยิบขนมปังมารับประทานมา 1 ชิ้น จงหา (6 คะแนน)

1) ความน่าจะเป็นที่ปริมจะได้รับประทานขนมปังสอดไส้ครีม

---

---

---

---

---

---

2) ความน่าจะเป็นที่ปริมจะได้รับประทานขนมปังสอดไส้ใบเตยหรือไส้ครีม

---

---

---

---

---

---

3) ความน่าจะเป็นที่ปริมจะไม่ได้รับประทานขนมปังสอดไส้ข้าวโพด

---

---

---

---

---

---

6. สุ่มหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำหรับหนึ่ง จงหา (4 คะแนน)

1) ความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบได้ไพ่ที่มีหน้าไพ่เป็นข้าวหลามตัด

---

---

---

---

---

---

2) ความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบได้ไพ่ที่มีหน้าไพ่เป็น 5 ในชุดโพดำ

---

---

---

---

---

---

7. กิจกรรมสอยดาวของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีการจัดทำสลากจำนวน 1,200 ใบ โดยให้นักเรียนเลือกได้คนละ 1 ใบ เพื่อแลกรางวัล 1 ชิ้น รางวัลมีทั้งหมด 5 แบบ แบ่งเป็น

- รางวัลที่ 1 จำนวน 50 ใบ
- รางวัลที่ 2 จำนวน 150 ใบ
- รางวัลที่ 3 จำนวน 200 ใบ
- รางวัลที่ 4 จำนวน 300 ใบ
- รางวัลที่ 5 จำนวน 500 ใบ

ถ้านักเรียนมาเล่นกิจกรรมสอยดาวเป็นคนแรก จงหา (8 คะแนน)

1) ความน่าจะเป็นที่จะได้รางวัลที่ 1

2) ความน่าจะเป็นที่จะได้รางวัลที่ 2 หรือ 4

3) ความน่าจะเป็นที่จะได้รางวัลที่ 3 และ 5

4) ความน่าจะเป็นที่จะไม่ได้รางวัลที่ 1

8. ปริติบรรจุเพลงของศิลปิน 2 วง วงละ 5 เพลง ที่ไม่ซ้ำกันลงในแฟลชไดรฟ์ตัวหนึ่ง ในงานเลี้ยงวันปีใหม่ ปริติต้องการเปิดเพลงจากแฟลชไดรฟ์ตัวนี้ผ่านซอฟต์แวร์เล่นเพลงซอฟต์แวร์หนึ่ง ที่สามารถระบุได้ว่าจะเล่นเพลงแบบสุ่ม (ระบบจะสุ่มเพลง 1 เพลง จากเพลงทั้งหมด ทุกครั้งที่จะเล่นเพลงต่อไป) หรือเล่นเพลงแบบวนซ้ำ (ระบบจะเล่นเพลงตามลำดับตั้งแต่เพลงแรก จนถึงเพลงสุดท้าย แล้ววนกลับมาเล่นเพลงแรกอีกครั้งหนึ่ง) จงหา (8 คะแนน)

1) ความน่าจะเป็นที่พลเข้ามาในงานขณะที่เพลงของศิลปินวงที่ 1 กำลังเล่นอยู่ เมื่อปริติเปิดเล่นเพลงแบบวนซ้ำ

---

---

---

---

---

---

---

---

2) ความน่าจะเป็นที่นิกรเข้ามาในงาน แล้วได้ฟังเพลงของศิลปินทั้งสองวง เป็น 2 เพลงแรก เมื่อปริติเปิดเล่นเพลงแบบวนซ้ำ

---

---

---

---

---

---

---

---

3) ความน่าจะเป็นที่ 2 เพลงแรก จะเป็นเพลงจากศิลปินต่างวงกัน เมื่อปริติเปิดเล่นเพลงแบบสุ่ม

---

---

---

---

---

---

---

---

4) ความน่าจะเป็นที่ 2 เพลงแรก จะเป็นเพลงจากศิลปินวงที่ 2 เพลงที่ 4 อยู่อย่างน้อย 1 เพลง เมื่อปริติเปิดเล่นเพลงแบบสุ่ม

---

---

---

---

---

---

---

---

เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบท้ายบท

1. จากการสำรวจอาชีพผู้ปกครองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ห้องหนึ่ง พบว่ามีผู้ปกครองของนักเรียนประกอบอาชีพดังนี้

| อาชีพ         | จำนวน (คน) |
|---------------|------------|
| วิศวกร        | 3          |
| พยาบาล        | 2          |
| นักธุรกิจ     | 10         |
| ตำรวจ ทหาร    | 3          |
| ค้าขาย        | 12         |
| พนักงานบริษัท | 5          |

จากข้อมูลข้างต้น จงตอบคำถามต่อไปนี้ (5 คะแนน)

- 1) หากสุ่มถามนักเรียน 1 คน จากห้องเรียนนี้ ถึงอาชีพผู้ปกครอง มีโอกาสที่จะสุ่มได้นักเรียนที่ผู้ปกครองประกอบอาชีพเป็นพยาบาลหรือไม่

ตอบ มีโอกาasเป็นไปได้
- 2) หากสุ่มถามนักเรียน 1 คน จากห้องเรียนนี้ ถึงอาชีพผู้ปกครอง มีโอกาสที่จะสุ่มได้นักเรียนที่ผู้ปกครองประกอบอาชีพค้าขายหรือไม่

ตอบ มีโอกาasเป็นไปได้
- 3) หากสุ่มถามนักเรียน 1 คน จากห้องเรียนนี้ ถึงอาชีพผู้ปกครอง มีโอกาสที่จะสุ่มได้นักเรียนที่ผู้ปกครองประกอบอาชีพนักบินหรือไม่

ตอบ ไม่มีโอกาasเป็นไปได้
- 4) หากสุ่มถามนักเรียน 1 คน จากห้องเรียนนี้ ถึงอาชีพผู้ปกครอง ผู้ปกครองของนักเรียนคนนี้น่าจะประกอบอาชีพใดมากที่สุด

ตอบ ค้าขาย
- 5) หากสุ่มถามนักเรียน 1 คน จากห้องเรียนนี้ ถึงอาชีพผู้ปกครอง ผู้ปกครองของนักเรียนคนนี้น่าจะประกอบอาชีพวิศวกรหรือพนักงานบริษัทมากกว่ากัน

ตอบ พนักงานบริษัท

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 1 นักเรียนสามารถบอกได้ว่า เหตุการณ์ที่กำหนดให้มีโอกาสเกิดขึ้นมากหรือน้อย

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 5 คะแนน ข้อละ 1 คะแนน

❖ ตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

❖ ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ

ได้ 0 คะแนน

2. ตู้หยอดเหรียญของเล่นตู้หนึ่งมีของเล่นอยู่ 2 ชนิด ถ้านานะเห็นหุ่นยนต์จิ๋วและลูกแก้วในตัวรวมกัน 25 ชิ้น โดยเป็นหุ่นยนต์จิ๋วอยู่อย่างน้อย 13 ตัว หากนานะหยอดเหรียญเพื่อกดให้ได้ของเล่นในตู้นี้ นานะคาดว่าตนเองจะมีโอกาสกดได้หุ่นยนต์จิ๋วหรือลูกแก้วมากกว่ากัน เพราะเหตุใด (2 คะแนน)

..... มีโอกาสกดได้หุ่นยนต์จิ๋วมากกว่าลูกแก้ว เพราะนานะสังเกตเห็นว่ามีจำนวนหุ่นยนต์จิ๋วมากกว่าจำนวนลูกแก้ว

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 1 นักเรียนสามารถบอกได้ว่า เหตุการณ์ที่กำหนดให้มีโอกาสเกิดขึ้นมากหรือน้อย

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 2 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

❖ คำตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

❖ แสดงเหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล

ได้ 1 คะแนน

3. โหลแก้วใบหนึ่งใส่ลูกอมจำนวน 3 เม็ด ประกอบด้วยลูกอมรสส้ม 2 เม็ด และลูกอมรสกาแฟ 1 เม็ด หากนักเรียนสุ่มหยิบลูกอมในโหลแก้วนี้ ครั้งละ 1 เม็ด 2 ครั้ง จงตอบคำถามต่อไปนี้ (6 คะแนน)

1) ในการหยิบลูกอมครั้งแรก นักเรียนคิดว่าจะได้ลูกอมรสใดมากที่สุด เพราะเหตุใด

..... ลูกอมรสส้ม เพราะในโหลมีลูกอมรสส้มมากกว่าลูกอมรสกาแฟ

2) ถ้านักเรียนสุ่มหยิบลูกอมครั้งแรกได้ลูกอมรสกาแฟ นักเรียนคิดว่าในครั้งที่สองจะสุ่มหยิบได้ลูกอมรสใด เพราะเหตุใด

..... ลูกอมรสส้ม เพราะในโหลจะเหลือเพียงลูกอมรสส้มเท่านั้น

3) ถ้านักเรียนสุ่มหยิบลูกอมครั้งแรกได้ลูกอมรสส้ม นักเรียนคิดว่าในครั้งที่สองจะได้ลูกอมรสใด เพราะเหตุใด

..... มีโอกาสหยิบได้ลูกอมรสส้มหรือรสกาแฟเท่า ๆ กัน เพราะในโหลเหลือลูกอมรสส้ม

..... และลูกอมรสกาแฟอย่างละ 1 เม็ด

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 1 นักเรียนสามารถบอกได้ว่า เหตุการณ์ที่กำหนดให้มีโอกาสเกิดขึ้นมากหรือน้อย

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 6 คะแนน ข้อละ 2 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

❖ คำตอบถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน

❖ แสดงเหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล

ได้ 1 คะแนน

4. ถ้าทอดลูกเต๋า 1 ลูก จำนวน 1 ครั้ง จงตอบคำถามต่อไปนี้ (10 คะแนน)
- 1) มีโอกาสที่ลูกเต๋ายกขึ้นแต้ม 1 หรือไม่ เพราะเหตุใด  
..... มีโอกาส เพราะลูกเต๋ามีหน้าที่เป็นแต้ม 1 .....
  - 2) มีโอกาสที่ลูกเต๋ายกขึ้นแต้ม 1 หรือ 2 หรือไม่ เพราะเหตุใด  
..... มีโอกาส เพราะลูกเต๋ามีหน้าที่เป็นแต้ม 1 และแต้ม 2 .....
  - 3) มีโอกาสที่ลูกเต๋ายกขึ้นแต้ม 5 หรือไม่ เพราะเหตุใด  
..... มีโอกาสเกิดขึ้นได้ เพราะลูกเต๋ามีหน้าเป็น 5 .....
  - 4) มีโอกาสที่ลูกเต๋ายกขึ้นแต้ม 7 หรือไม่ เพราะเหตุใด  
..... ไม่มีโอกาส เพราะบนหน้าของลูกเต๋ามีแต้ม 7 .....
  - 5) มีโอกาสที่ลูกเต๋ายกขึ้นแต้ม 3 และ 4 พร้อมกันหรือไม่ เพราะเหตุใด  
..... ไม่มีโอกาส เพราะในการทอดลูกเต๋านี้ครั้ง ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะเป็นเพียงแต้มใดแต้มหนึ่ง บนหน้าของลูกเต๋านั้น .....

**ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน**

- ข้อ 1 นักเรียนสามารถบอกได้ว่าเหตุการณ์ที่กำหนดให้มีโอกาสเกิดขึ้นมากหรือน้อย
- เกณฑ์การให้คะแนน**      คะแนนเต็ม 10 คะแนน ข้อละ 2 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้
- ❖ คำตอบถูกต้อง      ได้ 1 คะแนน
  - ❖ แสดงเหตุผลได้อย่างสมเหตุสมผล      ได้ 1 คะแนน

5. ปริมได้รับขนมปังสอดไส้ 1 กล่อง โดยในกล่องนี้มีขนมปังสอดไส้ครีม 3 ชิ้น ใส่ข้าวโพด 6 ชิ้น และไส้เบเตย 1 ชิ้น ซึ่งขนมปังทุกชิ้นบรรจุอยู่ในถุงที่เหมือนกัน ถ้าปริมสุ่มหยิบขนมปังมารับประทานมา 1 ชิ้น จงหา (6 คะแนน)

**แนวคิด**    กำหนดให้

- |                             |     |                                                                             |
|-----------------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------|
| $c_1, c_2, c_3$             | แทน | ขนมปังสอดไส้ครีมชิ้นที่ 1, ชิ้นที่ 2, ชิ้นที่ 3 ตามลำดับ                    |
| $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$ | แทน | ขนมปังสอดไส้ข้าวโพดชิ้นที่ 1, ชิ้นที่ 2, ชิ้นที่ 3, ..., ชิ้นที่ 6 ตามลำดับ |
| $b$                         | แทน | ขนมปังสอดไส้เบเตย                                                           |

- 1) ความน่าจะเป็นที่ปริมจะได้รับประทานขนมปังสอดไส้ครีม
- ..... เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 10 แบบ .....
- ..... และเหตุการณ์ที่ปริมจะได้รับประทานขนมปังสอดไส้ครีม มีผลลัพธ์ คือ  $c_1, c_2, c_3$  .....
- ..... จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 3 .....
- ..... ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{3}{10}$  .....

- 2) ความน่าจะเป็นที่ปริมจะได้รับประทานขนมปังสอดไส้ใบเตยหรือไส้ครีม

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 10 แบบ

และเหตุการณ์ที่ปริมจะได้รับประทานขนมปังสอดไส้ใบเตยหรือไส้ครีมมีผลลัพธ์

คือ บ, ค<sub>1</sub>, ค<sub>2</sub>, ค<sub>3</sub>

จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 4

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{4}{10}$  หรือ  $\frac{2}{5}$

- 3) ความน่าจะเป็นที่ปริมจะ**ไม่**ได้รับประทานขนมปังสอดไส้ข้าวโพด

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 10 แบบ

และเหตุการณ์ที่ปริมจะ**ไม่**ได้รับประทานขนมปังสอดไส้ข้าวโพดนั้น มีผลลัพธ์เช่นเดียวกับ

เหตุการณ์ที่ปริมจะได้รับประทานขนมปังสอดไส้ใบเตยหรือไส้ครีม

จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 4

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{4}{10}$  หรือ  $\frac{2}{5}$

#### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้

ข้อ 3 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้ในการแก้ปัญหา

#### เกณฑ์การให้คะแนน

คะแนนเต็ม 6 คะแนน ข้อละ 2 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

✦ เขียนแสดงแนวคิด และหาคำตอบถูกต้อง ได้ 2 คะแนน

✦ เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง

หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน

✦ ไม่เขียนแสดงแนวคิด และหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ ได้ 0 คะแนน

6. สุ่มหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำหรับหนึ่ง จงหา (4 คะแนน)

- 1) ความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบได้ไพ่ที่มีหน้าไพ่เป็นข้าวหลามตัด

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 52 แบบ

และเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ไพ่ที่มีหน้าไพ่เป็นข้าวหลามตัด มีผลลัพธ์ คือ 2♦ 3♦

4♦ 5♦ 6♦ 7♦ 8♦ 9♦ 10♦ J♦ Q♦ K♦ A♦

จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 13

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{13}{52}$  หรือ  $\frac{1}{4}$



- 2) ความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบได้ไพ่ที่มีหน้าไพ่เป็น 5 ในชุดโพดำ

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 52 แบบ

และเหตุการณ์ที่สุ่มหยิบได้ไพ่ที่มีหน้าไพ่เป็น 5 ในชุดโพดำ มีผลลัพธ์ คือ 5♠

จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 1

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{1}{52}$

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้

ข้อ 3 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้ในการแก้ปัญหา

#### เกณฑ์การให้คะแนน

คะแนนเต็ม 4 คะแนน ข้อละ 2 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

- ✱ เขียนแสดงแนวคิด และหาคำตอบถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ✱ เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ✱ ไม่เขียนแสดงแนวคิด และหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ ได้ 0 คะแนน

7. กิจกรรมสอยดาวของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีการจัดทำสลากจำนวน 1,200 ใบ โดยให้นักเรียนเลือกได้คนละ 1 ใบ เพื่อแลกรางวัล 1 ชิ้น รางวัลมีทั้งหมด 5 แบบ แบ่งเป็น

รางวัลที่ 1 จำนวน 50 ใบ

รางวัลที่ 2 จำนวน 150 ใบ

รางวัลที่ 3 จำนวน 200 ใบ

รางวัลที่ 4 จำนวน 300 ใบ

รางวัลที่ 5 จำนวน 500 ใบ

ถ้านักเรียนมาเล่นกิจกรรมสอยดาวเป็นคนแรก จงหา

(8 คะแนน)

- 1) ความน่าจะเป็นที่จะได้รางวัลที่ 1

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 1,200 แบบ

จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่จะได้รางวัลที่ 1 เป็น 50

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{50}{1,200}$  หรือ  $\frac{1}{24}$

- 2) ความน่าจะเป็นที่จะได้รางวัลที่ 2 หรือ 4

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 1,200 แบบ

จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ที่จะได้รางวัลที่ 2 หรือ 4 เป็น 450

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{450}{1,200}$  หรือ  $\frac{3}{8}$

## 3) ความน่าจะเป็นที่จะได้รางวัลที่ 3 และ 5

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 1,200 แบบ  
 และจากการที่สุ่มจับสลาก 1 ใบ จะได้รับรางวัลเพียงรางวัลเดียวเท่านั้น  
 จึงไม่มีเหตุการณ์ที่จะได้ทั้งรางวัลที่ 3 และ 5  
 จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 0  
 ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{0}{1,200}$  หรือ 0

## 4) ความน่าจะเป็นที่จะไม่ได้รางวัลที่ 1

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 1,200 แบบ  
 และจากการที่สุ่มจับสลาก 1 ใบ จะได้รับรางวัลเพียงรางวัลใดรางวัลหนึ่งเท่านั้น  
 ซึ่งถ้าไม่ได้รับรางวัลที่ 1 ก็จะต้องได้รับรางวัลอื่น ๆ อย่างแน่นอน  
 จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น  $1,200 - 50 = 1,150$   
 ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{1,150}{1,200}$  หรือ  $\frac{23}{24}$

8. ปฏิบัติบรรจุเพลงของศิลปิน 2 วง วงละ 5 เพลง ที่ไม่ซ้ำกันลงในแฟลชไดรฟ์ตัวหนึ่ง ในงานเลี้ยงวันปีใหม่ ปรีดีต้องการเปิดเพลงจากแฟลชไดรฟ์ตัวนี้ผ่านซอฟต์แวร์เล่นเพลงซอฟต์แวร์หนึ่ง ที่สามารถระบุได้ว่าจะเล่นเพลงแบบสุ่ม (ระบบจะสุ่มเพลง 1 เพลง จากเพลงทั้งหมด ทุกครั้งที่จะเล่นเพลงต่อไป) หรือเล่นเพลงแบบวนซ้ำ (ระบบจะเล่นเพลงตามลำดับตั้งแต่เพลงแรก จนถึงเพลงสุดท้าย แล้ววนกลับมาเล่นเพลงแรกอีกครั้งหนึ่ง) จงหา (8 คะแนน)

**แนวคิด** กำหนดให้

$A_1, A_2, A_3, A_4$  และ  $A_5$  แทน เพลงของศิลปินวงที่ 1 ลำดับที่ 1, 2, 3, 4 และ 5 ตามลำดับ  
 $B_1, B_2, B_3, B_4$  และ  $B_5$  แทน เพลงของศิลปินวงที่ 2 ลำดับที่ 1, 2, 3, 4 และ 5 ตามลำดับ

- 1) ความน่าจะเป็นที่พลเข้ามาในงานขณะที่เพลงของศิลปินวงที่ 1 กำลังเล่นอยู่ เมื่อปรีดีเปิดเล่นเพลงแบบวนซ้ำ
- เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 10 แบบ  
 และจากการที่พลเข้ามาในงานเลี้ยงเมื่อใดก็ได้  
 ดังนั้น จะมีเพลงของศิลปินวงใดวงหนึ่งเท่านั้นที่กำลังเล่นอยู่ในขณะนั้น  
 ซึ่งในแฟลชไดรฟ์มีเพลงของศิลปินวงที่ 1 อยู่ 5 เพลง  
 จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 5  
 ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{5}{10}$  หรือ  $\frac{1}{2}$

- 2) ความน่าจะเป็นที่นิกรเข้ามาในงาน แล้วได้ฟังเพลงของศิลปินทั้งสองวง เป็น 2 เพลงแรก เมื่อปรีติเปิดเล่นเพลงแบบวนซ้ำ

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 10 แบบ คือ  $(A_1, A_2), (A_2, A_3), (A_3, A_4), (A_4, A_5), (A_5, B_1), (B_1, B_2), (B_2, B_3), (B_3, B_4), (B_4, B_5), (B_5, A_1)$  จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 2 ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{2}{10}$  หรือ  $\frac{1}{5}$

แนวคิดในการแจกแจงผลลัพธ์ สำหรับข้อ 3)–4)

| เพลงที่ 2<br>เพลงที่ 1 | $A_1$        | $A_2$        | $A_3$        | $A_4$        | $A_5$        | $B_1$        | $B_2$        | $B_3$        | $B_4$        | $B_5$        |
|------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $A_1$                  | $(A_1, A_1)$ | $(A_1, A_2)$ | $(A_1, A_3)$ | $(A_1, A_4)$ | $(A_1, A_5)$ | $(A_1, B_1)$ | $(A_1, B_2)$ | $(A_1, B_3)$ | $(A_1, B_4)$ | $(A_1, B_5)$ |
| $A_2$                  | $(A_2, A_1)$ | $(A_2, A_2)$ | $(A_2, A_3)$ | $(A_2, A_4)$ | $(A_2, A_5)$ | $(A_2, B_1)$ | $(A_2, B_2)$ | $(A_2, B_3)$ | $(A_2, B_4)$ | $(A_2, B_5)$ |
| $A_3$                  | $(A_3, A_1)$ | $(A_3, A_2)$ | $(A_3, A_3)$ | $(A_3, A_4)$ | $(A_3, A_5)$ | $(A_3, B_1)$ | $(A_3, B_2)$ | $(A_3, B_3)$ | $(A_3, B_4)$ | $(A_3, B_5)$ |
| $A_4$                  | $(A_4, A_1)$ | $(A_4, A_2)$ | $(A_4, A_3)$ | $(A_4, A_4)$ | $(A_4, A_5)$ | $(A_4, B_1)$ | $(A_4, B_2)$ | $(A_4, B_3)$ | $(A_4, B_4)$ | $(A_4, B_5)$ |
| $A_5$                  | $(A_5, A_1)$ | $(A_5, A_2)$ | $(A_5, A_3)$ | $(A_5, A_4)$ | $(A_5, A_5)$ | $(A_5, B_1)$ | $(A_5, B_2)$ | $(A_5, B_3)$ | $(A_5, B_4)$ | $(A_5, B_5)$ |
| $B_1$                  | $(B_1, A_1)$ | $(B_1, A_2)$ | $(B_1, A_3)$ | $(B_1, A_4)$ | $(B_1, A_5)$ | $(B_1, B_1)$ | $(B_1, B_2)$ | $(B_1, B_3)$ | $(B_1, B_4)$ | $(B_1, B_5)$ |
| $B_2$                  | $(B_2, A_1)$ | $(B_2, A_2)$ | $(B_2, A_3)$ | $(B_2, A_4)$ | $(B_2, A_5)$ | $(B_2, B_1)$ | $(B_2, B_2)$ | $(B_2, B_3)$ | $(B_2, B_4)$ | $(B_2, B_5)$ |
| $B_3$                  | $(B_3, A_1)$ | $(B_3, A_2)$ | $(B_3, A_3)$ | $(B_3, A_4)$ | $(B_3, A_5)$ | $(B_3, B_1)$ | $(B_3, B_2)$ | $(B_3, B_3)$ | $(B_3, B_4)$ | $(B_3, B_5)$ |
| $B_4$                  | $(B_4, A_1)$ | $(B_4, A_2)$ | $(B_4, A_3)$ | $(B_4, A_4)$ | $(B_4, A_5)$ | $(B_4, B_1)$ | $(B_4, B_2)$ | $(B_4, B_3)$ | $(B_4, B_4)$ | $(B_4, B_5)$ |
| $B_5$                  | $(B_5, A_1)$ | $(B_5, A_2)$ | $(B_5, A_3)$ | $(B_5, A_4)$ | $(B_5, A_5)$ | $(B_5, B_1)$ | $(B_5, B_2)$ | $(B_5, B_3)$ | $(B_5, B_4)$ | $(B_5, B_5)$ |

- 3) ความน่าจะเป็นที่ 2 เพลงแรก จะเป็นเพลงจากศิลปินต่างวงกัน เมื่อปรีติเปิดเล่นเพลงแบบสุ่ม

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 100 แบบ จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 50 ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{50}{100}$  หรือ  $\frac{1}{2}$

- 4) ความน่าจะเป็นที่ 2 เพลงแรก จะเป็นเพลงจากศิลปินวงที่ 2 เพลงที่ 4 อยู่อย่างน้อย 1 เพลง เมื่อปรีดีเปิดเล่น เพลงแบบสุ่ม

เนื่องจาก ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากการทดลองสุ่ม มี 100 แบบ

จะได้ จำนวนผลลัพธ์ของเหตุการณ์ เป็น 19

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ เท่ากับ  $\frac{19}{100}$

### สำหรับข้อ 7–8

#### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่กำหนดให้

ข้อ 3 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้ในการแก้ปัญหา

|                                                      |                                                                  |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| เกณฑ์การให้คะแนน                                     | คะแนนเต็ม 8 คะแนน ข้อย่อยละ 2 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้ |
| ❖ เขียนแสดงแนวคิด และหาคำตอบถูกต้อง                  | ได้ 2 คะแนน                                                      |
| ❖ เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบไม่ถูกต้อง               |                                                                  |
| หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่หาคำตอบถูกต้อง             | ได้ 1 คะแนน                                                      |
| ❖ ไม่เขียนแสดงแนวคิด และหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ | ได้ 0 คะแนน                                                      |





| บทที่                                                                             | 5 | อัตราส่วนตรีโกณมิติ                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------|
|  |   | ในบทอัตราส่วนตรีโกณมิตินี้ ประกอบด้วยหัวข้อย่อย ดังต่อไปนี้ |
|                                                                                   |   | 5.1 ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ 3 ชั่วโมง                |
|                                                                                   |   | 5.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม 3 ชั่วโมง                 |
|                                                                                   |   | 5.3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา 4 ชั่วโมง    |



### สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 2

การวัดและเรขาคณิต

มาตรฐาน ค 2.2

เข้าใจและวิเคราะห์รูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต และทฤษฎีบททางเรขาคณิต และนำไปใช้



### ตัวชี้วัด

เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง



### จุดประสงค์ของบทเรียน

นักเรียนสามารถ

1. เข้าใจความหมายและหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมขนาดต่าง ๆ
2. นำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา



### ความเชื่อมโยงระหว่างตัวชี้วัดกับจุดประสงค์ของบทเรียน

เนื่องจากตัวชี้วัดกล่าวถึงความเข้าใจและการใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง ดังนั้น เพื่อให้การเรียนรู้ของนักเรียนในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติสอดคล้องกับตัวชี้วัด ครูควรจัดประสบการณ์ให้นักเรียนสามารถ

1. เข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งสะท้อนได้จากการที่นักเรียนสามารถบอกความหมายและหาค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ของมุมแหลมจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30 องศา 60 องศา และ 45 องศา รวมถึงหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมขนาดต่าง ๆ จากตารางแสดงค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง ซึ่งสะท้อนได้จากการที่นักเรียนสามารถแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นแบบจำลองทางเรขาคณิต แล้วใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติมาช่วยในการแก้ปัญหาดังกล่าว

 **ความคิดรวบยอดของบทเรียน**

อัตราส่วนตรีโกณมิติ เป็นอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่สัมพันธ์กับขนาดของมุม ซึ่งเมื่อทราบขนาดของมุมและความยาวของด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแล้ว จะสามารถนำไปใช้ในการหาความยาวของด้านอื่น ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนั้นได้ เราสามารถแก้ปัญหหรือสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตจริง โดยเฉพาะปัญหาที่เกี่ยวข้องกับระยะทางหรือความสูง โดยแปลงปัญหาให้เป็นแบบจำลองทางเรขาคณิต แล้วใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติมาช่วยในการแก้ปัญห

 **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์**

| ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์            | หัวข้อ                                |                                      |                                                   |                               |
|-------------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------|
|                                           | 5.1<br>ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ | 5.2<br>อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม | 5.3<br>การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา | กิจกรรมท้ายบท/แบบฝึกหัดท้ายบท |
| การแก้ปัญหา                               |                                       | ✱                                    | ✱                                                 | ✱                             |
| การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ |                                       |                                      | ✱                                                 | ✱                             |
| การเชื่อมโยง                              |                                       | ✱                                    | ✱                                                 | ✱                             |
| การให้เหตุผล                              | ✱                                     | ✱                                    |                                                   |                               |
| การคิดสร้างสรรค์                          |                                       |                                      |                                                   |                               |



## ความเชื่อมโยงของความรู้

### ความรู้พื้นฐาน

- ❖ รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน เพื่อใช้ในการพิสูจน์ว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ อัตราส่วนตรีโกณมิติเดียวกันของมุมที่มีขนาดเท่ากัน จะมีค่าเท่ากัน
- ❖ อัตราส่วนที่เท่ากัน เพื่อเป็นพื้นฐานในการเปรียบเทียบค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน
- ❖ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เพื่อใช้ในการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  และ  $60^\circ$
- ❖ จำนวนอตรรกยะ เช่น การหาค่าประมาณของ  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  เพื่อเป็นพื้นฐานในการคำนวณหาค่าตอบจากค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

### ความรู้ ในบทเรียน

- ❖ ความหมายของไซน์ (sine) โคไซน์ (cosine) และแทนเจนต์ (tangent) ของมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  
 ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และมีมุม A เป็นมุมแหลม
 
$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$$
- ❖ อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม คือ ค่าของ  $\sin A$ ,  $\cos A$  และ  $\tan A$  เมื่อ  $0^\circ < A < 90^\circ$ 
  - ◆ สำหรับกรณีที่ A มีค่าเท่ากับ  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  หรือ  $60^\circ$  ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติสามารถหาได้จากการพิจารณารูปสามเหลี่ยมโดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และสมบัติบางประการของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
  - ◆ สำหรับกรณีที่ A เป็นมุมแหลมอื่น ๆ ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติอาจหาได้จากตารางแสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ
- ❖ การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา จะต้องแปลงปัญหาในชีวิตจริงให้เป็นแบบจำลองทางเรขาคณิต จากนั้น จึงเลือกใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา

### ความรู้ในอนาคต

อัตราส่วนตรีโกณมิติเป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว การคำนวณหาขนาดของแรงย่อยในวิชาฟิสิกส์



### ลำดับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของบทเรียน

ทบทวนความรู้เรื่องรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน ตรีโกณมิติพีทาโกรัส และจำนวนอตรรกยะ

แนะนำความหมายของไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์  
และทำกิจกรรมเพื่อสรุปเกี่ยวกับสมบัติของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเท่ากัน  
พร้อมกับฝึกหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

อภิปรายและให้เหตุผลเพื่อหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  และ  $45^\circ$   
จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว

แนะนำวิธีการหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมขนาดอื่น ๆ จากตาราง  
และอภิปรายเกี่ยวกับค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อขนาดของมุมเพิ่มขึ้นหรือลดลง

สนทนาเกี่ยวกับการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติในการแก้ปัญหาและสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตจริง  
จากนั้นทำกิจกรรมเพื่อให้เข้าใจถึงวิธีการนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง  
และฝึกใช้ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติในการแก้ปัญหาจากสถานการณ์ต่าง ๆ

สรุปบทเรียนเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ  
และฝึกแก้ปัญหาโดยทำกิจกรรมท้ายบทและแบบฝึกหัดท้ายบท

## 5.1 ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ (3 ชั่วโมง)

### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ของมุมแหลมจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
2. หาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

-

### สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

1. อุปกรณ์ของกิจกรรม : สีสันสามมิติพิเศษ
2. ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP)

### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

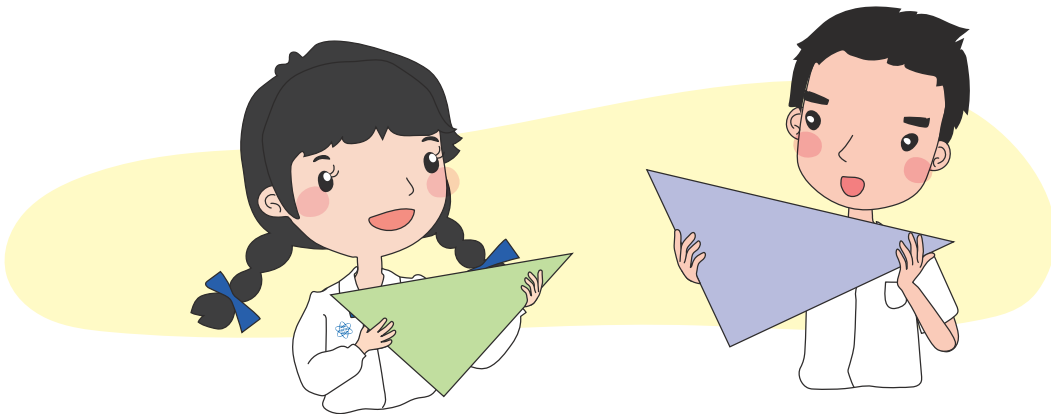
ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับอัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งประกอบด้วยไซน์ (sine) โคไซน์ (cosine) และแทนเจนต์ (tangent) ครูควรให้นักเรียนทำกิจกรรมเพื่อสำรวจ สังเกต สร้างข้อความคาดการณ์ ซึ่งนำไปสู่ข้อสรุปเกี่ยวกับสมบัติของอัตราส่วนตรีโกณมิติ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

1. ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับคำว่า “ตรีโกณมิติ” และยกตัวอย่างสถานการณ์ที่ใช้ความรู้ทางตรีโกณมิติเป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหา เพื่อให้นักเรียนเห็นประโยชน์ของตรีโกณมิติ
2. ครูแนะนำให้นักเรียนรู้จักอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้งหกแบบ ซึ่งในบทเรียนนี้ นักเรียนจะได้เรียนรู้เพียงสามแบบ ได้แก่ ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ทั้งนี้ในการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติแบบต่าง ๆ ครูควรเน้นให้นักเรียนระบุให้ชัดเจนว่ากำลังกล่าวถึงอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมใด จากนั้น ให้นักเรียนทำ “กิจกรรม : สีสันสามมิติพิเศษ” ในหนังสือเรียน หน้า 209–210 โดยให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติเพื่อสำรวจและสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งสามแบบ ซึ่งจะนำไปสู่ข้อสรุปว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ อัตราส่วนตรีโกณมิติเดียวกันของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะมีค่าเท่ากัน

ทั้งนี้ จากการทำกิจกรรม หากพบว่าค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติเดียวกันของมุมที่มีขนาดเท่ากัน มีค่าไม่เท่ากัน ครูควรใช้การอภิปรายเพื่อชี้ให้เห็นว่า ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น อาจมาจากการสร้างและการวัดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม

ในการทำ “กิจกรรม : สืบเสาะสมบัติพิเศษ” ข้างต้นนี้ ครูอาจให้นักเรียนสร้างและสำรวจรูปสามเหลี่ยมมุมฉากในลักษณะอื่น ๆ เพิ่มเติม โดยใช้ซอฟต์แวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) เพื่อสำรวจรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่หลากหลาย และยืนยันข้อความคาดการณ์ที่สร้างให้มีความน่าเชื่อถือมากขึ้น

3. ครูทบทวนเรื่องรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน เพื่อใช้ในการอภิปรายร่วมกับนักเรียนเกี่ยวกับการพิสูจน์ว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ อัตราส่วนตรีโกณมิติเดียวกันของมุมที่มีขนาดเท่ากัน จะมีค่าเท่ากัน”



## กิจกรรม : สืบเสาะสมบัติพิเศษ

กิจกรรมนี้ มุ่งให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติเพื่อสำรวจและสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับความสัมพันธ์ของค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่คล้ายกัน เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปเกี่ยวกับสมบัติของอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

1. ไม้บรรทัด
2. โพรแทรกเตอร์
3. เครื่องคิดเลข



### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันทำ “กิจกรรม : สืบเสาะสมบัติพิเศษ” ในหนังสือเรียน หน้า 209–210
2. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มสังเกต เปรียบเทียบ และอภิปรายเกี่ยวกับค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติในรูปทศนิยมที่ได้จากตาราง
3. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปข้อสังเกตที่ได้จากกิจกรรม

## เฉลยกิจกรรม : สืบเสาะสมบัติพิเศษ

3. ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ได้จากนักเรียนแต่ละคนในกลุ่มอาจแตกต่างกัน แต่ควรมีค่าใกล้เคียงกัน
4. ข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม  $A$  ที่ได้คือ “อัตราส่วนตรีโกณมิติเดียวกันของมุม  $A$  มีค่าเท่ากัน”
5. ข้อความคาดการณ์ดังกล่าวยังคงเหมือนเดิม คือ “อัตราส่วนตรีโกณมิติเดียวกันของมุม  $A$  มีค่าเท่ากัน”

## เฉลยชวนคิด



ipst.me/11444

### ชวนคิด 5.1

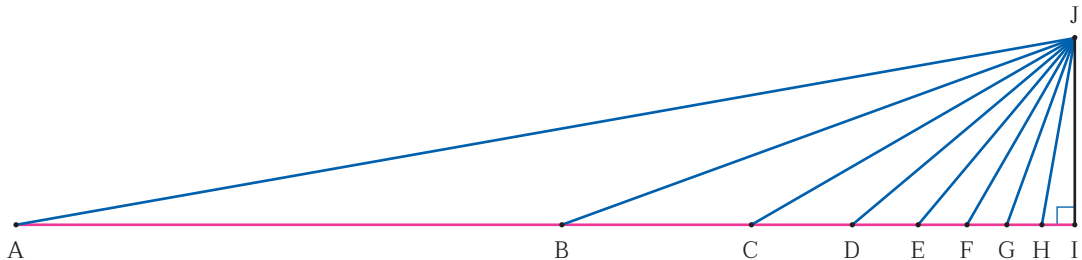
มุมหรืออัตราส่วนตรีโกณมิติ ในแต่ละข้อ มีความสัมพันธ์กันดังนี้

1. ผลบวกของขนาดของมุม A และ มุม B เท่ากับ  $90^\circ$  องศา  
หรือ มุม A เป็นมุมประกอบมุมฉากของมุม B  
หรือ มุม B เป็นมุมประกอบมุมฉากของมุม A
2.  $\sin A = \cos B$
3.  $\cos A = \sin B$
4.  $\tan A = \frac{1}{\tan B}$
5.  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$



ipst.me/11409

### ชวนคิด 5.2



กำหนดให้  $\hat{A} = 10^\circ$ ,  $\hat{B} = 20^\circ$ ,  $\hat{C} = 30^\circ$ ,  $\hat{D} = 40^\circ$ ,  $\hat{E} = 50^\circ$ ,  $\hat{F} = 60^\circ$ ,  $\hat{G} = 70^\circ$  และ  $\hat{H} = 80^\circ$

1. จากรูป จะได้ว่า  $\tan 10^\circ = \frac{IJ}{AI}$ ,  $\tan 20^\circ = \frac{IJ}{BI}$ ,  $\tan 30^\circ = \frac{IJ}{CI}$ , ...,  $\tan 80^\circ = \frac{IJ}{HI}$

เนื่องจาก  $AI > BI > CI > \dots > HI$

จะได้ว่า  $\frac{IJ}{AI} < \frac{IJ}{BI} < \frac{IJ}{CI} < \dots < \frac{IJ}{HI}$

ดังนั้น  $\tan 10^\circ < \tan 20^\circ < \tan 30^\circ < \dots < \tan 80^\circ$

นั่นคือ สามารถเรียงลำดับค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติจากน้อยไปมากตามลำดับได้ดังนี้

$\tan 1^\circ, \tan 2^\circ, \tan 3^\circ, \dots, \tan 88^\circ, \tan 89^\circ$

2. จากรูป จะได้ว่า  $\sin 10^\circ = \frac{IJ}{AJ}$ ,  $\sin 20^\circ = \frac{IJ}{BJ}$ ,  $\sin 30^\circ = \frac{IJ}{CJ}$ , ...,  $\sin 80^\circ = \frac{IJ}{HJ}$

เนื่องจาก  $AJ > BJ > CJ > \dots > HJ$

จะได้ว่า  $\frac{IJ}{AJ} < \frac{IJ}{BJ} < \frac{IJ}{CJ} < \dots < \frac{IJ}{HJ}$

ดังนั้น  $\sin 10^\circ < \sin 20^\circ < \sin 30^\circ < \dots < \sin 80^\circ$

นั่นคือ สามารถเรียงลำดับค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติจากน้อยไปมากตามลำดับได้ดังนี้

$$\sin 1^\circ, \sin 2^\circ, \sin 3^\circ, \dots, \sin 88^\circ, \sin 89^\circ$$

3. เนื่องจาก ถ้า  $A + B = 90^\circ$  แล้ว  $\sin A = \cos B$

จะได้ว่า  $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$ ,  $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$ ,  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ , ...,  $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$

เนื่องจาก  $\sin 10^\circ < \sin 20^\circ < \sin 30^\circ < \dots < \sin 80^\circ$

จะได้ว่า  $\cos 80^\circ < \cos 70^\circ < \cos 60^\circ < \dots < \cos 10^\circ$

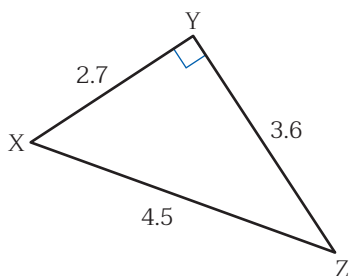
นั่นคือ สามารถเรียงลำดับค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติจากน้อยไปมากตามลำดับได้ดังนี้

$$\cos 89^\circ, \cos 88^\circ, \cos 87^\circ, \dots, \cos 2^\circ, \cos 1^\circ$$

## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 5.1

1.



$$\sin X = \frac{3.6}{4.5} = \frac{4}{5} \quad \text{หรือ} \quad 0.8$$

$$\cos X = \frac{2.7}{4.5} = \frac{3}{5} \quad \text{หรือ} \quad 0.6$$

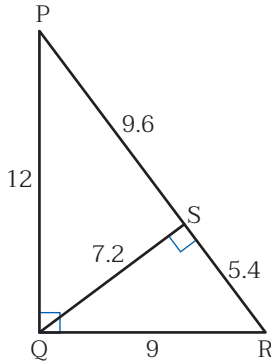
$$\tan X = \frac{3.6}{2.7} = \frac{4}{3}$$

$$\sin Z = \frac{2.7}{4.5} = \frac{3}{5}$$

$$\cos Z = \frac{3.6}{4.5} = \frac{4}{5}$$

$$\tan Z = \frac{2.7}{3.6} = \frac{3}{4}$$

2.



$$\sin \widehat{SPQ} = \frac{7.2}{12} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \widehat{SRQ} = \frac{5.4}{9} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \widehat{SQR} = \frac{5.4}{7.2} = \frac{3}{4}$$

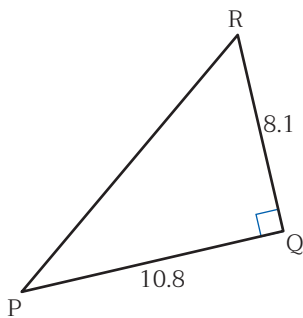
$$\sin \widehat{RPQ} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \widehat{PQS} = \frac{7.2}{12} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \widehat{PRQ} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

3. 1)  $\widehat{DCA}$ 4)  $\widehat{CAD}$ 2)  $\widehat{ABD}$ 5)  $\widehat{DAB}$ 3)  $\widehat{CAD}$ 6)  $\widehat{DAB}$ 

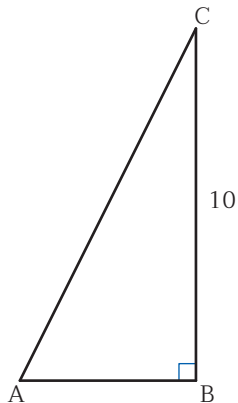
4.



**แนวคิด** จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้  $PR^2 = 8.1^2 + 10.8^2$   
 $= 182.25$

$$PR = 13.5 \text{ หน่วย}$$

ดังนั้น  $\sin P - \tan R = \frac{8.1}{13.5} - \frac{10.8}{8.1} = -\frac{11}{15}$

5. **แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ดังนี้

จากภาพ จะได้  $\tan A = \frac{10}{AB}$

เนื่องจาก  $\tan A = 2$

ดังนั้น  $2 = \frac{10}{AB}$

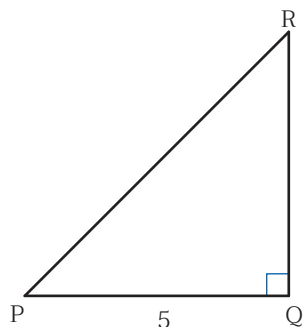
จะได้  $AB = 5 \text{ หน่วย}$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้  $AC^2 = 5^2 + 10^2 = 125$

$$AC = 5\sqrt{5}$$

ดังนั้น  $\sin A = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. **แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ดังนี้



จากภาพ จะได้  $\cos P = \frac{5}{RP}$

เนื่องจาก  $\cos P = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{RP}$

จะได้  $RP = \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$  หน่วย

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้  $QR^2 = (5\sqrt{2})^2 - 5^2 = 25$   
 $QR = 5$

ดังนั้น  $\tan R = \frac{5}{5} = 1$

7. **แนวคิด 1** เนื่องจาก  $\triangle JKL$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีมุม  $\angle JLK$  เป็นมุมฉาก  
 จะได้  $KL = LJ = 16$  หน่วย และ  $\angle JKL = \angle KJL = 45^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $JKL$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้  $JK^2 = 16^2 + 16^2 = 512$

$JK = 16\sqrt{2}$  หน่วย

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  $JKL$  จะได้

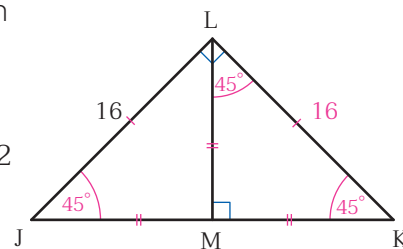
$MK = \frac{JK}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$  หน่วย

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $MKL$  มี  $\angle MKL = 45^\circ$  จะได้ว่า  $\angle KLM = 45^\circ$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $MKL$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นั่นคือ  $LM = MK = 8\sqrt{2}$  หน่วย

ดังนั้น  $\sin \angle MKL = \frac{8\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



- แนวคิด 2** เนื่องจาก  $\triangle JKL$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีมุม  $\angle JLK$  เป็นมุมฉาก  
 จะได้  $LK = LJ = 16$  หน่วย และ  $\angle JKL = \angle KJL = 45^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $LMK$

จะได้  $\angle MKL = \angle MLK = 45^\circ$  และ  $LM = MK$

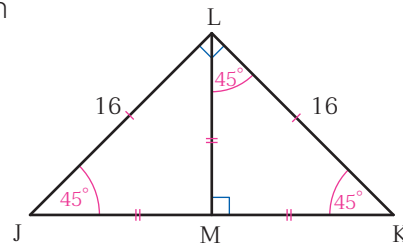
จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้  $LK^2 = LM^2 + MK^2$

$16^2 = LM^2 + LM^2$

$256 = 2LM^2$

$LM^2 = 128$

$LM = 8\sqrt{2}$  หน่วย





$$\text{ดังนั้น } \sin \hat{MKL} = \frac{8\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**แนวคิด 3** เนื่องจาก  $\triangle JKL$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี  $\hat{JLK}$  เป็นมุมฉาก  
จะได้  $KL = LJ = 16$  หน่วย

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $JKL$

$$\text{จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ } JK^2 = 16^2 + 16^2 = 512$$

$$JK = 16\sqrt{2} \text{ หน่วย}$$

หากให้  $\overline{LJ}$  เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $JKL$  จะได้  $\overline{KL}$  เป็นส่วนสูง

$$\text{ดังนั้น พื้นที่ของ } \triangle JKL = \frac{1}{2}(16)(16) \text{ ตารางหน่วย}$$

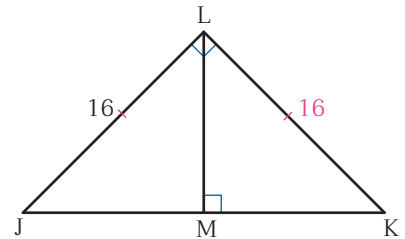
แต่ถ้าให้  $\overline{JK}$  เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก  $JKL$  จะได้  $\overline{LM}$  เป็นส่วนสูง

$$\text{ดังนั้น พื้นที่ของ } \triangle JKL = \frac{1}{2}(16\sqrt{2})(LM) \text{ ตารางหน่วย}$$

$$\frac{1}{2}(16)(16) = \frac{1}{2}(16\sqrt{2})(LM)$$

$$LM = \frac{16}{\sqrt{2}} \text{ หน่วย}$$

$$\text{ดังนั้น } \sin \hat{MKL} = \frac{\frac{16}{\sqrt{2}}}{16} = \frac{16}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



8. **แนวคิด** เนื่องจาก  $\triangle ACD$  มีพื้นที่ 60 ตารางหน่วย

$$\text{จะได้ } 60 = \frac{1}{2} \times AC \times 12$$

$$\text{ดังนั้น } AC = 10$$

$$\text{นั่นคือ } \tan \hat{CDA} = \frac{AC}{CD} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

เนื่องจากจุด B เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\overline{AC}$

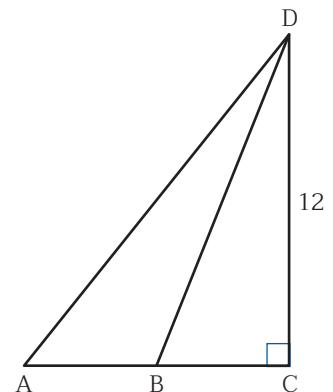
$$\text{จะได้ } BC = 5$$

พิจารณา  $\triangle BCD$

$$\text{จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ } DB^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

$$DB = 13 \text{ หน่วย}$$

$$\text{ดังนั้น } \cos \hat{DBC} = \frac{BC}{DB} = \frac{5}{13}$$



## 5.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม (3 ชั่วโมง)

### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถ

1. บอกค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  และ  $60^\circ$
2. หาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมขนาดต่าง ๆ จากตาราง
3. นำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

-

### สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

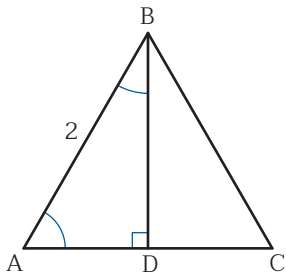
1. ใบกิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ก : หาทางออก
2. ใบกิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ข : ขนาดของมุม

### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  และ  $60^\circ$  และอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมขนาดต่าง ๆ จากตาราง ตลอดจนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

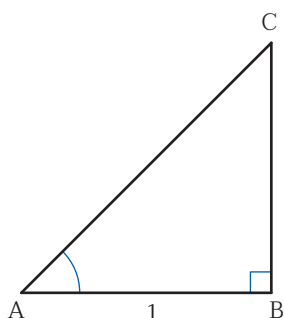
1. ครูทบทวนเกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และทฤษฎีบทพีทาโกรัส จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับการหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30 องศา และ 60 องศา จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และการหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 45 องศา จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว ในหนังสือเรียน หน้า 218–219 โดยมีแนวทางในการให้เหตุผลแต่ละข้อ ดังนี้

มุมที่มีขนาด  $30^\circ$  และ  $60^\circ$



จากรูป กำหนดให้  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มี  $AB = 2$  หน่วย และ  $D$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\overline{AC}$

| ข้อที่ | ข้อความ                              | เหตุผล                                                                                                                                       |
|--------|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | $AD = 1$ หน่วย                       | จุด $D$ เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ $AC = AB = 2$ หน่วย                                                                           |
| 2      | $BD = \sqrt{3}$ หน่วย                | ทฤษฎีบทพีทาโกรัส                                                                                                                             |
| 3      | $\hat{ABD} = 30^\circ$               | สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ที่ว่า “เส้นที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาตั้งฉากกับฐาน จะแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว” |
| 4      | $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$        | $\sin 30^\circ = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 30^\circ}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$                                       |
| 5      | $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\cos 30^\circ = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 30^\circ}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$                                        |
| 6      | $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\tan 30^\circ = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 30^\circ}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 30^\circ}$                                 |
| 7      | $\hat{A} = 60^\circ$                 | มุมภายในแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีขนาดเท่ากับ $60^\circ$                                                                             |
| 8      | $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sin 60^\circ = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 60^\circ}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$                                       |
| 9      | $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$        | $\cos 60^\circ = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 60^\circ}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$                                        |
| 10     | $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$           | $\tan 60^\circ = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 60^\circ}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 60^\circ}$                                 |

มุมที่มีขนาด  $45^\circ$ จากรูป กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วที่มี  $AB = 1$  หน่วย

| ข้อที่ | ข้อความ                              | เหตุผล                                                                                                       |
|--------|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | $BC = 1$ หน่วย                       | ด้านประกอบมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาวเท่ากัน และ $AB = 1$ หน่วย                                        |
| 2      | $AC = \sqrt{2}$ หน่วย                | ทฤษฎีบทพีทาโกรัส                                                                                             |
| 3      | $\hat{A} = 45^\circ$                 | มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน และ $\hat{A} + \hat{C} = 90^\circ$                            |
| 4      | $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\sin 45^\circ = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 45^\circ}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$       |
| 5      | $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cos 45^\circ = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 45^\circ}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$        |
| 6      | $\tan 45^\circ = 1$                  | $\tan 45^\circ = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } 45^\circ}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } 45^\circ}$ |

- ครูอาจใช้ “กิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ก : หาทางออก” ในคู่มือครู หน้า 320–322 เพื่อฝึกการบอกค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  และ  $60^\circ$
- ครูแนะนำการหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมขนาดอื่น ๆ โดยใช้ตารางแสดงค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติจากตารางในหนังสือเรียน หน้า 226–227 ครูอาจให้นักเรียนสังเกตค่าของไซน์และโคไซน์ของมุมที่มีขนาดอยู่ระหว่าง  $0^\circ$  และ  $90^\circ$  จากตาราง ซึ่งจะเห็นว่า ค่าของไซน์และโคไซน์มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 และเมื่อขนาดของมุมเพิ่มมากขึ้น ค่าของไซน์และแทนเจนต์จะมีค่าเพิ่มมากขึ้นด้วย แต่ในทางกลับกัน เมื่อขนาดของมุมเพิ่มมากขึ้น ค่าของโคไซน์จะมีค่าลดลง
- ครูอาจใช้ “กิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ข : ขนาดของมุม” ในคู่มือครู หน้า 323–325 เพื่อฝึกทักษะการประมาณค่าขนาดของมุมแหลมขนาดอื่น ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้ตารางแสดงค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม

## กิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ก : หาทางออก

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่เน้นให้นักเรียนได้ฝึกความคล่องในการบอกค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม  $30^\circ$  ,  $45^\circ$  และ  $60^\circ$  โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้

### สื่อ/อุปกรณ์

ใบกิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ก : หาทางออก

### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำใบกิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ก : หาทางออก
2. ครูให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ

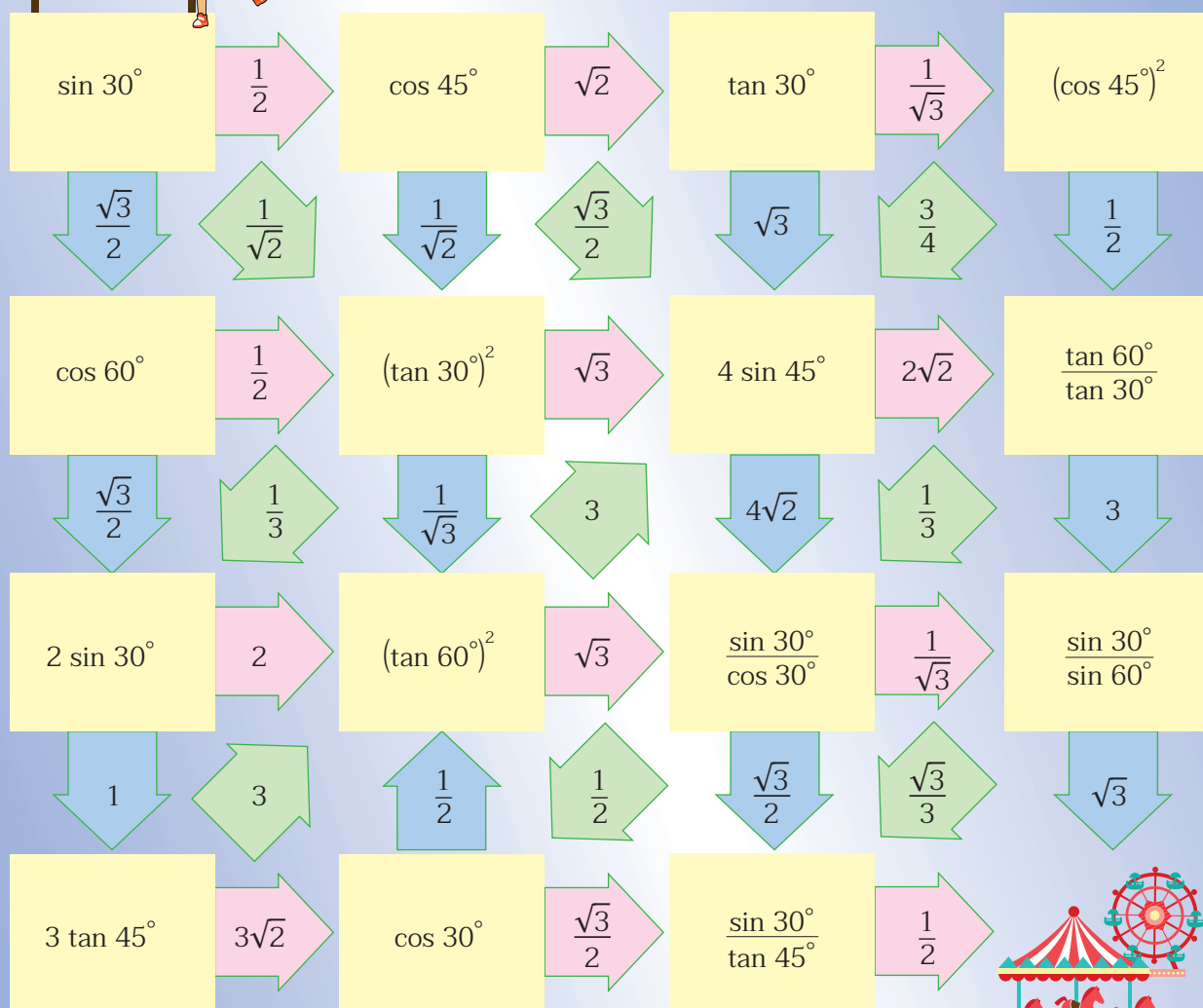




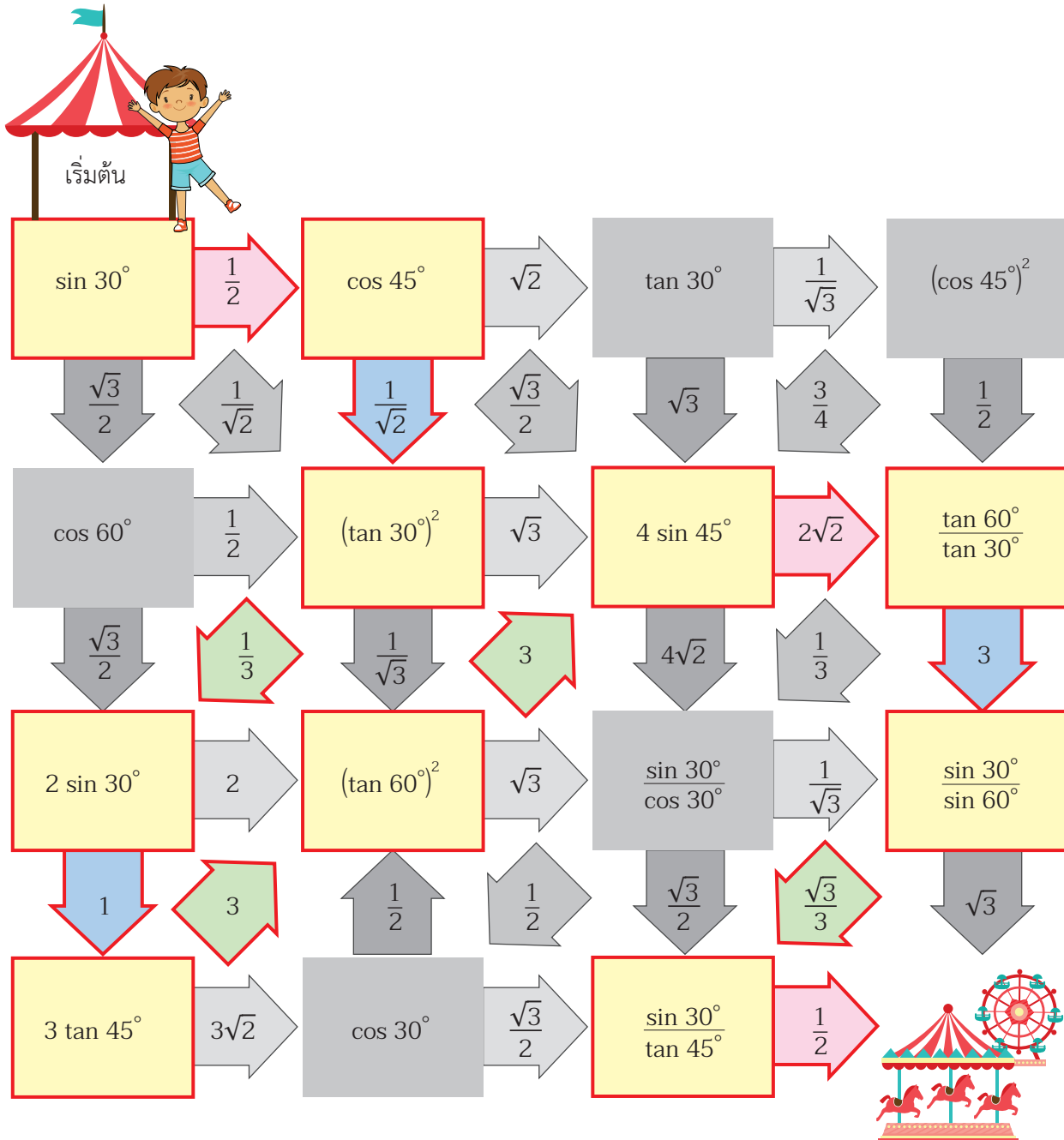
## ใบกิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ก : หาทางออก



สายฟ้าต้องการหาเส้นทางเพื่อไปเที่ยวสนุก โดยสายฟ้าจะต้องเลือกเส้นทางที่เป็นคำตอบของกระเบื้องปริศนาที่ตนเองยืนอยู่ เพื่อนำไปสู่กระเบื้องปริศนาถัดไป ให้นักเรียนช่วยสายฟ้าหาทางออกไปยังสวนสนุก



## เฉลยใบกิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ก : หาทงออก



## กิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ข : ขนาดของมุม

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่เน้นให้นักเรียนฝึกทักษะการประมาณค่าขนาดของมุมแหลมจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ โดยใช้ค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ จากตารางแสดงค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และ ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

1. ใบกิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ข : ขนาดของมุม
2. ตารางแสดงค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติ ในหนังสือเรียน หน้า 226–227



### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำใบกิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ข : ขนาดของมุม
2. ครูสุ่มนักเรียนออกมาเฉลยคำตอบ พร้อมทั้งอธิบายวิธีคิดและการได้มาซึ่งคำตอบ

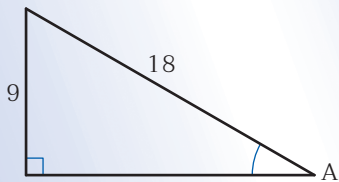




## ใบกิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ข : ขนาดของมุม

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาค่าประมาณของขนาดของมุม A (ตอบเป็นจำนวนเต็มหน่วย)

1.



แนวคิด

ตอบ

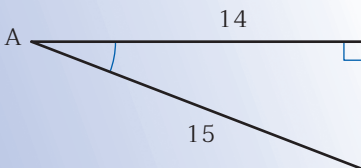
2.



แนวคิด

ตอบ

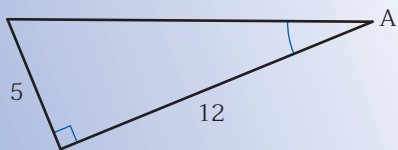
3.



แนวคิด

ตอบ

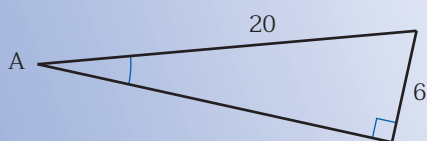
4.



แนวคิด

ตอบ

5.



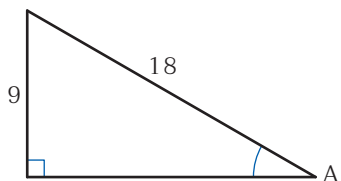
แนวคิด

ตอบ

## เฉลยใบกิจกรรมเสนอแนะ 5.2 ข : ขนาดของมุม

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาค่าประมาณของขนาดของมุม A (ตอบเป็นจำนวนเต็มหน่วย)

1.



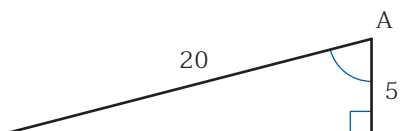
แนวคิด เนื่องจาก  $\sin A = \frac{9}{18} = 0.5$

จากตาราง  $\sin 30^\circ = 0.5$

ดังนั้น  $\hat{A} = 30^\circ$

ตอบ  $30^\circ$

2.



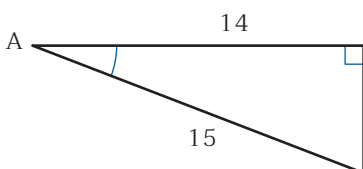
แนวคิด เนื่องจาก  $\cos A = \frac{5}{20} = 0.25$

จากตาราง  $\cos 76^\circ \approx 0.242$

ดังนั้น  $\hat{A} \approx 76^\circ$

ตอบ  $76^\circ$

3.



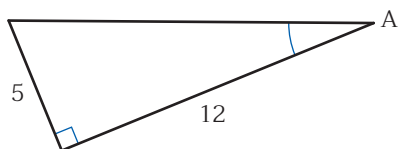
แนวคิด เนื่องจาก  $\cos A = \frac{14}{15} = 0.933$

จากตาราง  $\cos 21^\circ \approx 0.934$

ดังนั้น  $\hat{A} \approx 21^\circ$

ตอบ  $21^\circ$

4.



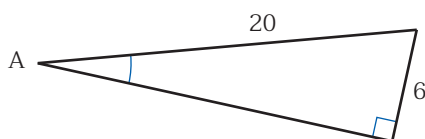
แนวคิด เนื่องจาก  $\tan A = \frac{5}{12} = 0.417$

จากตาราง  $\tan 23^\circ \approx 0.425$

ดังนั้น  $\hat{A} \approx 23^\circ$

ตอบ  $23^\circ$

5.



แนวคิด เนื่องจาก  $\sin A = \frac{6}{20} = 0.3$

จากตาราง  $\sin 17^\circ \approx 0.292$

ดังนั้น  $\hat{A} \approx 17^\circ$

ตอบ  $17^\circ$

## เฉลยชวนคิด



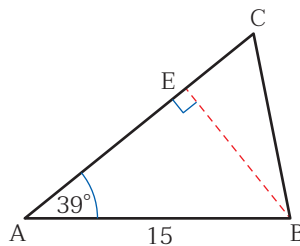
ipst.me/11446

### ชวนคิด 5.3

นักเรียนสามารถหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  โดยพิจารณาว่า  $\overline{AC}$  หรือ  $\overline{CB}$  เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยมได้ ดังนี้

- ❖ การหาพื้นที่ของ  $\triangle ABC$  โดยพิจารณาว่า  $\overline{AC}$  เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยม

**แนวคิด** ถ้าให้  $\overline{AC}$  เป็นฐานของ  $\triangle ABC$  ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมสามารถสร้างได้จากการลาก  $\overline{BE}$  ตั้งฉากกับ  $\overline{AC}$  ให้จุดตั้งฉากคือ จุด  $E$  จากนั้น จึงใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติเพื่อหา  $BE$



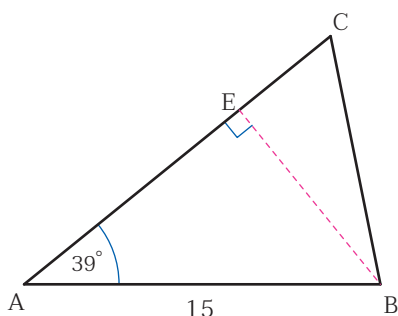
$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } \triangle AEB \quad \text{จะได้} \quad \sin 39^\circ &= \frac{BE}{15} \\ BE &= 15 \sin 39^\circ \\ &\approx 15 \times 0.629 \\ &\approx 9.435 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2} \times AC \times BE \\ &\approx \frac{1}{2} \times 16.6 \times 9.435 \\ &\approx 78.311 \end{aligned}$$

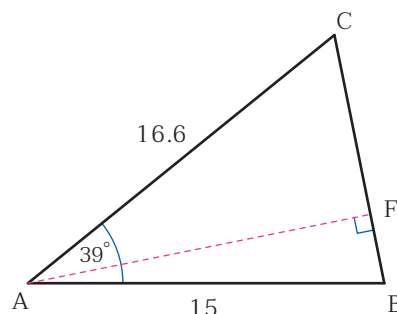
นั่นคือ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  ประมาณ 78.311 ตารางหน่วย

- ❖ การหาพื้นที่ของ  $\triangle ABC$  โดยพิจารณาว่า  $\overline{BC}$  เป็นฐานของรูปสามเหลี่ยม

**แนวคิด** ถ้าให้  $\overline{BC}$  เป็นฐานของ  $\triangle ABC$  ต้องทราบความยาวของฐานและความสูง ซึ่งส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมสามารถสร้างได้จากการลาก  $\overline{AF}$  ตั้งฉากกับ  $\overline{BC}$  ให้จุดตั้งฉากคือ จุด  $F$  จากนั้นจึงหาขนาดของ  $\angle \hat{A}BC$  หรือ  $\angle \hat{A}CB$  แล้วจึงใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติของ  $\angle \hat{A}BC$  หรือ  $\angle \hat{A}CB$  เพื่อหา  $AF$



รูปที่ 1



รูปที่ 2

สำหรับความยาวของฐาน หรือ BC จำเป็นต้องอาศัยรูปจากกรณีที่ใช้  $\overline{AC}$  เป็นฐาน เพื่อหา AE, EC และ BC ตามลำดับ ดังนี้

จากรูปที่ 1 พิจารณา  $\triangle AEB$  จะได้  $\cos 39^\circ = \frac{AE}{15}$   
 $AE = 15 \cos 39^\circ$   
 $\approx 15 \times 0.777$   
 $\approx 11.655$

เนื่องจาก  $EC = AC - AE$   
 $\approx 16.6 - 11.655$   
 $\approx 4.945$

พิจารณา  $\triangle BEC$  โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้  $BC^2 = BE^2 + EC^2$   
 $\approx 9.435^2 + 4.945^2$   
 $\approx 113.472$

ดังนั้น  $BC \approx 10.652$

เนื่องจาก  $\cos \widehat{BCE} = \frac{EC}{BC} = \frac{4.945}{10.652} \approx 0.464$

และ  $\cos 62^\circ \approx 0.470$

ดังนั้น  $\widehat{BCE} \approx 62^\circ$  และ  $\widehat{ABC} \approx 79^\circ$

จากรูปที่ 2 เนื่องจาก  $\widehat{ABF} = \widehat{ABC} = 79^\circ$

พิจารณา  $\triangle AFB$  จะได้  $\sin 79^\circ = \frac{AF}{15}$   
 $AF = 15 \sin 79^\circ$   
 $\approx 15 \times 0.982$   
 $\approx 14.73$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AF \\
 &\approx \frac{1}{2} \times 10.652 \times 14.73 \\
 &\approx 78.452
 \end{aligned}$$

นั่นคือ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ประมาณ 78.452 ตารางหน่วย

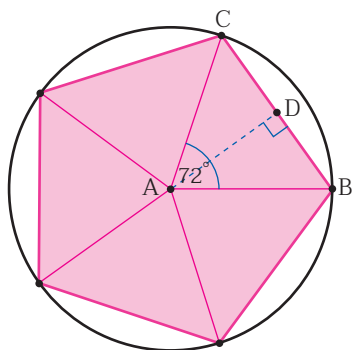


ipst.me/11447

### ชวนคิด 5.4

**แนวคิด** พิจารณาการหาพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า สิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และยี่สิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ดังรูปที่ 1–3 ต่อไปนี้ เพื่อหาสูตรที่ใช้ในการหาพื้นที่ของรูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

**รูป 1** เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย



พิจารณา  $\triangle ABC$  ในรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

$$\text{จะได้ } \widehat{BAC} = \frac{360}{5} = 72^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{BAD} = 36^\circ$$

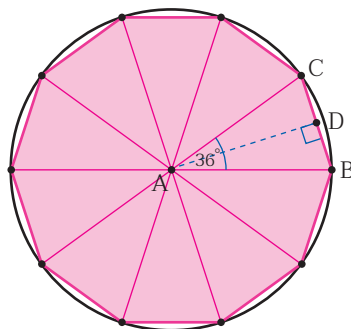
$$\text{จะได้ } BD = \sin 36^\circ \text{ และ } AD = \cos 36^\circ$$

$$\text{และ } BC = 2BD = 2 \sin 36^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AD \\
 &= \frac{1}{2} \times 2 \sin 36^\circ \times \cos 36^\circ \\
 &= (\sin 36^\circ)(\cos 36^\circ)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ พื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย} \\
 &= 5(\sin 36^\circ)(\cos 36^\circ) \\
 &\approx 5 \times 0.588 \times 0.809 \\
 &\approx 2.37846 \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$

รูป 2 เป็นรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย



พิจารณา  $\triangle ABC$  ในรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

$$\text{จะได้ } \widehat{BAC} = \frac{360}{10} = 36^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{BAD} = 18^\circ$$

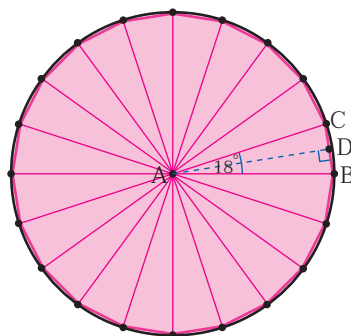
$$\text{จะได้ } BD = \sin 18^\circ \text{ และ } AD = \cos 18^\circ$$

$$\text{และ } BC = 2BD = 2 \sin 18^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AD \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \sin 18^\circ \times \cos 18^\circ \\ &= (\sin 18^\circ)(\cos 18^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ พื้นที่ของรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย} \\ &= 10(\sin 18^\circ)(\cos 18^\circ) \\ &\approx 2.93859 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

รูป 3 เป็นรูปยี่สิบเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย



พิจารณา  $\triangle ABC$  ในรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

$$\text{จะได้ } \widehat{BAC} = \frac{360}{20} = 18^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{BAD} = 9^\circ$$

$$\text{จะได้ } BD = \sin 9^\circ \text{ และ } AD = \cos 9^\circ$$

$$\text{และ } BC = 2BD = 2 \sin 9^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AD \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \sin 9^\circ \times \cos 9^\circ = (\sin 9^\circ)(\cos 9^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย} \\ &= 20(\sin 9^\circ)(\cos 9^\circ) \\ &\approx 3.08256 \quad \text{ตารางหน่วย} \end{aligned}$$

จากการพิจารณาแบบรูปที่ใช้ในการหาพื้นที่ใน รูป 1 ถึงรูป 3 ข้างต้น จะได้ว่าสูตรในการหาพื้นที่ของ รูป  $n$  เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย เท่ากับ  $n \times \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \times \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ของรูปหนึ่งหมื่นเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย} \\ &= 10,000 \times \sin 0.018^\circ \times \cos 0.018^\circ \\ &\approx 3.141592447 \end{aligned}$$

เมื่อเปรียบเทียบพื้นที่ของรูปหนึ่งหมื่นเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย กับค่าของ  $\pi$  ซึ่งค่าประมาณของ  $\pi$  ถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 8 คือ 3.14159265 จะพบว่าพื้นที่ของรูปหนึ่งหมื่นเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย มีค่าเข้าใกล้ค่าของ  $\pi$  โดยถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 6

## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 5.2 ก

1. 1)  $\sin 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
- 2)  $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
- 3)  $\tan 45^\circ - (\sin 60^\circ)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \sqrt{3} \cos 30^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ + \sqrt{2} \sin 45^\circ &= \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} \\
 &= \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{1}{(\cos 30^\circ)^2} - (\tan 30^\circ)^2 &= \frac{1}{\left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} - \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad (\tan 60^\circ)^2 + \frac{\cos 60^\circ}{\sqrt{3}} + \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} &= (\sqrt{3})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
 &= 3 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \\
 &= 3 + \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \\
 &= 3 + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{21 + \sqrt{3}}{6}
 \end{aligned}$$

2. 1) **แนวคิด** จากรูป จะได้  $\sin 45^\circ = \frac{5}{x}$

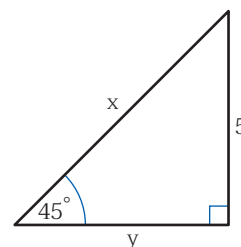
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{x}$$

ดังนั้น  $x = 5\sqrt{2}$  หน่วย

จากรูป จะได้  $\tan 45^\circ = \frac{5}{y}$

$$1 = \frac{5}{y}$$

ดังนั้น  $y = 5$  หน่วย



หมายเหตุ นักเรียนอาจหาค่า  $y$  โดยใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



2) แนวคิด จากรูป จะได้  $\cos 60^\circ = \frac{x}{13\sqrt{2}}$

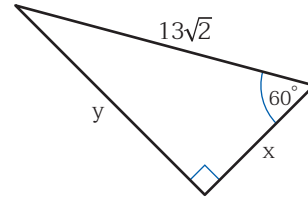
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{13\sqrt{2}}$$

ดังนั้น  $x = \frac{13\sqrt{2}}{2}$  หน่วย

จากรูป จะได้  $\sin 60^\circ = \frac{y}{13\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{13\sqrt{2}}$$

ดังนั้น  $y = \frac{13\sqrt{6}}{2}$  หน่วย

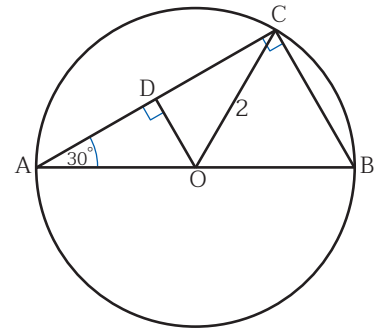


3. แนวคิด เนื่องจาก  $\triangle ACO$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ  $\angle ACO = 30^\circ$  จะได้  $\angle CAO = 30^\circ$

พิจารณา  $\triangle DCO$  จะได้  $\cos 30^\circ = \frac{CD}{OC}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CD}{2}$$

ดังนั้น  $CD = \sqrt{3}$  หน่วย



4. แนวคิด พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก CBD

จะได้  $\tan 30^\circ = \frac{CD}{24}$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{CD}{24}$$

ดังนั้น  $CD = 8\sqrt{3}$  หน่วย

เนื่องจาก  $\triangle ACD$  มีพื้นที่  $32\sqrt{39}$  ตารางหน่วย

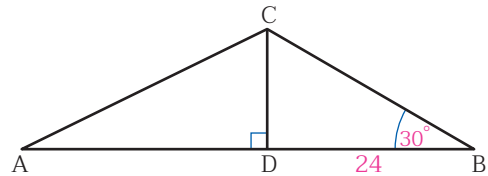
ดังนั้น  $32\sqrt{39} = \frac{1}{2} \times AD \times 8\sqrt{3}$

$$AD = 8\sqrt{13} \text{ หน่วย}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD

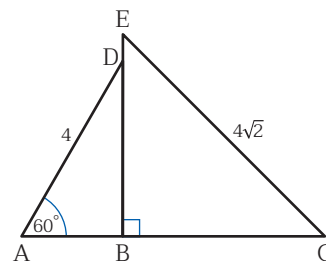
$$\begin{aligned} \text{โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ } AC^2 &= AD^2 + CD^2 \\ &= (8\sqrt{13})^2 + (8\sqrt{3})^2 \\ &= 1,024 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $AC = 32$  หน่วย



5. **แนวคิด** พิจารณา  $\triangle ABD$  จะได้  $\sin 60^\circ = \frac{BD}{AD}$   

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BD}{4}$$
  
 ดังนั้น  $BD = 2\sqrt{3}$  หน่วย



พิจารณา  $\triangle BEC$  เนื่องจาก  $\triangle BEC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว ดังนั้น  $\angle BCE = 45^\circ$

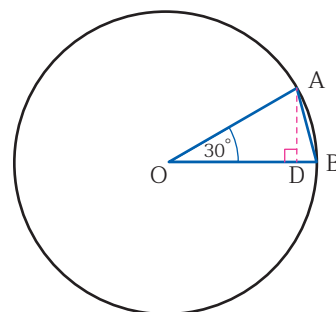
- จะได้  $\sin 45^\circ = \frac{BE}{CE}$   

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BE}{4\sqrt{2}}$$
  
 ดังนั้น  $BE = 4$  หน่วย  
 นั่นคือ  $DE = BE - BD = 4 - 2\sqrt{3}$  หน่วย

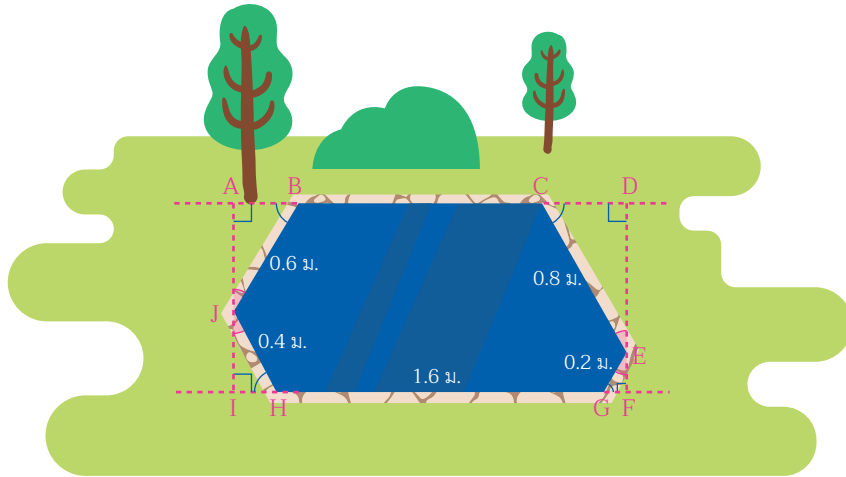
6. **แนวคิด** ลาก  $\overline{AD}$  ตั้งฉากกับ  $\overline{OB}$  ที่จุด D จะได้  $\angle ADO = 90^\circ$   
 พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADO

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \sin 30^\circ &= \frac{AD}{AO} \\ \frac{1}{2} &= \frac{AD}{10} \\ AD &= 5 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABO} &= \frac{1}{2} \times BO \times AD \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \\ &= 25 \text{ ตารางหน่วย} \end{aligned}$$



## 7. แนวคิด



ต่อ  $\overline{BC}$  และ  $\overline{HG}$  ออกไปทั้งสองข้าง

จากจุด J และจุด E ลากเส้นไปตั้งฉากกับ  $\overline{BC}$  ที่จุด A และจุด D ตามลำดับ และให้  $\overline{JA}$ ,  $\overline{ED}$  ตัดกับ  $\overline{HG}$  ที่จุด I และจุด F ตามลำดับ ดังรูป

จะได้  $\hat{I} = \hat{F} = 90^\circ$  ด้วย

เนื่องจากกำหนดมุมภายในแต่ละมุมของรูปหกเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับ  $120^\circ$

ดังนั้น มุมที่ระบายด้วยสีเขียวมีขนาดเท่ากับ  $60^\circ$  และมุมที่ระบายด้วยสีชมพูมีขนาดเท่ากับ  $30^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABJ

$$\text{เนื่องจาก} \quad \sin 30^\circ = \frac{AB}{BJ}$$

$$\text{จะได้} \quad \frac{1}{2} = \frac{AB}{0.6}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad AB = 0.3$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad \sin 60^\circ = \frac{AJ}{BJ}$$

$$\text{จะได้} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AJ}{0.6}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad AJ = 0.3\sqrt{3}$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABJ} = \frac{1}{2} \times AB \times AJ$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABJ} &= \frac{1}{2} \times 0.3 \times 0.3\sqrt{3} \\ &= \frac{0.09\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{200} \quad \text{ตารางเมตร} \end{aligned}$$

เนื่องจากโจทย์กำหนดความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากของ  $\triangle CDE$ ,  $\triangle EFG$ ,  $\triangle HIJ$  ในทำนองเดียวกันกับการหาพื้นที่  $\triangle ABJ$

$$\text{จะได้ } CD = 0.4, DE = 0.4\sqrt{3}$$

$$\text{และ พื้นที่ } \triangle CDE = \frac{1}{2} \times 0.4 \times 0.4\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{25} \text{ ตารางเมตร}$$

$$EF = 0.1\sqrt{3}, FG = 0.1$$

$$\text{และ พื้นที่ } \triangle EFG = \frac{1}{2} \times 0.1 \times 0.1\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{200} \text{ ตารางเมตร}$$

$$HI = 0.2, IJ = 0.2\sqrt{3}$$

$$\text{และ พื้นที่ } \triangle HIJ = \frac{1}{2} \times 0.2 \times 0.2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{50} \text{ ตารางเมตร}$$

เนื่องจาก พื้นที่รูปหกเหลี่ยม BCEGHJ

$$= \text{พื้นที่ } \square ADFI - \text{พื้นที่ } \triangle ABJ - \text{พื้นที่ } \triangle CDE - \text{พื้นที่ } \triangle EFG - \text{พื้นที่ } \triangle HIJ$$

ต่อไปจึงหา พื้นที่  $\square ADFI$

$$AI = AJ + JI = 0.3\sqrt{3} + 0.2\sqrt{3} = 0.5\sqrt{3}$$

$$IF = IH + HG + GF = 0.2 + 1.6 + 0.1 = 1.9$$

$$\text{และพื้นที่ } \square ADFI = (0.5\sqrt{3})(1.9) = \frac{19\sqrt{3}}{20} \text{ ตารางเมตร}$$

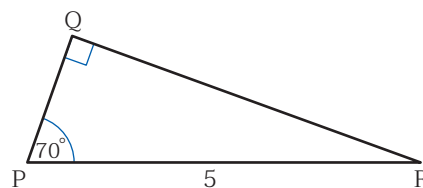
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่รูปหกเหลี่ยม BCEGHJ} &= \frac{19\sqrt{3}}{20} - \left( \frac{9\sqrt{3}}{200} + \frac{2\sqrt{3}}{25} + \frac{\sqrt{3}}{200} + \frac{\sqrt{3}}{50} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

$$\approx 1.39 \text{ ตารางเมตร}$$

ดังนั้น บ่อเลี้ยงปลาส่วนที่จะใส่น้ำให้ลึก 1 เมตร มีความจุประมาณ  $1.39 \times 1 = 1.39$  ลูกบาศก์เมตร นั่นคือ พร้าวิควรจะส่งซื้อน้ำทะเลมาประมาณ 1.39 ลูกบาศก์เมตร

### แบบฝึกหัด 5.2 ข

1. 1) แนวคิด จากรูป จะได้  $\sin 70^\circ = \frac{QR}{5}$   
 $QR = 5 \sin 70^\circ$   
 จากตาราง  $\sin 70^\circ \approx 0.940$   
 ดังนั้น  $QR \approx 4.7$  หน่วย  
 จากรูปจะได้  $\cos 70^\circ = \frac{PQ}{5}$   
 $PQ = 5 \cos 70^\circ$



จากตาราง  $\cos 70^\circ \approx 0.342$   
 ดังนั้น  $PQ \approx 1.71$  หน่วย

2) **แนวคิด** จากรูป จะได้  $\sin 52^\circ = \frac{19.7}{PR}$   

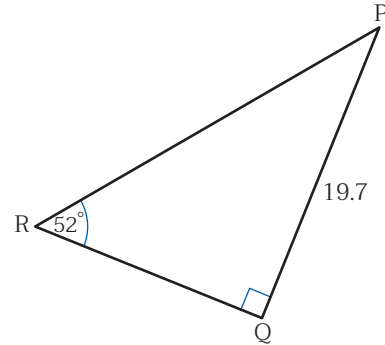
$$PR = \frac{19.7}{\sin 52^\circ}$$

จากตาราง  $\sin 52^\circ \approx 0.788$   
 ดังนั้น  $PR \approx 25$  หน่วย

จากรูปจะได้  $\tan 52^\circ = \frac{19.7}{QR}$   

$$QR = \frac{19.7}{\tan 52^\circ}$$

จากตาราง  $\tan 52^\circ \approx 1.280$   
 ดังนั้น  $QR \approx 15.39$  หน่วย



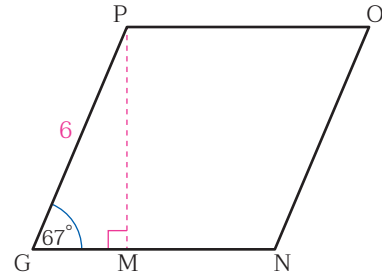
2. **แนวคิด** จากรูป สร้างส่วนสูง PM บนฐาน GN ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน PONG  
 พิจารณา รูปสามเหลี่ยม PMG

จะได้  $\sin 67^\circ = \frac{PM}{6}$   

$$PM = 6 \sin 67^\circ$$

จากตาราง  $\sin 67^\circ \approx 0.921$   
 ดังนั้น  $PM \approx 5.526$  หน่วย

นั่นคือ รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน PONG มีพื้นที่  
 ประมาณ  $6 \times 5.526 = 33.156$  ตารางหน่วย



3. **แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพได้ดังนี้

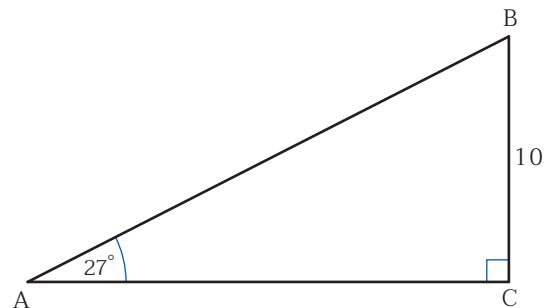
จากรูปจะได้  $\sin 27^\circ = \frac{10}{AB}$   

$$AB = \frac{10}{\sin 27^\circ}$$

จากตาราง  $\sin 27^\circ \approx 0.454$   
 ดังนั้น  $AB \approx 22.026$  หน่วย

จากรูปจะได้  $\tan 27^\circ = \frac{10}{CA}$   

$$CA = \frac{10}{\tan 27^\circ}$$



จากตาราง  $\tan 27^\circ \approx 0.510$

ดังนั้น  $CA \approx 19.608$  หน่วย

นั่นคือ  $\triangle ABC$  มีความยาวรอบรูปประมาณ  $10 + 22.026 + 19.608 = 51.634$  หน่วย

4. แนวคิด ให้รูปสี่เหลี่ยมคางหมู PRST มีส่วนสูงยาว  $h$  หน่วย ดังรูป

พิจารณา  $\triangle QTS$

จะได้  $\cos \widehat{TSQ} = \frac{15.1}{20} = 0.755$

จากตาราง  $\cos 41^\circ \approx 0.755$

ดังนั้น  $\widehat{TSQ} \approx 41^\circ$

พิจารณา  $\triangle USQ$

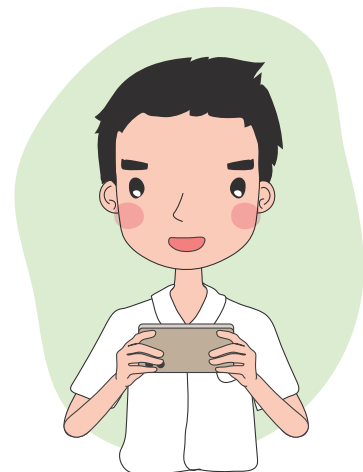
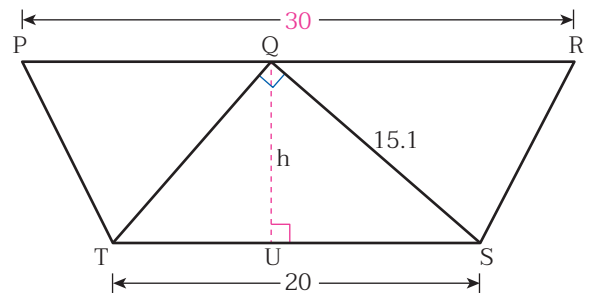
จะได้  $\sin 41^\circ = \frac{h}{15.1}$

$$h = 15.1 \sin 41^\circ$$

จากตาราง  $\sin 41^\circ \approx 0.656$

ดังนั้น  $h \approx 9.906$  หน่วย

นั่นคือ รูปสี่เหลี่ยมคางหมู PRST มีพื้นที่ประมาณ  $\frac{1}{2} \times (30 + 20) \times 9.906 = 247.65$  ตารางหน่วย



## 5.3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา (4 ชั่วโมง)

### จุดประสงค์

นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง

### ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน

### สื่อที่แนะนำให้ใช้ในข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

อุปกรณ์ของกิจกรรม : สูงเท่าใดกันนะ

### ข้อเสนอแนะในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ในหัวข้อนี้ เป็นเรื่องการนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่นักเรียนอาจพบได้ในชีวิตประจำวันหรือในสิ่งแวดล้อมรอบตัว ทำให้นักเรียนเห็นการใช้งานของอัตราส่วนตรีโกณมิติในชีวิตจริง ซึ่งเป็นการเรียนรู้ที่มีความหมาย ครูควรฝึกให้นักเรียนสร้างแบบจำลองทางเรขาคณิตแทนปัญหาหรือสถานการณ์ที่จะนำไปสู่การใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติในการแก้ปัญหา ซึ่งในกระบวนการดังกล่าว นักเรียนจะได้พัฒนาความสามารถในการนิภาพ และการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์แทนปัญหา แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อาจทำได้ดังนี้

1. ครูและนักเรียนร่วมกันสนทนาเกี่ยวกับสถานการณ์ในชีวิตจริงที่เกี่ยวข้องกับการใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติในการแก้ปัญหา เช่น การหาความสูงของตึก การหาความกว้างของคลอง และตัวอย่างอื่น ๆ ที่นักเรียนสามารถนิภาพตามได้ เพื่อกระตุ้นความสนใจให้นักเรียนคิดหาวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ  
จากนั้น ให้นักเรียนฝึกการนิภาพเกี่ยวกับสถานการณ์ที่กำหนดให้ และวาดภาพจำลอง เพื่อวิเคราะห์และทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนเห็นแนวทางการแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น ทั้งนี้ เมื่อวาดภาพจำลองแทนสถานการณ์แล้ว ครูควรฝึกให้นักเรียนพิจารณาว่า จะต้องใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติใดในการแก้ปัญหา
2. ครูอธิบายเกี่ยวกับมุมก้มและมุมเงย โดยเน้นย้ำให้นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับมุมที่เกิดจากการมองเมื่อเทียบกับแนวเส้นระดับสายตา ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนวาดภาพจำลองแทนสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง
3. ครูให้นักเรียนทำ “กิจกรรม : สูงเท่าใดกันนะ” ในหนังสือเรียน หน้า 234–235 เพื่อให้นักเรียนเข้าใจวิธีการนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่มักพบในชีวิตจริง เช่น การหาความสูงของหลังคาของอาคารเรียน หรือยอดเสาธง หากพบว่าความสูงของตำแหน่งที่ต้องการจะวัดที่แต่ละกลุ่มหาได้แตกต่างกัน ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันแก้ปัญหาเพื่อสรุปความสูงของตำแหน่งที่ต้องการจะวัด

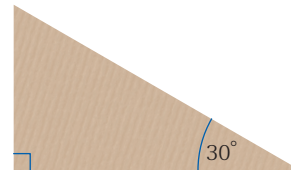
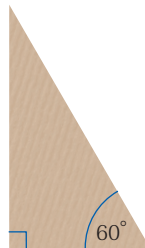
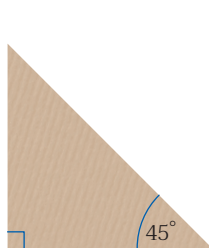
## กิจกรรม : สูงเท่าใดกันนะ

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่มุ่งให้นักเรียนเข้าใจวิธีการนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการหาความสูงของตำแหน่งที่ต้องการจากสถานการณ์จริง โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

- กระดาษลูกฟูกที่ตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 3 รูป โดยแต่ละรูปมีด้านด้านหนึ่งยาวอย่างน้อย 30 เซนติเมตร และมีขนาดของมุมที่แตกต่างกัน ดังรูป



- ไม้เมตร หรือตลับเมตร



### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

- ครูแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำ “กิจกรรม : สูงเท่าใดกันนะ” ในหนังสือเรียน หน้า 234–235
- ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอผลงานของกลุ่ม พร้อมทั้งอธิบายวิธีคิดและการได้มาซึ่งคำตอบ
- ครูให้นักเรียนเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากทั้งสามกลุ่มว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร หากพบว่าความสูงของตำแหน่งที่ต้องการจะวัดที่แต่ละกลุ่มหาได้แตกต่างกัน ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันแก้ปัญหาเพื่อสรุปความสูงของตำแหน่งที่ต้องการจะวัด
- ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายและสรุปที่มาของสูตรที่ใช้ในการหาความสูงของตำแหน่งที่ต้องการวัด





## เฉลยกิจกรรม : สูงเท่าใดกันนะ

### ตัวอย่างคำตอบข้อ 8

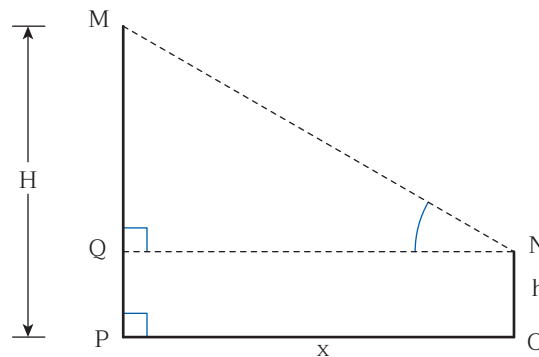
- ❖ กรณีที่ความสูงที่หาได้ของแต่ละกลุ่มใกล้เคียงกัน อาจนำความสูงที่แต่ละกลุ่มได้มาหาค่าเฉลี่ย เพื่อสรุปเป็นความสูงของตำแหน่งที่ต้องการวัด
- ❖ กรณีที่ความสูงที่หาได้ของแต่ละกลุ่มแตกต่างกันมาก ต้องตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณ วิธีการวัด เพื่อหาข้อผิดพลาด แล้วแก้ไขข้อผิดพลาดนั้น

### ตัวอย่างคำตอบข้อ 9

กำหนด จุด M แทนตำแหน่งที่ต้องการจะวัดความสูง

$\overline{NQ}$  แทนแนวเส้นระดับสายตา

ON แทนความสูงจากพื้นถึงตาของนักเรียนที่เป็นคนถือกระดาดาลูกฟูก



จากรูป พิจารณา  $\triangle MNQ$  จะได้  $\tan \widehat{MNQ} = \frac{MQ}{NQ}$

เนื่องจาก  $\widehat{A} = \widehat{MNQ}$ ,  $MQ = H - h$  และ  $NQ = x$

$$\text{จะได้ } \tan A = \frac{MQ}{NQ}$$

$$\tan A = \frac{H - h}{x}$$

$$\text{ดังนั้น } H = x \tan A + h$$

## เฉลยชวนคิด



ipst.me/11448

### ชวนคิด 5.5

**แนวคิด** จากการทำ “กิจกรรม : สูงเท่าใดกันนะ” หากสถานที่ไม่เอื้ออำนวย เช่น มีพื้นที่จำกัด จึงทำให้ไม่สามารถเดินถอยออกไปได้มากนัก เราควรแก้ปัญหาโดยใช้กระดาษลูกฟูกรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมซึ่งมีขนาดมากกว่าที่มีอยู่ในการวัด โดยเพิ่มขนาดของมุมที่กระดาษลูกฟูกจนนักเรียนสามารถมองตามแนวเส้นด้านตรงข้ามมุมฉากของกระดาษลูกฟูกที่ยังคงจัดวางในแนวระดับสายตา และนักเรียนสามารถมองเห็นตำแหน่งที่ต้องการจะวัดความสูงผ่านแนวเส้นดังกล่าว จากนั้นทำกิจกรรมเช่นเดียวกับการทำ “กิจกรรม : สูงเท่าใดกันนะ” ก็จะสามารถหาความสูงของสิ่งที่ต้องการวัดได้



ipst.me/11449

### ชวนคิด 5.6

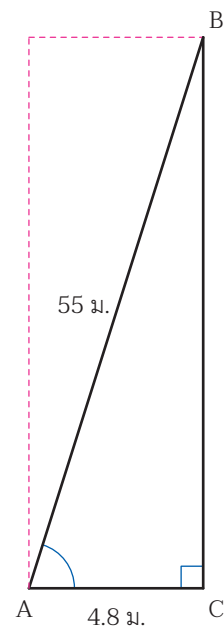
**แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพได้ดังนี้

เมื่อจุด A แทนจุดที่ฐานของหอเอนเมืองปิซ่า  
 B แทนจุดยอดของหอเอนเมืองปิซ่า จุดที่ออโรราปล่อยตุ๊กตาหมี  
 C แทนจุดที่ตุ๊กตาหมีตกลงถึงพื้น

เนื่องจากออโรราปล่อยตุ๊กตาหมีในแนวตั้ง  
 ดังนั้น  $\overline{BC}$  ตั้งฉากกับ  $\overline{AC}$   
 นั่นคือ  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากรูป  $\cos \hat{BAC} = \frac{AC}{BC} = \frac{4.8}{55} \approx 0.087$

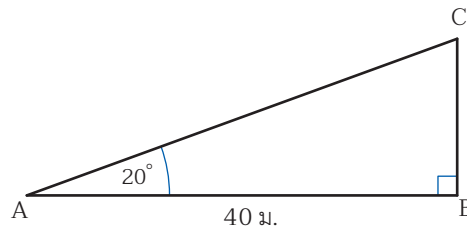
จากตาราง  $\cos 85^\circ \approx 0.087$   
 ดังนั้น  $\hat{BAC} \approx 85^\circ$   
 นั่นคือ หอเอนเมืองปิซ่าเอียงออกจากแนวตั้งฉาก  
 ประมาณ  $90 - 85 = 5$  องศา



## เฉลยแบบฝึกหัด

### แบบฝึกหัด 5.3

1. **แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ดังนี้



เมื่อจุด A แทนปลายเงาของต้นไม้

B แทนโคนของต้นไม้

C แทนยอดของต้นไม้

นั่นคือ AB แทนความยาวของเงา และ BC แทนความสูงของต้นไม้

จากภาพ จะได้  $\tan 20^\circ = \frac{BC}{40}$

จากตาราง  $\tan 20^\circ \approx 0.364$

ดังนั้น  $BC \approx 40 \times 0.364 = 14.56$  เมตร

นั่นคือ ต้นไม้มีความสูงประมาณ 14.56 เมตร

2. **แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ดังนี้

ให้  $\overline{AC}$  แทนบันได

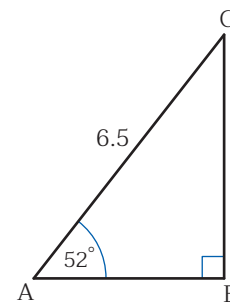
$\overline{BC}$  แทนกำแพง

จากรูป จะได้  $\sin 52^\circ = \frac{BC}{6.5}$

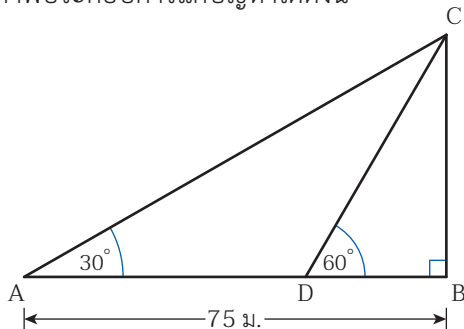
จากตาราง  $\sin 52^\circ \approx 0.788$

ดังนั้น  $BC \approx 5.122$

นั่นคือ กำแพงนี้สูงประมาณ 5.122 เมตร



3. **แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ดังนี้



ให้ A แทนจุดที่เด่นจันทร์ยืนอยู่ห่างจากเสาไฟในตอนแรก

D แทนจุดที่เด่นจันทร์ยืนอยู่หลังจากเดินเข้าหาเสาไฟฟ้าแล้ว 2 นาที

และ  $\overline{BC}$  แทนเสาไฟฟ้า

พิจารณา  $\triangle ABC$  จะได้  $\tan 30^\circ = \frac{BC}{75}$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BC}{75}$$

$$\text{ดังนั้น } BC = 25\sqrt{3} \text{ เมตร}$$

พิจารณา  $\triangle DBC$  จะได้  $\tan 60^\circ = \frac{BC}{BD}$

$$\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{BD}$$

$$\text{ดังนั้น } BD = 25 \text{ เมตร}$$

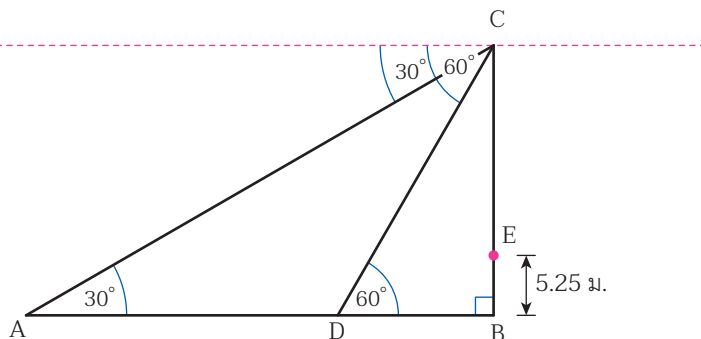
$$\text{จะได้ } AD = AB - BD$$

$$= 75 - 25 = 50 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น ในเวลา 2 นาที เด่นจันทร์เดินได้ 50 เมตร

นั่นคือ เด่นจันทร์เดินได้นาทีละ 25 เมตร

4. **แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ดังนี้



ให้ A และ D แทนจุดที่เรือทั้งสองลำจอดอยู่ในทะเล

EC แทนระดับความสูงจากชั้นล่างของตึกที่ชายคนนี้อยู่ที่ระบียงชั้นที่ 15 ของตึก และตึกนี้ตั้งอยู่บนฝั่งเหนือระดับน้ำทะเล 5.25 เมตร

จะได้ AD แทนระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองลำ

เนื่องจาก แต่ละชั้นของตึกนี้สูง 4.75 เมตร

จะได้  $BC = 5.25 + 14(4.75) + 1.75 = 73.5$  เมตร

พิจารณา  $\triangle ABC$  จะได้  $\tan 30^\circ = \frac{73.5}{AB}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{73.5}{AB}$$

ดังนั้น  $AB = 73.5\sqrt{3}$  เมตร

พิจารณา  $\triangle BDC$  จะได้  $\tan 60^\circ = \frac{73.5}{BD}$

$$\sqrt{3} = \frac{73.5}{BD}$$

ดังนั้น  $BD = \frac{73.5}{\sqrt{3}}$   
 $= \frac{73.5\sqrt{3}}{3}$  เมตร

เนื่องจาก  $AD = AB - BD$

$$\text{จะได้ } AD = 73.5\sqrt{3} - \frac{73.5\sqrt{3}}{3}$$

$$\approx 84.87 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น เรือทั้งสองลำห่างกันประมาณ 84.87 เมตร

## 5. แนวคิด จากโจทย์ อาจเขียนภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ดังนี้

ให้จุด A แทนยอดปราสาทในฉากหลัง

B แทนที่นั่งของแสนดี

C แทนที่นั่งของน้ำหวาน

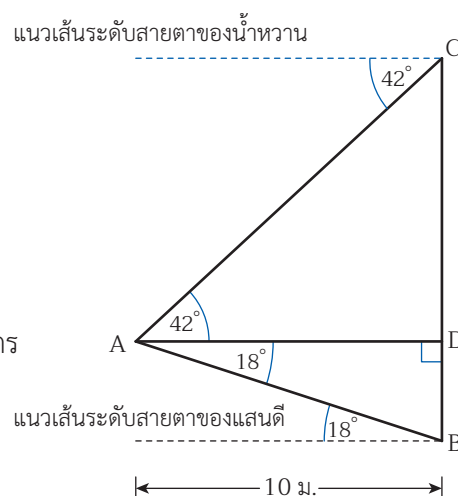
$\overline{AD}$  ตั้งฉากกับ  $\overline{BC}$  ที่จุด D

พิจารณา  $\triangle ADB$

จากภาพ จะได้  $\hat{BAD} = 18^\circ$  และ  $AD = 10$  เมตร

เนื่องจาก  $\tan 18^\circ = \frac{DB}{10}$

จากตาราง  $\tan 18^\circ \approx 0.325$



ดังนั้น  $DB \approx 3.25$  เมตร

พิจารณา  $\triangle ACD$

จากภาพ จะได้  $\widehat{CAD} = 42^\circ$

เนื่องจาก  $\tan 42^\circ = \frac{CD}{10}$

จากตาราง  $\tan 42^\circ \approx 0.900$

ดังนั้น  $CD \approx 9.00$  เมตร

นั่นคือ ระยะห่างในแนวดิ่งโดยประมาณของที่นั่งของแสนดีและน้ำหวานเป็น  $3.25 + 9 = 12.25$  เมตร

6. แนวคิด ให้ A แทนจุดที่ไอซ์เย็นอยู่  
B แทนจุดที่ออฟฟินอยู่  
 $\overline{CD}$  แทนหอนาฬิกาบิกเบน  
ให้ ออฟฟินห่างจากหอนาฬิกาบิกเบน  $x$  เมตร  
และหอนาฬิกาบิกเบนมีความสูง  $h$  เมตร

พิจารณา  $\triangle ACD$

จะได้  $\tan 49^\circ = \frac{h}{x + 38.72}$

จากตาราง  $\tan 49^\circ \approx 1.150$

ดังนั้น  $h \approx 1.15(x + 38.72)$  \_\_\_\_\_ ①

พิจารณา  $\triangle BCD$

จะได้  $\tan 65^\circ = \frac{h}{x}$

จากตาราง  $\tan 65^\circ \approx 2.145$

ดังนั้น  $h \approx 2.145x$  \_\_\_\_\_ ②

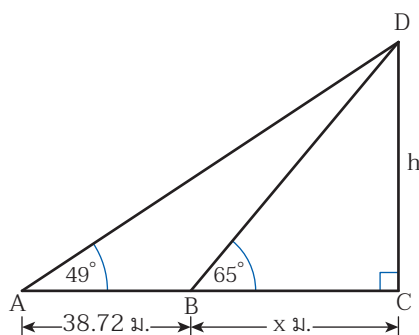
จากสมการ ① และ ② จะได้  $1.15(x + 38.72) = 2.145x$

ดังนั้น  $x \approx 44.75$  เมตร

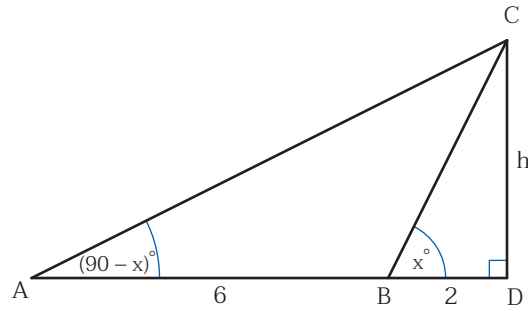
แทน  $x$  ด้วย 44.75 ในสมการ ② จะได้

$$h \approx 95.99 \text{ เมตร}$$

ดังนั้น หอนาฬิกาบิกเบนมีความสูงประมาณ 95.99 เมตร



7. แนวคิด จากโจทย์ อาจเขียนภาพได้ดังนี้  
ให้ A แทนจุดที่ปลายหมอกยื่นอยู่  
B แทนจุดที่แพรว้ายื่นอยู่  
และ C แทนภาพมะนาวบนผนังที่ทั้งสองคนมอง  
สมมติว่า  $CD = h$  เมตร



พิจารณา  $\triangle ABCD$  จะได้  $\tan B = \frac{h}{2}$  \_\_\_\_\_ ①

พิจารณา  $\triangle ACD$  เนื่องจาก  $\hat{ACD} = 180^\circ - 90^\circ - (90 - x)^\circ$   
 $= x^\circ$

จะได้  $\hat{ACD} = \hat{CBD}$

ดังนั้น  $\tan C = \tan B$

จะได้  $\tan B = \frac{8}{h}$  \_\_\_\_\_ ②

จากสมการ ① และ ② จะได้  $\frac{h}{2} = \frac{8}{h}$   
 $h^2 = 16$

$h = 4$  เมตร

ดังนั้น ภาพมะนาวผลนี้อยู่สูงจากพื้น 4 เมตร

8. 1) **แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพได้ดังนี้

เมื่อ จุด A แทนตำแหน่งของนายหนู

จุด B แทนตำแหน่งของรองนายหนู

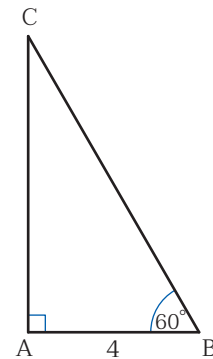
และ จุด C แทนตำแหน่งของตอไม้

จากรูป จะได้  $\tan 60^\circ = \frac{AC}{4}$

$\sqrt{3} = \frac{AC}{4}$

$AC = 4\sqrt{3}$

ดังนั้น คลองส่งน้ำนี้กว้างไม่เกิน  $4\sqrt{3}$  เมตร



2) ถ้านักเรียนเป็นนายหนูอาจจะให้รองนายหนูเดินไปทางขวา จนแนวระหว่างตอไม้กับรองนายหนูทำมุมกับแนวระหว่างนายหนูกับรองนายหนูเป็นมุม  $45^\circ$

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะได้ ระยะระหว่างตอไม้กับนายหนูเท่ากับระยะระหว่างนายหนูกับรองนายหนู

หรือ เนื่องจาก  $\tan 45^\circ = 1$  จะได้ ระยะระหว่างตอไม้กับนายหนูเท่ากับระยะระหว่างนายหนูกับรองนายหนู

## กิจกรรมท้ายบท : ชันนี้ผู้คำนวณรัศมีโลก

กิจกรรมนี้ เป็นกิจกรรมที่มีจุดประสงค์เพื่อให้นักเรียนเห็นประโยชน์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ ในการคำนวณหารัศมีของโลก ซึ่งดูเหมือนว่าจะเป็นปัญหาที่แก้ได้ยากหากไม่พึ่งพาเทคโนโลยี ในการทำกิจกรรมนี้ นักเรียนจะได้เห็นการเชื่อมโยงความรู้ในศาสตร์ต่าง ๆ เช่น ดาราศาสตร์ ฟิสิกส์ มาช่วยในการแก้ปัญหา โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม ดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

นาฬิกาจับเวลา



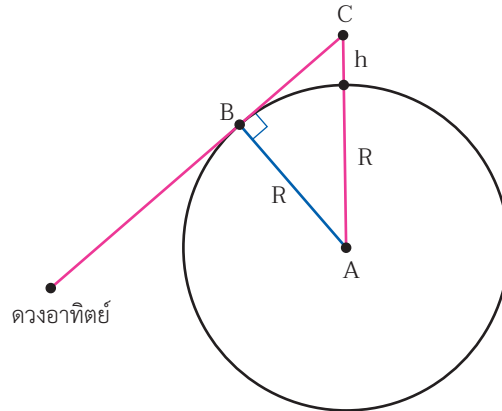
### ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรม

1. ครูให้นักเรียนแต่ละคนทำ “กิจกรรมท้ายบท : ชันนี้ผู้คำนวณรัศมีโลก” ในหนังสือเรียน หน้า 243–244 โดยครูควรเน้นย้ำให้นักเรียนเปลี่ยนหน่วยของข้อมูลที่ชันนี้มีอยู่ ให้เป็นหน่วยเดียวกันกับหน่วยที่ใช้ในการคำนวณตามสัดส่วนที่กำหนด
2. ครูให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ พร้อมทั้งอธิบายวิธีคิดและการได้มาซึ่งคำตอบ
3. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปข้อสังเกตที่ได้จากกิจกรรม





## เฉลยกิจกรรมท้ายบท : ชั้นนี้ผู้คำนวณรัศมีโลก



กำหนดให้ R แทน รัศมีของโลก

h แทน ความสูงจากพื้นราบถึงตาของชั้นนี้

B เป็นจุดที่ส่วนของเส้นตรง BC สัมผัสกับผิวโลก

เนื่องจาก ขนาดของมุมที่โลกหมุน สามารถประมาณได้ตามสัดส่วนต่อไปนี้

$$\frac{\text{เวลาที่เปลี่ยนแปลงไป (ชม.)}}{24 \text{ ชม.}} = \frac{\text{ขนาดของมุมที่โลกหมุน}}{360^\circ}$$

$$\text{จะได้ว่า } \text{ขนาดของมุมที่โลกหมุน} = \frac{360 \times \text{เวลาที่เปลี่ยนแปลงไป}}{24}$$

$$= 15 \times \text{เวลาที่เปลี่ยนแปลงไป}$$

ถ้าตาของชั้นนี้อยู่ห่างจากพื้นราบเป็นระยะ 165 เซนติเมตร หรือ 0.00165 กิโลเมตร

และ ระยะเวลาที่เปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ 10 วินาที หรือ  $\frac{1}{360}$  ชั่วโมง

$$\text{จะได้ว่า } \text{ขนาดของมุมที่โลกหมุน} = 15 \times \frac{1}{360} = \frac{1}{24} \text{ องศา}$$

$$\text{เนื่องจาก } \cos \hat{CAB} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{จะได้ว่า } \cos \left( \frac{1}{24} \right)^\circ = \frac{R}{R + h}$$

$$0.99999974 \approx \frac{R}{R + 0.00165}$$

$$R \approx 6,346.15 \text{ กิโลเมตร}$$

ดังนั้น รัศมีเฉลี่ยของโลกที่ชั้นนี้ประมาณได้ คือ 6,346.15 กิโลเมตร

## เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท

1.
  - 1) (1)  $X = \widehat{ECG}$   
 (2)  $X = \widehat{FDA}$   
 (3)  $X = \widehat{CBD}$
  - 2) (1) **แนวคิด** เนื่องจาก  $\triangle ABD$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว จะได้  $\widehat{ABD} = 45^\circ$   
 ดังนั้น  $\sin \widehat{ABD} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 (2) **แนวคิด** เนื่องจาก  $BE = EC = CB$  จะได้  $\triangle BEC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  
 ดังนั้น  $\widehat{EBG} = 60^\circ$  จะได้  $\widehat{BEG} = 30^\circ$   
 ดังนั้น  $\cos \widehat{BEG} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (3) **แนวคิด** เนื่องจาก  $\triangle BEC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  
 จะได้  $\widehat{GCE} = 60^\circ$  ดังนั้น  $\tan \widehat{GCE} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$
2.
  - 1) ถูกต้อง เพราะว่าผลรวมของขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ  $180^\circ$  และ มุม  $C$  มีขนาด  $90^\circ$   
 ดังนั้น  $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^\circ$   
 นั่นคือ  $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{A}$
  - 2) ถูกต้อง เพราะว่า จากรูป จะได้  $\sin A = \frac{a}{c}$  และ  $\cos B = \frac{a}{c}$
  - 3) ถูกต้อง เพราะว่า จากรูป จะได้  $\tan A = \frac{a}{b}$ ,  $\sin A = \frac{a}{c}$  และ  $\cos A = \frac{b}{c}$   
 ดังนั้น  $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$
  - 4) ถูกต้อง เพราะว่า  $\sin A = \frac{a}{c}$  และ  $a, c > 0$  จะได้  $\frac{a}{c} > 0$   
 เนื่องจากด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด  
 จะได้  $a < c$   
 ดังนั้น  $\frac{a}{c} < 1$  นั่นคือ  $0 < \sin A < 1$
  - 5) ถูกต้อง เพราะว่า  $\cos A = \frac{b}{c}$  และ  $b, c > 0$  จะได้  $\frac{b}{c} > 0$   
 เนื่องจากด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด  
 จะได้  $b < c$   
 ดังนั้น  $\frac{b}{c} < 1$  นั่นคือ  $0 < \cos A < 1$

6) ถูกต้อง เพราะว่า  $\sin A = \frac{a}{c}$  และ  $\cos A = \frac{b}{c}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad (\sin A)^2 + (\cos A)^2 &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2}{c^2} \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้  $c^2 = a^2 + b^2$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

นั่นคือ  $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

3. **แนวคิด** จากรูป พิจารณาให้  $\overline{OA}$  เป็นฐานของ  $\triangle OAB$   
และสร้างให้  $\overline{BD}$  เป็นส่วนสูง  
พิจารณา  $\triangle BDO$

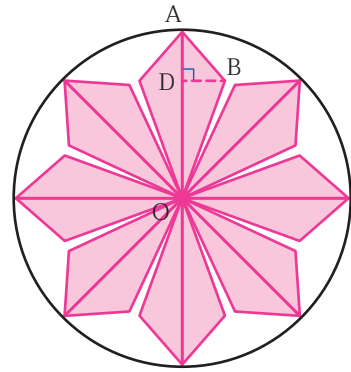
$$\text{จะได้} \quad \sin 20^\circ = \frac{BD}{0.752}$$

$$\text{จากตาราง} \quad \sin 20^\circ \approx 0.342$$

$$\text{ดังนั้น} \quad BD \approx 0.257 \text{ เมตร}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \text{พื้นที่ } \triangle ABO &\approx \frac{1}{2}(1)(0.257) \\ &\approx 0.129 \text{ ตารางเมตร} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของบริเวณที่ต้องระบายด้วยสีชมพูมีประมาณ  $16(0.129) = 2.064$  ตารางเมตร  
นั่นคือ อาจควรซื้อสีอย่างน้อยที่สุด 3 กระป๋อง



4. **แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ดังนี้

โดย จุด A แทน ตำแหน่งที่ยี่หวายืนอยู่

จุด B แทน ตำแหน่งบนพื้นดินที่ตรงกับลูกบอลในแนวตั้ง

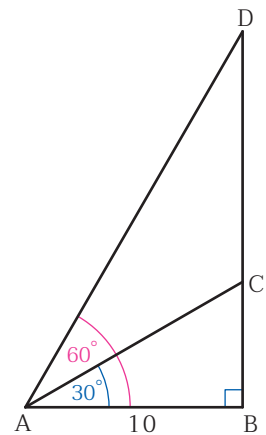
จุด C แทน ตำแหน่งของบอลลู่นที่ยี่หวามองเห็นในตอนแรก

จุด D แทน ตำแหน่งของบอลลู่นที่ยี่หวามองเห็นในตอนหลัง

พิจารณา  $\triangle ABC$

$$\text{จะได้} \quad \tan 30^\circ = \frac{BC}{10}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad BC = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ เมตร}$$



พิจารณา  $\triangle ABD$

$$\text{จะได้ } \tan 60^\circ = \frac{BD}{10}$$

$$\text{ดังนั้น } BD = 10\sqrt{3} \text{ เมตร}$$

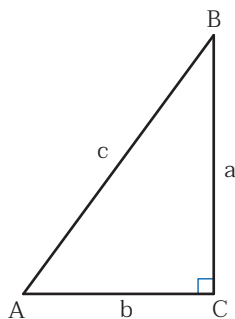
$$\text{เนื่องจาก } CD = BD - BC$$

$$\text{จะได้ } CD = 10\sqrt{3} - \frac{10\sqrt{3}}{3} \approx 11.55 \text{ เมตร}$$

เนื่องจาก บอลลูกใช้เวลา 1.15 วินาที ในการลอยขึ้นในแนวตั้งเป็นระยะ 11.55 เมตร

$$\text{ดังนั้น บอลลูกลอยขึ้นด้วยอัตราเร็วประมาณ } \frac{11.55}{1.15} \approx 10.04 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

## 5. แนวคิด



$$\text{จากรูป } \tan A = \frac{a}{b}, \cos A = \frac{b}{c} \text{ และ } \sin A = \frac{a}{c}$$

$$\text{จาก } \frac{\tan A + \frac{1}{\cos A}}{\tan A - \frac{1}{\cos A}} = -5$$

$$\text{จะได้ } \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{b}}{\frac{a}{b} - \frac{c}{b}} = -5$$

$$\frac{a + c}{a - c} = -5$$

$$a + c = -5a + 5c$$

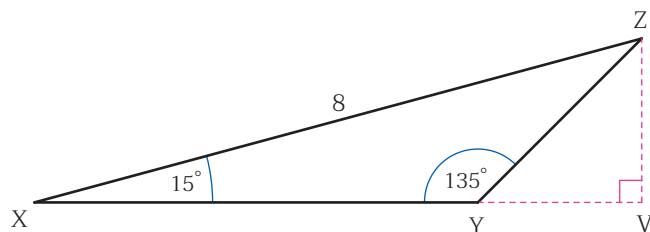
$$6a = 4c$$

$$\frac{a}{c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ดังนั้น } \sin A = \frac{2}{3}$$

6. **แนวคิด** พิจารณา  $\triangle ABD$  เนื่องจาก  $\widehat{BAD} = 75^\circ$   
 จะได้  $\widehat{B} + \widehat{D} = 180 - 75 = 105^\circ$   
 นั่นคือ  $\widehat{B} + \widehat{D} = 105^\circ$  \_\_\_\_\_ ①  
 จากโจทย์  $2\widehat{B} - \widehat{D} = 75^\circ$  \_\_\_\_\_ ②  
 ① + ② ;  $3\widehat{B} = 180^\circ$   
 ดังนั้น  $\widehat{B} = 60^\circ$   
 แทน  $\widehat{B}$  ด้วย  $60^\circ$  ในสมการ ① จะได้  
 $\widehat{D} = 45^\circ$   
 เนื่องจาก  $\widehat{ACD} = 90^\circ$  และ  $\widehat{ADC} = 45^\circ$   
 จะได้  $\widehat{CAD} = 45^\circ$   
 และได้  $\triangle ADC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว  
 เนื่องจาก  $AC = 3\sqrt{3}$  หน่วย จะได้  $CD = 3\sqrt{3}$  หน่วย  
 พิจารณา  $\triangle ABC$   
 จะได้  $\tan 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{BC}$   
 $\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{BC}$   
 ดังนั้น  $BC = 3$  หน่วย  
 นั่นคือ  $BD = BC + CD = 3 + 3\sqrt{3}$  หน่วย

7. **แนวคิด 1** จากโจทย์ อาจวาด  $\triangle XYZ$  ได้ดังรูป จากนั้นลาก  $\overline{ZV}$  ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่ลากต่อ  $\overline{XY}$  ไปทางจุด  $Y$  ให้จุดตั้งฉากคือจุด  $V$



ถ้าให้  $\overline{XY}$  เป็นฐานของ  $\triangle XYZ$  จะได้  $\overline{VZ}$  เป็นส่วนสูง

พิจารณา  $\triangle XVZ$  จะได้  $\sin 15^\circ = \frac{VZ}{8}$

ดังนั้น  $VZ \approx 8 \times 0.259 = 2.072$  หน่วย

เนื่องจาก  $\angle XYV$  เป็นมุมตรง จะได้  $\angle ZYV = 180 - 135 = 45^\circ$

จาก  $\triangle YVZ$  จะได้  $\angle VZY = 180 - (90 + 45) = 45^\circ$

ดังนั้น  $\triangle YVZ$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว และ  $VY = ZV$

นั่นคือ  $VY \approx 2.072$  หน่วย

พิจารณา  $\triangle XVZ$

$$\text{จะได้ } \cos 15^\circ = \frac{XV}{8}$$

$$XV \approx 8(0.966)$$

$$\approx 7.728 \text{ หน่วย}$$

$$\text{เนื่องจาก } XY = XV - VY$$

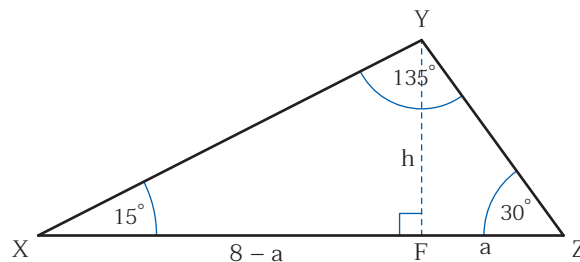
$$\text{จะได้ } XY \approx 7.728 - 2.072$$

$$\approx 5.656 \text{ หน่วย}$$

$$\text{ดังนั้น พื้นที่ } \triangle XYZ \approx \frac{1}{2}(5.656)(2.072)$$

$$\approx 5.86 \text{ ตารางหน่วย}$$

**แนวคิด 2** จากโจทย์ อาจวาด  $\triangle XYZ$  ได้ดังรูป



จากรูป  $\triangle FYZ$  จะได้

$$h = a \tan 30^\circ \quad \text{_____} \text{ ①}$$

จากรูป  $\triangle FXY$  จะได้

$$h = (8 - a) \tan 15^\circ \quad \text{_____} \text{ ②}$$

จากสมการ ① และ ② จะได้

$$a \tan 30^\circ = (8 - a) \tan 15^\circ$$

$$a \tan 30^\circ = 8 \tan 15^\circ - a \tan 15^\circ$$

$$a (\tan 30^\circ + \tan 15^\circ) = 8 \tan 15^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } a \approx 2.537$$

$$\text{และ } h \approx 1.464$$

$$\text{จะได้ พื้นที่ } \triangle XYZ \approx \frac{1}{2}(8)(1.464)$$

$$\approx 5.86 \text{ ตารางหน่วย}$$

8. **แนวคิด** จากโจทย์ อาจเขียนภาพประกอบการแก้ปัญหาได้ดังนี้

เมื่อ A แทน ตำแหน่งที่เปียกปูนยื่นอยู่ในตอนแรก

B แทน ตำแหน่งที่แมวน้อยหลับอยู่

C แทน ตำแหน่งของต้นมะม่วง

D แทน ตำแหน่งที่เปียกปูนยื่นอยู่ในตอนหลัง

เนื่องจาก ต้องการหา DB เพื่อเปรียบเทียบกับความยาวของด้ามจับ  
ของสวิงจับแมลง (0.75 เมตร)

ซึ่งสามารถหาได้จาก  $DB = DE - BE$

พิจารณา  $\triangle DEA$  จะได้  $\sin 45^\circ = \frac{DE}{2.45}$

$$\text{ดังนั้น } DE = 2.45 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.225\sqrt{2} \text{ เมตร}$$

เนื่องจาก  $\angle EAD = 45^\circ$  และ  $\angle DEA = 90^\circ$  จะได้  $\angle ADE = 45^\circ$

นั่นคือ  $\triangle DEA$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว

จะได้  $AE = DE = 1.225\sqrt{2}$  เมตร

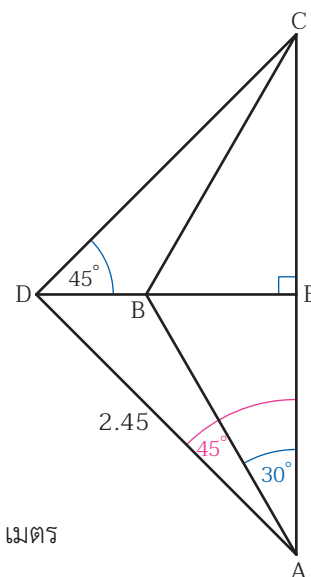
พิจารณา  $\triangle BEA$  จะได้  $\tan 30^\circ = \frac{BE}{1.225\sqrt{2}}$

$$\text{ดังนั้น } BE = (1.225\sqrt{2}) \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \approx 1 \text{ เมตร}$$

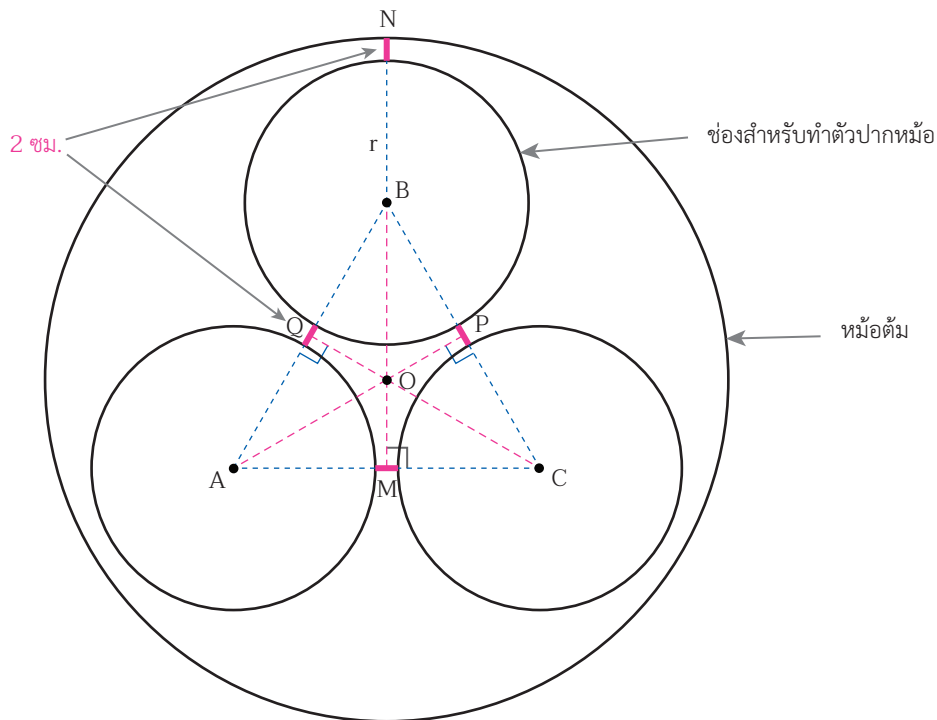
นั่นคือ  $DB \approx (1.225\sqrt{2}) - 1 \approx 0.732$  เมตร

เนื่องจาก ด้ามจับของสวิงจับแมลงของเปียกปูนยาว 0.75 เมตร จะได้  $DB < 0.75$

ดังนั้น ณ ตำแหน่งที่เปียกปูนยื่นอยู่ในตอนหลัง สวิงจับแมลงยาวพอที่จะไปถึงแมวน้อยของเปียกปูน



9.



**แนวคิด 1** สมมติว่ารูปวงกลม A, B และ C มีรัศมียาว  $r$  เซนติเมตร

เนื่องจาก  $AB = BC = CA = 2r + 2$  เซนติเมตร

ดังนั้น  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

จะได้  $\widehat{CAB} = 60^\circ = \widehat{MAB}$

เนื่องจาก  $\overline{AP}$  เป็นเส้นที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า  $ABC$  มาแบ่งครึ่งฐาน  $BC$

จะได้  $\widehat{BAP} = \widehat{CAP} = 30^\circ$

จากรูป สังเกตว่า  $NO = NB + BO$

นั่นคือ  $30 = (r + 2) + BO$

$$28 = r + BO \quad \text{_____} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{จากรูป จะได้ } BO = BM - MO \quad \text{_____} \quad \textcircled{2}$$

พิจารณา  $\triangle ABM$

$$\text{จะได้ } \sin 60^\circ = \frac{BM}{AB}$$

$$BM = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2r + 2) = \sqrt{3}(r + 1) \text{ เซนติเมตร}$$



พิจารณา  $\triangle AOM$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \tan 30^\circ &= \frac{MO}{AM} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{MO}{r+1} \\ MO &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(r+1) \quad \text{เซนติเมตร} \end{aligned}$$

$$\text{จากสมการ ② จะได้} \quad BO = \sqrt{3}(r+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}(r+1) \quad \text{เซนติเมตร}$$

$$\text{จากสมการ ① จะได้} \quad 28 = r + \sqrt{3}(r+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}(r+1)$$

$$\text{นั่นคือ} \quad r = \frac{28 - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} \approx 12.46 \quad \text{เซนติเมตร}$$

ดังนั้น รัศมีของช่องสำหรับทำตัวปากหม้อควรจะยาวประมาณ 12.46 เซนติเมตร

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด 2} \quad \text{จากรูป จะได้} \quad NO &= NB + BO \\ \text{นั่นคือ} \quad 30 &= (r+2) + BO \\ BO &= 28 - r \quad \text{_____ ①} \end{aligned}$$

พิจารณา  $\triangle BOP$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad \cos 30^\circ &= \frac{BP}{BO} \\ \cos 30^\circ &= \frac{r+1}{BO} \end{aligned}$$

$$BO \cos 30^\circ = r+1$$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ ① จะได้} \quad (28-r) \cos 30^\circ &= r+1 \\ 28 \cos 30^\circ - 1 &= r(1 + \cos 30^\circ) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad r = \frac{28\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 12.46$$

ดังนั้น รัศมีของช่องสำหรับทำตัวปากหม้อควรจะยาวประมาณ 12.46 เซนติเมตร

## ตัวอย่างแบบทดสอบท้ายบท

1. กำหนดให้  $\sin A = \frac{4}{5}$  จงหา  $\tan A + \cos A$  (1 คะแนน)

ก.  $\frac{7}{8}$

ข.  $\frac{12}{15}$

ค.  $\frac{27}{20}$

ง.  $\frac{29}{15}$

2. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง (1 คะแนน)

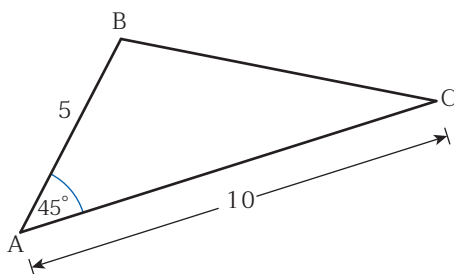
ก.  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

ข.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$

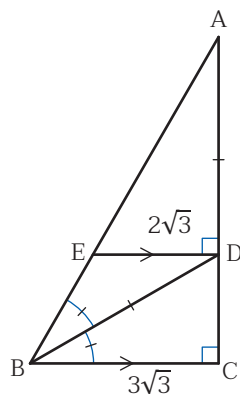
ค.  $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \tan 45^\circ$

ง.  $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = \tan 60^\circ$

3. จงหาพื้นที่ของ  $\triangle ABC$  (2 คะแนน)



4. จากรูปต่อไปนี้

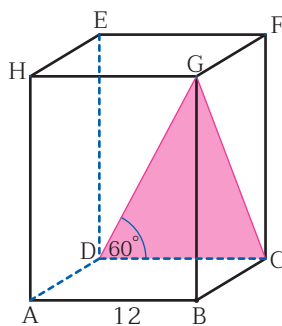


จงหาค่าของ  $\tan \hat{A}\hat{B}\hat{C}$

(3 คะแนน)

5. พิจารณาทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

(1 คะแนน)



เส้นทแยงมุม DG ยาว ..... หน่วย

6. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ระหว่างตึกสองหลังที่มีความสูงเท่ากัน และอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 80 เมตร เมื่อชายคนนั้นมองไปที่ยอดตึกหลังแรกจะมองเป็นมุมเงย  $30^\circ$  แต่เมื่อหันกลับไปมองยอดตึกอีกหลังจะเป็นมุมเงย  $60^\circ$  โดยไม่คิดความสูงของชายคนนี้

1) จงวาดภาพแทนสถานการณ์

(1 คะแนน)



2) จงหาว่าตึกแต่ละหลังสูงกี่เมตร

(3 คะแนน)





## เฉลยตัวอย่างแบบทดสอบท้ายบท

1. กำหนดให้  $\sin A = \frac{4}{5}$  จงหา  $\tan A + \cos A$  (1 คะแนน)

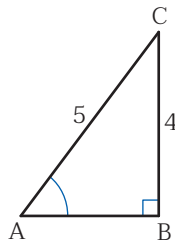
ก.  $\frac{7}{8}$

ข.  $\frac{12}{15}$

ค.  $\frac{27}{20}$

ง.  $\frac{29}{15}$

แนวคิด จาก  $\sin A = \frac{4}{5}$  เราอาจสร้าง  $\triangle ABC$  ได้ดังรูป



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$AB^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$AB = 3$$

ดังนั้น  $\tan A = \frac{4}{3}$  และ  $\cos A = \frac{3}{5}$

นั่นคือ  $\tan A + \cos A = \frac{4}{3} + \frac{3}{5} = \frac{29}{15}$

2. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง (1 คะแนน)

ก.  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

ข.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$

ค.  $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \tan 45^\circ$

ง.  $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = \tan 60^\circ$

แนวคิด

ก. ถูกต้อง เนื่องจาก  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$  และ  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

ข. ถูกต้อง เนื่องจาก  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ค. ไม่ถูกต้อง เนื่องจาก  $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$  แต่  $\tan 45^\circ = 1$

ง. ถูกต้อง เนื่องจาก  $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$  และ  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

สำหรับข้อ 1–2

ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 1 นักเรียนสามารถเข้าใจความหมายและหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมขนาดต่าง ๆ

เกณฑ์การให้คะแนน

คะแนนเต็มข้อละ 1 คะแนน

ตอบถูกต้อง

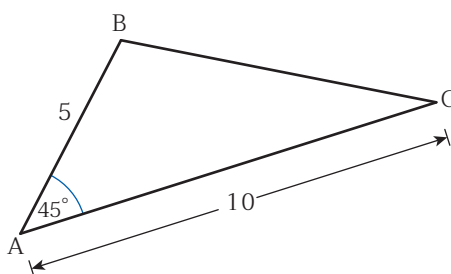
ได้ 1 คะแนน

ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ

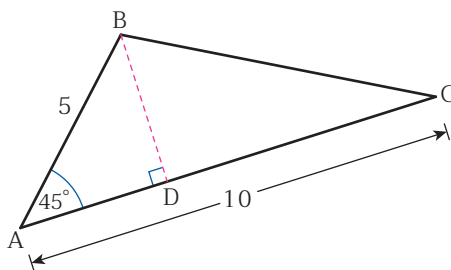
ได้ 0 คะแนน

3. จงหาพื้นที่ของ  $\triangle ABC$ 

(2 คะแนน)



แนวคิด จากรูปที่กำหนดให้ลาก  $\overline{BD}$  ตั้งฉากกับ  $\overline{AC}$  ที่จุด D เพื่อให้ได้ส่วนสูงบนฐาน AC ของรูปสามเหลี่ยม ดังรูป



เนื่องจาก  $\sin 45^\circ = \frac{BD}{5}$

จะได้  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BD}{5}$

ดังนั้น  $BD = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

นั่นคือ พื้นที่ของ  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}$  ตารางหน่วย

ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน

คะแนนเต็ม 2 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

❖ หาความสูงของ  $\triangle ABC$  ถูกต้อง

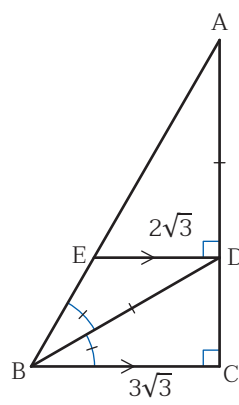
ได้ 1 คะแนน

❖ หาพื้นที่ของ  $\triangle ABC$  ถูกต้อง

ได้ 1 คะแนน



4. จากรูปต่อไปนี้



จงหาค่าของ  $\tan \hat{ABC}$  (3 คะแนน)

แนวคิด เนื่องจาก  $AD = DB$   
ดังนั้น  $\triangle ADB$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว  
จะได้ว่า  $\hat{DAB} = \hat{ABD}$   
นั่นคือ  $\hat{DAB} = \hat{ABD} = \hat{DBC}$   
เนื่องจาก  $\hat{DAB} + \hat{ABD} + \hat{DBC} = 90^\circ$   
จะได้ว่า  $\hat{DAB} = \hat{ABD} = \hat{DBC} = 30^\circ$   
ดังนั้น  $\tan \hat{ABC} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

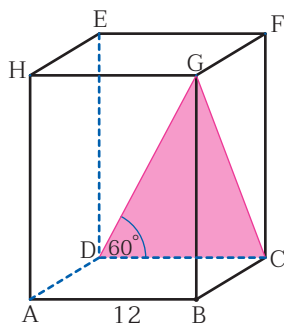
ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

| เกณฑ์การให้คะแนน | คะแนนเต็ม 3 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้      |             |
|------------------|-----------------------------------------------------|-------------|
|                  | ❖ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และคำตอบถูกต้อง            | ได้ 3 คะแนน |
|                  | ❖ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่คำตอบไม่ถูกต้อง         |             |
|                  | หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่คำตอบถูกต้อง          | ได้ 2 คะแนน |
|                  | ❖ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่คำตอบไม่ถูกต้อง         |             |
|                  | หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่คำตอบถูกต้อง              | ได้ 1 คะแนน |
|                  | ❖ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน | ได้ 0 คะแนน |

5. พิจารณาทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

(1 คะแนน)



เส้นทแยงมุม DG ยาว ..... 24 ..... หน่วย

แนวคิด เนื่องจาก

$$\widehat{D\hat{C}G} = 90^\circ$$

พิจารณา  $\triangle DGC$  จะได้

$$\cos 60^\circ = \frac{DC}{DG}$$

จะได้

$$\frac{1}{2} = \frac{12}{DG}$$

ดังนั้น

$$DG = 24 \text{ หน่วย}$$

ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน

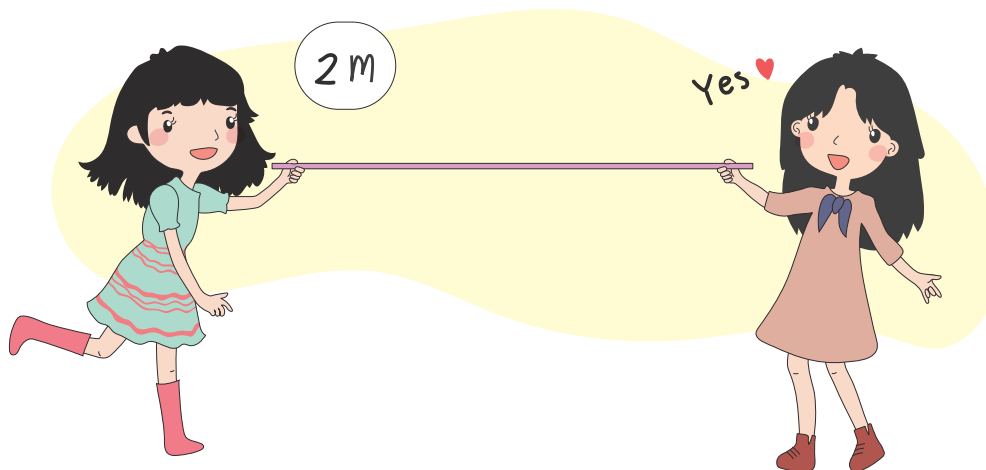
คะแนนเต็ม 1 คะแนน

ตอบถูกต้อง

ตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ตอบ

ได้ 1 คะแนน

ได้ 0 คะแนน

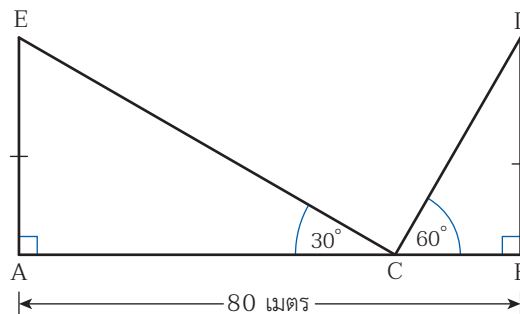


6. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ระหว่างตึกสองหลังที่มีความสูงเท่ากัน และอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง 80 เมตร เมื่อชายคนนั้นมองไปที่ยอดตึกหลังแรกจะมองเป็นมุมเงย  $30^\circ$  แต่เมื่อหันกลับไปมองยอดตึกอีกหลังจะเป็นมุมเงย  $60^\circ$  โดยไม่คิดความสูงของชายคนนี้

1) จงวาดภาพแทนสถานการณ์

(1 คะแนน)

อาจวาดภาพได้ดังนี้



2) จงหาว่าตึกแต่ละหลังสูงกี่เมตร

(3 คะแนน)

แนวคิด ให้ตึกแต่ละหลังมีความสูง  $h$  เมตร

ให้ชายคนนั้นยืนอยู่ห่างจากตึกหลังแรกเป็นระยะทาง  $m$  เมตร

จะได้ว่าชายคนนั้นยืนอยู่ห่างจากตึกหลังที่สองเป็นระยะทาง  $80 - m$  เมตร

พิจารณา  $\triangle CAE$  จะได้  $\tan 30^\circ = \frac{h}{m}$

ดังนั้น  $h = m \tan 30^\circ = \frac{m}{\sqrt{3}}$  ①

พิจารณา  $\triangle CBD$  จะได้  $\tan 60^\circ = \frac{h}{80 - m}$

ดังนั้น  $h = (80 - m) \tan 60^\circ$   
 $h = (80 - m) \times \sqrt{3}$  ②

จากสมการ ① และ ② จะได้  $\frac{m}{\sqrt{3}} = (80 - m) \times \sqrt{3}$

$$m = 3(80 - m)$$

$$4m = 240$$

$$m = 60$$

จากสมการ ① จะได้  $h = \frac{60}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$

ดังนั้น ตึกแต่ละหลังสูง  $20\sqrt{3}$  เมตร

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา  
เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 4 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

ข้อ 1 คะแนนเต็ม 1 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

- ❖ วาดภาพได้สอดคล้องกับปัญหา ได้ 1 คะแนน
- ❖ วาดภาพไม่สอดคล้องกับปัญหา หรือไม่วาด ได้ 0 คะแนน

ข้อ 2 คะแนนเต็ม 3 คะแนน โดยมีเกณฑ์การให้คะแนน ดังนี้

- ❖ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และคำตอบถูกต้อง ได้ 3 คะแนน
- ❖ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่คำตอบไม่ถูกต้อง  
หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่คำตอบถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ❖ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่คำตอบไม่ถูกต้อง  
หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่คำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ❖ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน ได้ 0 คะแนน

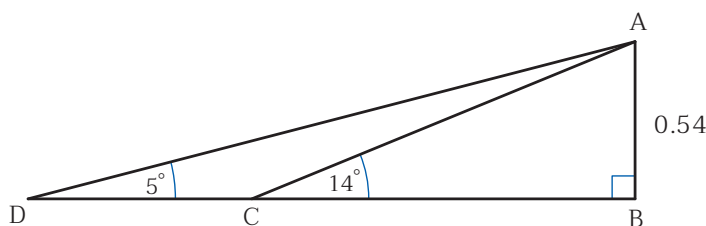
7. ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งต้องการทำทางลาดเพื่ออำนวยความสะดวกสำหรับผู้พิการที่ใช้รถเข็น โดยทำทางลาดที่ทำมุม  $14^\circ$  กับแนวนพื้นดิน เพื่อขึ้นพื้นอาคารชั้น 1 ที่สูงจากพื้นดิน 0.54 เมตร เมื่อทดลองใช้งาน ปรากฏว่า ทางลาดนี้ไม่สะดวกต่อการใช้งาน ทางห้างจึงทำการปรับปรุงใหม่ ให้ทางลาดทำมุม  $5^\circ$  กับแนวนพื้นดิน จงวาดภาพแทนสถานการณ์ และหาว่าจุดเริ่มต้นของทางลาดใหม่อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นของทางลาดเดิมกี่เมตร (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

กำหนดให้

| มุม A      | $\sin A$ | $\cos A$ | $\tan A$ |
|------------|----------|----------|----------|
| $5^\circ$  | 0.09     | 1.00     | 0.09     |
| $14^\circ$ | 0.24     | 0.97     | 0.25     |

(4 คะแนน)

แนวคิด จากโจทย์ อาจวาดภาพแทนสถานการณ์ได้ดังนี้



ให้จุด C เป็นจุดเริ่มต้นของทางลาดเดิม  
และจุด D เป็นจุดเริ่มต้นของทางลาดใหม่

เนื่องจาก  $\tan 14^\circ = \frac{0.54}{BC}$

จะได้  $0.25 \approx \frac{0.54}{BC}$

ดังนั้น  $BC \approx 2.16$  เมตร

เนื่องจาก  $\tan 5^\circ = \frac{0.54}{BD}$

จะได้  $0.09 \approx \frac{0.54}{BD}$

ดังนั้น  $BD \approx 6$  เมตร

นั่นคือ ทางห้างจะต้องทำทางลาดใหม่ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเดิมประมาณ  $6 - 2.16$   
 $\approx 3.84$  เมตร

ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 4 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

ส่วนที่ 1 การวาดภาพ

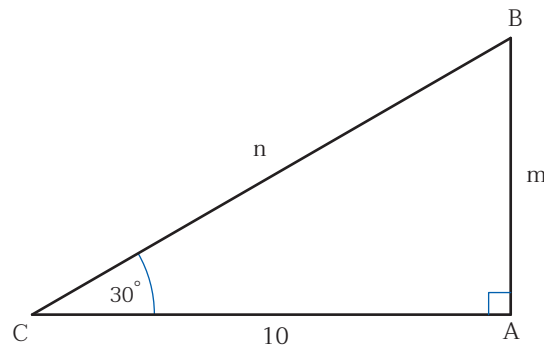
- ❖ วาดภาพได้สอดคล้องกับปัญหา ได้ 1 คะแนน
- ❖ วาดภาพไม่สอดคล้องกับปัญหา หรือไม่วาด ได้ 0 คะแนน

ส่วนที่ 2 การเขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบ

- ❖ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และคำตอบถูกต้อง ได้ 3 คะแนน
- ❖ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่คำตอบไม่ถูกต้อง หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่คำตอบถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ❖ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่คำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ❖ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน ได้ 0 คะแนน

8. พายุ “โพดุล” ได้เคลื่อนตัวเข้าสู่จังหวัดนครพนม เมื่อวันที่ 30 สิงหาคม พ.ศ. 2562 ซึ่งส่งผลให้เกิดฝนตกหนักและน้ำท่วมฉับพลันในหลายพื้นที่ ถ้าต้นไม้ที่บ้านของจ๊อบจ้อยถูกพายุโพดุลพัดหักลงมา ทำให้ออดของต้นไม้จรดพื้นทำมุม 30 องศา กับพื้นดินพอดี ถ้าออดของต้นไม้อยู่ห่างจากโคนต้นไม้ 10 เมตร จงวาดภาพแทนสถานการณ์ และหาว่าความสูงของต้นไม้ก่อนโดนพายุพัดหักเป็นเท่าไร (4 คะแนน)

แนวคิด จากโจทย์ อาจวาดภาพแทนสถานการณ์ได้ดังนี้



เมื่อ จุด A แทน โคนต้นไม้

จุด B แทน ต้นไม้บริเวณที่หัก

จุด C แทน จุดที่ยอดของต้นไม้หักลงมาจรดพื้น

จากรูป จะได้ความสูงของต้นไม้ก่อนโดนพายุพัดหัก เท่ากับ  $m + n$  เมตร

เนื่องจาก  $\cos 30^\circ = \frac{10}{n}$

จะได้  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{n}$

ดังนั้น  $n = \frac{20}{\sqrt{3}}$

เนื่องจาก  $\sin 30^\circ = \frac{m}{n}$

จะได้  $\frac{1}{2} = \frac{m}{\frac{20}{\sqrt{3}}}$

ดังนั้น  $m = \frac{10}{\sqrt{3}}$

นั่นคือ ความสูงของต้นไม้ก่อนโดนพายุพัดหัก เท่ากับ  $\frac{20}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$  เมตร

หรือประมาณ 17.32 เมตร

### ความสอดคล้องกับจุดประสงค์ของบทเรียน

ข้อ 2 นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา  
เกณฑ์การให้คะแนน คะแนนเต็ม 4 คะแนน โดยแบ่งให้คะแนน ดังนี้

#### ส่วนที่ 1 การวาดภาพ

- ❖ วาดภาพได้สอดคล้องกับปัญหา ได้ 1 คะแนน
- ❖ วาดภาพไม่สอดคล้องกับปัญหา หรือไม่วาด ได้ 0 คะแนน

#### ส่วนที่ 2 การเขียนแสดงแนวคิดและหาคำตอบ

- ❖ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน และคำตอบถูกต้อง ได้ 3 คะแนน
- ❖ เขียนแสดงแนวคิดครบถ้วน แต่คำตอบไม่ถูกต้อง  
หรือเขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่คำตอบถูกต้อง ได้ 2 คะแนน
- ❖ เขียนแสดงแนวคิดบางส่วน แต่คำตอบไม่ถูกต้อง  
หรือไม่เขียนแสดงแนวคิด แต่คำตอบถูกต้อง ได้ 1 คะแนน
- ❖ ไม่เขียนแสดงแนวคิดและคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียน ได้ 0 คะแนน







## กิจกรรมคณิตศาสตร์เชิงสะสมเต็ม : มื้อนี้ฟรีหรือจ่าย

กิจกรรมคณิตศาสตร์เชิงสะสมเต็ม เป็นกิจกรรมหรือปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีความเกี่ยวข้องกับชีวิตจริง ซึ่งใช้กระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรม หรือศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง คือ วิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี มาช่วยในการแก้ปัญหา สำหรับกิจกรรมนี้ มีจุดประสงค์ให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องความน่าจะเป็น มาออกแบบกติกาของเกมหยิบลูกบอล เพื่อสมนาคุณลูกค้าของร้านอาหาร โดยมีสื่อ/อุปกรณ์ และขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมดังนี้



### สื่อ/อุปกรณ์

- |                                                                |       |
|----------------------------------------------------------------|-------|
| 1. ลูกบอล (หรือลูกปิงปอง) สีแตกต่างกัน 3 สี สีละ 2 ลูก รวมเป็น | 6 ลูก |
| 2. กล่องทึบ (หรือถังทึบ)                                       | 1 ใบ  |



### ขั้นตอนการทำกิจกรรม

1. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4–5 คน
2. ครูให้นักเรียนช่วยกันคิดออกแบบกติกาสำหรับเหตุการณ์ A และ B ซึ่งจะทำให้ได้ความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์ เป็นไปตามที่กำหนด พร้อมทั้งแสดงแนวคิดในการคำนวณความน่าจะเป็น
3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทดลองหยิบลูกบอลตามกติกาที่นักเรียนในกลุ่มนั้นกำหนด จำนวน 30 ครั้ง เพื่อเปรียบเทียบความน่าจะเป็นทางทฤษฎีและความน่าจะเป็นในทางปฏิบัติ
4. ครูให้ตัวแทนนักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอกติกาที่ออกแบบสำหรับแต่ละเหตุการณ์ เพื่ออภิปรายแลกเปลี่ยนแนวคิดกับเพื่อนกลุ่มอื่น ๆ

## เฉลยกิจกรรมคณิตศาสตร์เชิงสะเต็มศึกษา : มือนี้อฟรีหรือจ่าย

### แนวคิด

เนื่องจากมีลูกบอลเป็นสีทอง สีเงิน และสีชมพู อย่างละ 2 ลูก จะกำหนดให้ลูกบอลสีทอง สีเงิน และสีชมพู มีชื่อเป็น  $t_1, t_2, g_1, g_2, c_1, c_2$  ตามลำดับ

ถ้ากำหนดกติกาให้ลูกค้าแต่ละโต๊ะสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องหรือถังทึบพร้อมกันจำนวน 2 ลูก

ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เกิดขึ้นได้จากการสุ่มหยิบลูกบอลขึ้นมาพร้อมกันสองลูก มี 15 แบบ ดังนี้

|           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $t_1 t_2$ | $t_1 g_1$ | $t_1 g_2$ | $t_1 c_1$ | $t_1 c_2$ |
| $t_2 g_1$ | $t_2 g_2$ | $t_2 c_1$ | $t_2 c_2$ |           |
| $g_1 g_2$ | $g_1 c_1$ | $g_1 c_2$ |           |           |
| $g_2 c_1$ | $g_2 c_2$ |           |           |           |
| $c_1 c_2$ |           |           |           |           |

เพื่อให้เหตุการณ์ A มีความน่าจะเป็นมากกว่า 0 และน้อยกว่า 0.1 เหตุการณ์ A จะต้องมียุทธ์ที่เกิดขึ้นได้และมีไม่ถึง 1.5 แบบ เช่น อาจกำหนดให้เหตุการณ์ A เป็นการหยิบได้ลูกบอลสีทองทั้งสองลูก ซึ่งมีผลลัพธ์เพียงแบบเดียว คือ  $t_1 t_2$  จะได้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เป็น  $\frac{1}{15}$

เพื่อให้เหตุการณ์ B มีความน่าจะเป็นมากกว่าหรือเท่ากับ 0.4 และน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0.5 เหตุการณ์ B จะต้องมียุทธ์ตั้งแต่ 6 ถึง 7.5 แบบ เช่น อาจกำหนดให้เหตุการณ์ B เป็นการหยิบลูกบอลไม่ได้สีทองเลย ซึ่งมีผลลัพธ์อยู่ 6 แบบ คือ  $g_1 g_2, g_1 c_1, g_1 c_2, g_2 c_1, g_2 c_2$  และ  $c_1 c_2$  ทำให้ได้ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เป็น  $\frac{6}{15}$  หรือ 0.4

นั่นคือ ควรกำหนดกติกาให้ลูกค้าสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องทึบขึ้นมาสองลูกพร้อมกัน และให้เหตุการณ์ A ซึ่งทำให้ได้รับรางวัลที่ 1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีทองทั้งสองลูก และให้เหตุการณ์ B ซึ่งทำให้ได้รับรางวัลที่ 2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้ลูกบอลสีทองเลย

## ความรู้เพิ่มเติมสำหรับครู

### การใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ในการพิจารณาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

เราสามารถใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ในการสังเกตค่า หรือสำรวจสมบัติต่าง ๆ ได้ โดยใช้เมนูหรือคำสั่งของเครื่องคิดเลข แล้วสังเกตสิ่งที่เกิดขึ้น เพื่อนำไปสู่การสร้างข้อความคาดการณ์ สมบัติ หรือคำตอบของปัญหา ให้พิจารณาตัวอย่างดังต่อไปนี้

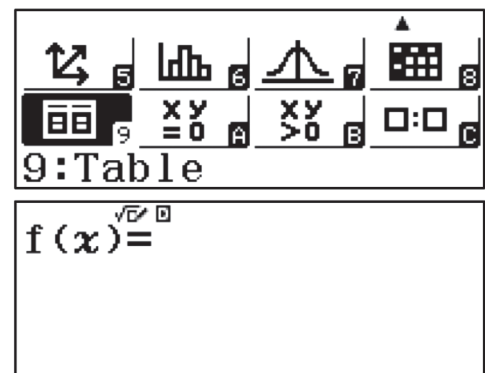
**ตัวอย่าง** จงพิจารณาว่า ระบบสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีคำตอบเดียว หรือ มีคำตอบมากมายไม่จำกัด หรือ ไม่มีคำตอบ

$$\begin{array}{l} 1) \quad \begin{array}{l} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = -1 \end{array} \\ 2) \quad \begin{array}{l} 2x + 4y = 2 \\ 3x + 6y = 12 \end{array} \\ 3) \quad \begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ -3x + 6y = 9 \end{array} \end{array}$$

เราสามารถใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ในการพิจารณาลักษณะคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้การนึกภาพของกราฟของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรควบคู่ไปกับการใช้เมนูและคำสั่งของเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ได้โดยไม่ต้องวาดกราฟ ดังนี้

- จัดรูปสมการเชิงเส้นสองตัวแปรให้อยู่ในรูป  $y = mx + b$  เมื่อ  $x$  และ  $y$  เป็นตัวแปร  $m$  และ  $b$  เป็นค่าคงตัว จากตัวอย่างข้อ 1) จะจัดรูปได้เป็น  $y = -\frac{3}{2}x + 1$  และ  $y = -x - \frac{1}{2}$
- เลือกเมนู Table

สามารถใช้เครื่องคิดเลขได้ดังนี้



## 3. ใส่สมการเชิงเส้นสองตัวแปรทั้งสองสมการลงไป

สามารถใช้เครื่องคิดเลขได้ดังนี้

$$- \frac{3}{2}x + 1 =$$

$$-x - \frac{1}{2} =$$

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$$

$$g(x) = -x - \frac{1}{2}$$

## 4. เลือกขอบเขตของค่า x ที่จะแสดงในตาราง เช่น ในที่นี้ ให้สังเกตค่า x ตั้งแต่ -10 ถึง 10 โดยเพิ่มขึ้นครั้งละ 1

สามารถใช้เครื่องคิดเลขได้ดังนี้

$$-10 =$$

$$10 =$$

$$1 =$$

Table Range  
Start: -10  
End : 5  
Step : 1

Table Range  
Start: -10  
End : 10  
Step : 1

Table Range  
Start: -10  
End : 10  
Step : 1

5. กด  $=$  บนเครื่องคิดเลขอีกครั้ง หน้าจอจะแสดงตารางค่า  $f(x)$  และ  $g(x)$  หรือค่า  $y$  ของทั้งสองสมการตามค่า  $x$  ที่กำหนดในข้อ 4 จากนั้นสังเกตค่า  $x$  ที่ทำให้ค่า  $y$  ของทั้งสองสมการเท่ากัน

|   | $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|-----|--------|--------|
| 1 | -10 | 16     | 9.5    |
| 2 | -9  | 14.5   | 8.5    |
| 3 | -8  | 13     | 7.5    |
| 4 | -7  | 11.5   | 6.5    |

-10

6. จากตาราง สังเกตเห็นว่า ที่ค่า  $x = 3$  จะทำให้  
ทั้งสองสมการมีค่า  $y$  เท่ากับ  $-3.5$   
แสดงว่า กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรทั้งสองสมการนั้น  
จะตัดกันที่จุด  $(3, -3.5)$   
ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ คือ  $(3, -3.5)$

| $\sqrt{a}$ | $b$    |        |      |  |
|------------|--------|--------|------|--|
| $x$        | $f(x)$ | $g(x)$ |      |  |
| 12         | 1      | -0.5   | -1.5 |  |
| 13         | 2      | -2     | -2.5 |  |
| 14         | 3      | -3.5   | -3.5 |  |
| 15         | 4      | -5     | -4.5 |  |

3

สำหรับตัวอย่างข้อ 2) ตารางที่ได้จะไม่มีค่า  $x$  ที่ทำให้ค่า  $y$   
ของทั้งสองสมการเท่ากัน แต่สังเกตได้ว่า เมื่อค่า  $x$  เพิ่มขึ้น 1 หน่วย  
ค่า  $y$  ของทั้งสองสมการจะลดลง 0.5 หน่วย เท่ากัน และทุก ๆ ค่า  $x$   
จะมีค่า  $y$  ของทั้งสองสมการต่างกัน 1.5 หน่วย เสมอ แสดงว่า  
กราฟของสมการเชิงเส้นทั้งสองสมการนั้นขนานกัน  
ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

| $\sqrt{a}$ | $b$    |        |     |  |
|------------|--------|--------|-----|--|
| $x$        | $f(x)$ | $g(x)$ |     |  |
| 1          | -10    | 5.5    | 7   |  |
| 2          | -9     | 5      | 6.5 |  |
| 3          | -8     | 4.5    | 6   |  |
| 4          | -7     | 4      | 5.5 |  |

-10

สำหรับตัวอย่างข้อ 3) ตารางแสดงว่าทุก ๆ ค่า  $x$  จะมีค่า  $y$   
ของทั้งสองสมการเท่ากันเสมอ แสดงว่า กราฟของสมการเชิงเส้น  
ทั้งสองสมการนั้นทับกัน  
ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายไม่จำกัด

| $\sqrt{a}$ | $b$    |        |      |  |
|------------|--------|--------|------|--|
| $x$        | $f(x)$ | $g(x)$ |      |  |
| 1          | -10    | -3.5   | -3.5 |  |
| 2          | -9     | -3     | -3   |  |
| 3          | -8     | -2.5   | -2.5 |  |
| 4          | -7     | -2     | -2   |  |

-10

**หมายเหตุ :** หากตารางที่ได้ไม่เป็นไปตามลักษณะของตัวอย่างทั้งสามข้างต้น ให้พิจารณาใหม่อีกครั้งโดยเปลี่ยนขอบเขตของค่า  $x$  ที่จะแสดงในตาราง  
และปรับค่าที่เพิ่มขึ้นในแต่ละครั้งให้น้อยลง เช่น 0.25, 0.5 หรือ 0.6 ทั้งนี้ ตัวอย่างของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่ใช้จะต้องมี  
คำตอบไม่ซับซ้อนเกินไปสำหรับการใช้เครื่องคิดเลขพิจารณา เช่น คำตอบที่เป็นทศนิยมหลายตำแหน่ง หรือจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

## การใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ในการตรวจสอบคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$3x + 2y = 2$$

$$2x + 2y = -1$$

เราสามารถใช้เมนูและคำสั่งในเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ในการตรวจสอบคำตอบ ได้ดังนี้

### 1. เลือกเมนู Equation/Function

สามารถใช้เครื่องคิดเลขได้ดังนี้



หรือ



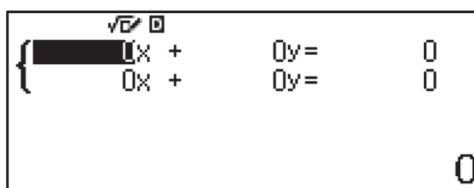
1:Simul Equation  
2:Polynomial

### 2. กด 1 บนเครื่องคิดเลขเพื่อเลือกเมนูย่อย

Simul Equation

Simul Equation  
Number of  
Unknowns?  
Select 2~4

จากนั้น กด 2 เพื่อระบุว่าเป็นระบบสมการเชิงเส้น  
ที่มีตัวแปร 2 ตัว



3. จัดรูปสมการเชิงเส้นสองตัวแปรให้อยู่ในรูป  $ax + by = e$  เมื่อ  $x$  และ  $y$  เป็นตัวแปร  $a, b$  และ  $e$  เป็นจำนวนจริงที่  $a$  และ  $b$  ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จากนั้น ใส่ค่า  $a, b$  และ  $e$  ของแต่ละสมการลงในเครื่องคิดเลข

สามารถใช้เครื่องคิดเลขได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & = & 2 & = & 1 & = & & & \\ 2 & = & 2 & = & - & 1 & = & & \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

4. กด  $=$  บนเครื่องคิดเลขอีกครั้ง หน้าจอจะแสดงค่า  $x$  ที่เป็นคำตอบของระบบสมการ

$$x = 3$$

จากนั้น กด  $=$  บนเครื่องคิดเลขอีกครั้ง หน้าจอจะแสดงค่า  $y$  ที่เป็นคำตอบของระบบสมการ

$$y = -\frac{7}{2}$$

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่มีคำตอบมากมายไม่จำกัด  
หน้าจอจะแสดง Infinite Solution

$$\text{Infinite Solution}$$

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่ไม่มีคำตอบ  
หน้าจอจะแสดง No Solution

$$\text{No Solution}$$

## การใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ในการสุ่มจำนวน

ในการเรียนเกี่ยวกับการทดลองสุ่มในเรื่องความน่าจะเป็น นอกจากเราจะใช้การโยนเหรียญหรือการทอดลูกเต๋าในการเรียนการสอนแล้ว เรายังสามารถใช้คำสั่งในเครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ในการสุ่มจำนวนเต็มได้โดยใช้คำสั่ง RanInt ดังนี้

1. เลือกคำสั่ง RanInt เพื่อสุ่มจำนวนเต็มในขอบเขตที่กำหนด

สามารถใช้เครื่องคิดเลขได้ดังนี้

ALPHA .

RanInt#(

2. กำหนดขอบเขตของจำนวนเต็มที่ต้องการสุ่ม ในที่นี้กำหนดให้สุ่มจำนวนเต็มตั้งแต่ -5 ถึง 5

สามารถใช้เครื่องคิดเลขได้ดังนี้

- 5 SHIFT ) 5 )

RanInt#(-5, 5)

3. กด = บนเครื่องคิดเลข หน้าจอด้านขวาล่างจะปรากฏจำนวนที่สุ่มขึ้น  
และเมื่อกด = เรื่อย ๆ หน้าจอก็จะปรากฏจำนวนที่สุ่มขึ้นในแต่ละครั้ง และจำนวนนั้นจะอยู่ในขอบเขตที่กำหนดขึ้น

RanInt#(-5, 5) ^  
0

RanInt#(-5, 5) ^  
4

RanInt#(-5, 5) ^  
-3



## บรรณานุกรม

- ราชบัณฑิตยสถาน. (2543). *ศัพท์คอมพิวเตอร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน* (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพฯ: อรุณการพิมพ์.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2546). *ศัพท์วิทยาศาสตร์ อังกฤษ–ไทย ไทย–อังกฤษ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน* (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพฯ: อรุณการพิมพ์.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). *พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน* (พิมพ์ครั้งที่ 10). กรุงเทพฯ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชันส์.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2554). *พจนานุกรม ฉบับราชบัณฑิตยสถาน* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชันส์.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2557). *ศัพท์ต่างประเทศที่ใช้คำไทยแทนได้* (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพฯ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชันส์.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2558). *พจนานุกรมคำใหม่ เล่ม 1–2 ฉบับราชบัณฑิตยสถาน*. กรุงเทพฯ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชันส์.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2556). *คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2558). *คู่มือครูรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2559). *คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สำนักงานราชบัณฑิตยสภา. (2559). *พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา* (พิมพ์ครั้งที่ 11). กรุงเทพฯ: สหมิตรพรินต์ติ้งแอนด์พับลิชชิ่ง.

## คณะผู้จัดทำ

### คณะที่ปรึกษา

ศ. ดร.ชูกิจ ลิมปิจำนงค์  
ดร.วนิดา ธนประโยชน์ศักดิ์  
ดร.ศรเทพ วรรณรัตน์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

### คณะผู้จัดทำคู่มือครู

นางนงนุช ผลทวี  
ดร.เชิดศักดิ์ ภักดีวิโรจน์

โรงเรียนทับปุดวิทยา จังหวัดพังงา  
โรงเรียน ภ.ป.ร. ราชวิทยาลัย ในพระบรมราชูปถัมภ์  
จังหวัดนครปฐม  
โรงเรียนสตรีศรีเกศ จังหวัดศรีสะเกษ  
โรงเรียนสาธิต “พิบูลบำเพ็ญ” มหาวิทยาลัยบูรพา  
จังหวัดชลบุรี

นางมยุรี สาสึงค์  
นายรัฐพล กัลพล

ข้าราชการบำนาญ  
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

นายถนอมเกียรติ งานสกุล  
นางสาวดนิดา ชื่นอารมณ์  
นางสาววรรณารถ อยู่สุข  
นางสาวจันทร์นภา อุตตะมะ  
ดร.รณชัย ปานะโปย  
นางสาวสิริวรรณ จันทร์กุล  
ดร.อลงกต ไหมด้วง

### คณะผู้พิจารณาคู่มือครู

รศ. ดร.อัมพร ม้าคนอง  
ผศ. ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ้ม  
ผศ. ดร.ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์  
ผศ. ดร.วันดี เกษมสุขพิพัฒน์  
ผศ. ดร.อรรถศาสน์ นิมิตรพันธ์  
นางนงนุช ผลทวี  
ดร.วัลลภา บุญวิเศษ  
ดร.เชิดศักดิ์ ภักดีวิโรจน์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์  
มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์  
มหาวิทยาลัยสวนดุสิต  
โรงเรียนทับปุดวิทยา จังหวัดพังงา  
โรงเรียนเบ็ญจะมะมหาราช จังหวัดอุบลราชธานี  
โรงเรียน ภ.ป.ร. ราชวิทยาลัย ในพระบรมราชูปถัมภ์  
จังหวัดนครปฐม

นางสาวอัจฉรา วันฤกษ์

นางมยุรี สาลิวงศ์

นายรัฐพล กัลพล

นายถนอมเกียรติ งานสกุล

ผศ.ลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา

นางสุวรรณา คล้ายกระแสน

นายสมนึก บุญพาไสว

ผศ.มาลินท์ อธิธิรส

ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม

นางสาวดนิตา ชื่นอารมณ

นางสาววรรณารถ อยู่สุข

นางสาวจันทร์นภา อุตตะมะ

ดร.รณชัย ปานะโปย

นางสาวสิริวรรณ จันทร์กุล

ดร.อลงกต ไหมด้วง

#### คณะบรรณาธิการ

รศ. ดร.อัมพร ม้าคนอง

ผศ. ดร.วันดี เกษมสุขพิพัฒน์

ผศ.มาลินท์ อธิธิรส

#### คณะทำงานฝ่ายเสริมวิชาการ

ฝ่ายนวัตกรรมการเรียนรู้

นางวนิดา สิงห์น้อย

#### ออกแบบรูปเล่ม

บริษัท เอิร์ด อาย 1999 จำกัด

โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย มุกดาหาร  
จังหวัดมุกดาหาร

โรงเรียนสตรีสิริเกศ จังหวัดศรีสะเกษ

โรงเรียนสาธิต “พิบูลบำเพ็ญ” มหาวิทยาลัยบูรพา  
จังหวัดชลบุรี

ข้าราชการบำนาญ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี



สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี  
กระทรวงศึกษาธิการ

